

Bài 1. (3 điểm)

Cho biểu thức:
$$A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Bài 2. (4 điểm)

a) Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ với $a + b \geq 1$

b) Ký hiệu $[a]$ (phần nguyên của a) là số nguyên lớn nhất không vượt quá a .

Tìm x biết rằng:
$$\left[\frac{34x + 19}{11} \right] = 2x + 1$$

Bài 3. (3 điểm)

Lúc 7 giờ, một ca nô xuôi dòng từ A đến B cách nhau $36km$, rồi ngay lập tức quay trở về A lúc 11 giờ 30 phút. Tính vận tốc ca nô khi xuôi dòng, biết vận tốc dòng nước chảy là $6km/h$

Bài 4. (5 điểm)

a) Hãy tính số bị chia, số chia và thương số trong phép chia sau đây:

$\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$ biết rằng cả ba số đều là bình phương của những số nguyên (những chữ khác nhau là các chữ số khác nhau)

b) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Bài 5. (5 điểm)

Cho đoạn thẳng $AB = a$. Gọi M là một điểm nằm giữa A và B. Vẽ về một phía của AB các hình vuông $AMNP, BMLK$ có tâm theo thứ tự là C, D. Gọi I là trung điểm của CD .

a) Tính khoảng cách từ I đến AB

b) Khi điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì điểm I di chuyển trên đường nào ?

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) ĐKXD: $x \neq \pm 1; x \neq 0$

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x} \\ &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1-3x^2-3x}{3x} \right) \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{1-2x-3x^2}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} \\ &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(1-3x)}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2-2+6x}{3x} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$

b) $A = \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$

Để A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{x-1}$ có giá trị nguyên $\Rightarrow x \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$
 $\Rightarrow x \in \{-1; 0; 2; 3\}$ vì $x \neq -1; x \neq 0 \Rightarrow \{x\} = \{2; 3\}$

Bài 2.

a) Theo bài ra ta có: $a+b \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 1$ (1)

Mặt khác: $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $2(a^2 + b^2) \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

b) $\left[\frac{34x+19}{11} \right] = 2x+1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{34x+19}{11} - (2x+1) < 1$ và $2x+1 \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 12x+8 < 11 \Leftrightarrow -8 \leq 12x < 3 \Leftrightarrow \frac{-4}{3} \leq 2x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{3} \leq 2x+1 < \frac{3}{2}$$

$$2x+1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ 2x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ x=0 \end{cases}$$

Do

Bài 3.

Gọi $x(km/h)$ là vận tốc ca nô xuôi dòng ($x > 12$)

Vận tốc ca nô khi nước lặng: $x - 6(km/h)$

Vận tốc ca nô khi ngược dòng: $x - 12(km/h)$

Thời gian cả đi và về của ca nô là $4,5$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{36}{x} + \frac{36}{x-12} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x-4)(x-24) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4(km) \\ x=24(tm) \end{cases}$$

Vậy vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là $24km/h$

Bài 4.

a) $\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$

Vì $q \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} q=4 \\ q=9 \end{cases} \Rightarrow a, d$ phải là những số thuộc $\{1; 4; 5; 6; 9\}, a, d \neq 0$

Do $\overline{abcd} = \overline{dcba} \times q$ nên $d < 3 \Rightarrow d = 1$

Giả sử $q = 4$ khi đó $\overline{1cba} \cdot 4 = \overline{abcd}$ (vô lý) vì $\overline{1cba} \cdot 4$ phải là một số chẵn nên $q = 9$

Với $q=9$ ta có: $\overline{1cba} \times 9 = \overline{abcd}$ suy ra $a=9, c < 2$ vì tích $\overline{1cba} \times 9$ là số có 4 chữ số nên ta lại có $c \neq d$ tức là $c \neq 1 \Rightarrow c = 0$

Ta thấy $\overline{abcd} = \overline{9b01} = \overline{10b9} \times 9$ vậy $\overline{9b01}$ là số chia hết cho 9 nên $b = 8$

Tóm lại ta có: $9801 : 1089 = 9$

b) Đặt $x = b + c - a; y = a + c - b; z = a + b - c \Rightarrow x, y, z > 0$
 $\Rightarrow x + y + z = a + b + c$

$$2a = a + b + c - (b + c - a) = x + y + z - x = y + z \Rightarrow a = \frac{y+z}{2}$$

Tương tự: $b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$

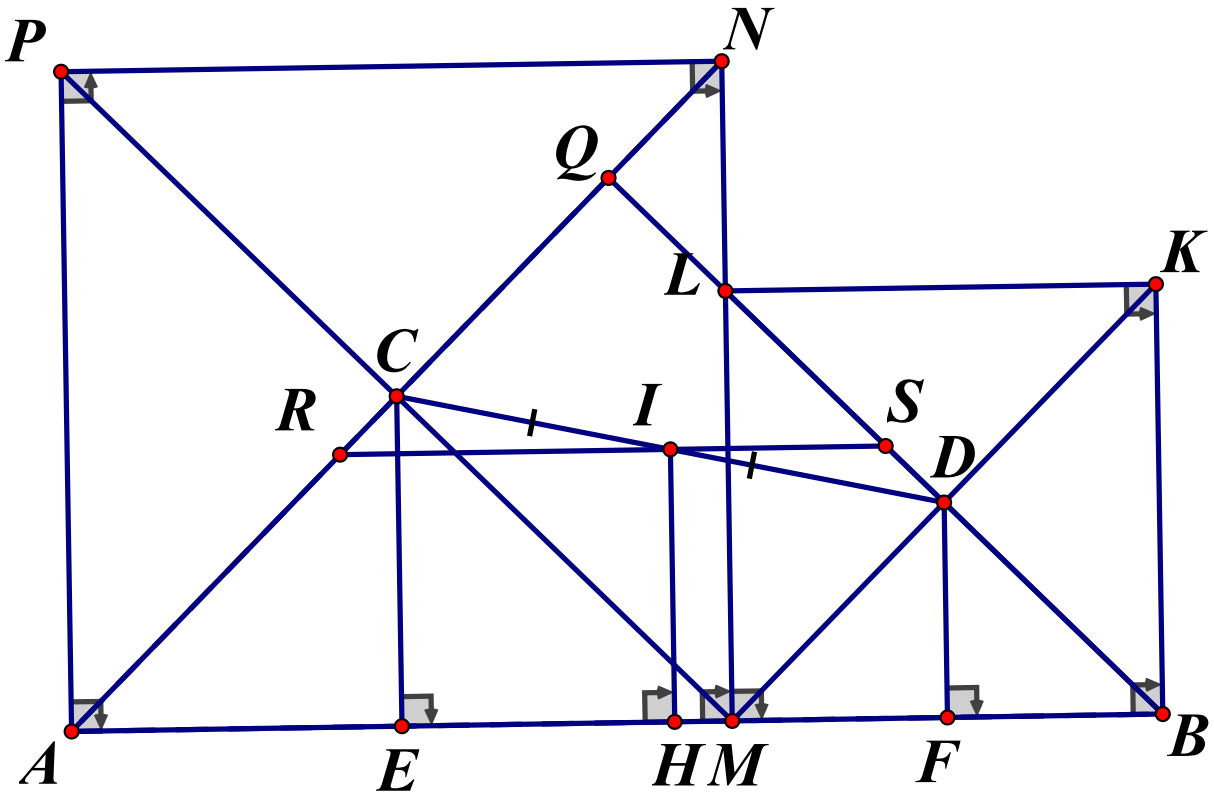
$$\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6$$

BĐT chứng minh tương đương với:

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \geq 6 \quad \text{do} \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh

Bài 5.



- a) Kẻ CE, IH, DF cùng vuông góc với AB suy ra tứ giác $CDFE$ là hình thang vuông.

Chứng minh được:
$$CE = \frac{AM}{2}, DF = \frac{BM}{2} \Rightarrow CE + DF = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow IH = \frac{a}{4}$$

- b) Khi M di chuyển trên AB thì I di chuyển trên đoạn RS song song với AB và

cách AB một khoảng bằng $\frac{a}{4}$ (R là trung điểm của AQ)

S là trung điểm của BQ , Q là giao điểm của BL và AN)