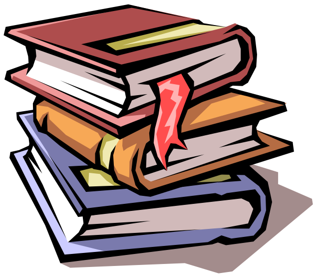
Tailieumontoan.com

Nguyễn Công Lợi



TUYỂN TẬP ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN TOÁN 2018-2019

Nghệ An, ngày 24 tháng 8 năm 2020

Đề số 12

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH BÌNH ĐỊNH

Chuyên Toán – Năm học 2018 – 2019

Bài 1 (2.0 điểm).

1. Cho biểu thức $T = \dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \dfrac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}\right)$.

Với $a \neq b; a > 0; b > 0$

a) Rút gọn biểu thức T

b) Chứng minh rằng $T > 1$.

2. Cho n là số tự nhiên chẵn, chứng minh rằng $20^n - 3^n + 16^n - 1$ chia hết cho 323.

Bài 2 (2.0 điểm).

1) Giải bất phương trình $3x + 2 \leq \sqrt{7x + 8}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y - \dfrac{4}{x} - \dfrac{4}{y} = 3 \\ x + y + \dfrac{6}{x+y} = -5 \end{cases}$

Bài 3. (1.0 điểm)

Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(2m-3)x - 5m + 25 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị m là số nguyên sao cho phương trình có nghiệm là số hữu tỉ.

Bài 4. (4.0 điểm).

1. Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn và $AB \geq BC; BC \geq CA$. Xác định vị trí điểm M thuộc miền tam giác ABC (gồm các cạnh và miền trong tam giác) sao cho tổng khoảng cách từ M đến ba cạnh nhỏ nhất.

2. Cho tam giác ABC (AB < AC) có các góc đều nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC và AD lần lượt tại K và I. Qua F kẻ đường thẳng song song với AC cắt AK, AD lần lượt tại M và N. Gọi O là trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng DA là phân giác của FDE

b) Chứng minh rằng F là trung điểm MN

c) Chứng minh rằng $OD.OK = OE^2$ và $BD.DC = OD.DK$.

Bài 5. (1.0 điểm)

Cho hai số dương a, b thỏa $a + \frac{1}{b} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \ge \frac{25}{2}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1 (2.0 điểm).

1. Cho biểu thức $T = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 + \sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}\right)$.

Với $a \ne b; a > 0; b > 0$.

a) Rút gọn biểu thức T.

b) Chứng minh rằng $T > 1$.

2. Cho n là số tự nhiên chẵn, chứng minh rằng $20^n - 3^n + 16^n - 1$ chia hết cho 323.

Lời giải

1. Cho biểu thức $T = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 + \sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}\right)$, với $a \ne b; a > 0; b > 0$

a) Rút gọn biểu thức T. Với $a \ne b; a > 0; b > 0$ ta có

$$T = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 + \sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}\right)$$

$$= \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left[\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+b+\sqrt{ab}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}\right]$$

$$= \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left[\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 - \left(a+b+\sqrt{ab}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right]$$

$$= \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + 1$$

b) Chứng minh rằng $T > 1$.

Với $a \ne b; a > 0; b > 0$ ta có $T = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + 1$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$T = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + 1 \ge 2\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} . \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}} + 1 = 2 - 1 = 1$$

Dấu đẳng thức xẩy khi $a = b$ nhưng vì $a \ne b$ nên dấu đẳng thức không xảy ra được.

Vậy $T > 1$.

2. Cho n là số tự nhiên chẵn, chứng minh rằng $20^n - 3^n + 16^n - 1$ chia hết cho 323.

+ Khi $n = 0$ ta có $20^n - 3^n + 16^n - 1 = 0$ nên chia hết cho 323.

+ Khi $n > 0$. Ta có $20^n - 3^n + 16^n - 1 = \left(20^n - 1\right) + \left(16^n - 3^n\right) = \left(20^n - 3^n\right) + \left(16^n - 1\right)$

Dễ thấy do n là số chẵn nên $20^n - 1 \vdots \left(20 - 1\right) = 19$ và $16^n - 3^n \vdots \left(16 + 3\right) = 19$.

Từ đó ta được $20^n - 3^n + 16^n - 1 \vdots 19$

Lại do n là số chẵn nên $20^n - 3^n \vdots \left(20 - 3\right) = 17$ và $16^n - 3^n \vdots \left(16 + 1\right) = 17$.

Từ đó ta được $20^n - 3^n + 16^n - 1 \vdots 17$.

Mà $\left(17; 19\right) = 1$ nên suy ra $20^n - 3^n + 16^n - 1$ chia hết cho 323.

Vậy $20^n - 3^n + 16^n - 1$ chia hết cho 323 với mọi n là số chẵn.

Bài 2 (2.0 điểm).

1) Giải bất phương trình $3x + 2 \le \sqrt{7x + 8}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y - \frac{4}{x} - \frac{4}{y} = 3 \\ x + y + \frac{6}{x + y} = -5 \end{cases}$

Lời giải

1) Giải bất phương trình $3x + 2 \le \sqrt{7x + 8}$.

Điều kiện xác định của bất phương trình là $7x + 8 \ge 0$.

+ Trường hợp 1. Với $3x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$. Khi đó ta luôn có $3x + 2 \le \sqrt{7x + 8}$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $-\frac{8}{7} \le x < -\frac{2}{3}$.

+ Trường hợp 2. Với $3x + 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\frac{2}{3}$. Khi đó ta luôn có

$$\begin{cases}3x+2\ge 0\\ (3x+2)^2\le 7x+8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{2}{3}\\ 9x^2+5x-4\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{2}{3}\\ -1\le x\le \dfrac{4}{9}\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}\le x\le \dfrac{4}{9}$$

Kết hợp với điều kiện các định ta được $\frac{2}{3}\le x\le \frac{4}{9}$.

Kết hợp các kết quả ta được nghiệm của bất phương trình là $-\frac{8}{7}\le x\le \frac{4}{9}$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y-\dfrac{4}{x}-\dfrac{4}{y}=3\\ x+y+\dfrac{6}{x+y}=-5\end{cases}$

Điều kiện xác định của hệ phương trình là $xy\ne 0; x+y\ne 0$. Biến đổi hệ phương trình ta có

$$\begin{cases}x+y-\dfrac{4}{x}-\dfrac{4}{y}=3\\ x+y+\dfrac{6}{x+y}=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)xy-4(x+y)=3xy\\ (x+y)^2+5(x+y)+6=0\end{cases}$$

Từ phương trình $(x+y)^2+5(x+y)+6=0$ ta được $x+y=-3$ hoặc $x+y=-2$.

+ Với $x+y=-3$, kết hợp với $(x+y)xy-4(x+y)=3xy$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x+y=-3\\ (x+y)xy-4(x+y)=3xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-3\\ xy=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2; y=-1\\ x=-1; y=-2\end{array}\right.$$

+ Với $x+y=-3$, kết hợp với $(x+y)xy-4(x+y)=3xy$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x+y=-2\\ (x+y)xy-4(x+y)=3xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-2\\ xy=\dfrac{8}{5}\end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x;y)=(-2;-1),(-1;-2)$.

Bài 3. (1.0 điểm)

Cho phương trình $(m-1)x^2-2(2m-3)x-5m+25=0$ (m là tham số). Tìm các giá trị m là số nguyên sao cho phương trình có nghiệm là số hữu tỉ.

Lời giải

+ Xét $m=1$ thì phương trình đã cho trở thành $2x+20=0 \Leftrightarrow x=-10$ (thỏa mãn)

+ Xét $m \neq 1$ thì phương trình đã cho là phương trình bậc hai. Khi đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta^{'}=(2m-3)^2-(m-1)(-5m+25)=(3m-7)^2-15$.

Để phương trình đã cho có nghiệm hữu tỉ thì $\Delta^{'}$ là số chính phương. Khi đó ta có tồn tại số nguyên dương k thỏa mãn

$$\Delta^{'}=(3m-7)^2-15=k^2 \Leftrightarrow (3m-7-k)(3m-7+k)=15$$

Mà do k là số nguyên dương nên $3n-7+k>3m-7-k$. Từ đó ta có bảng sau

$3m-7+k$	15	5	-1	-3
$3m-7-k$	1	3	-15	-5
k	7	1	7	1
m	5	$\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
	Nhận	Loại	Loại	Loại

Vậy với $m=1$ và $m=5$ thì phương trình đã cho có nghiệm hữu tỉ.

Bài 4. (4.0 điểm).

1. Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn và $AB \geq BC; BC \geq CA$. Xác định vị trí điểm M thuộc miền tam giác ABC (gồm các cạnh và miền trong tam giác) sao cho tổng khoảng cách từ M đến ba cạnh nhỏ nhất.

2. Cho tam giác ABC (AB < AC) có các góc đều nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC và AD lần lượt tại K và I. Qua F kẻ đường thẳng song song với AC cắt AK, AD lần lượt tại M và N. Gọi O là trung điểm của BC.

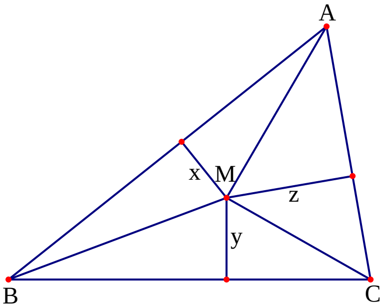
a) Chứng minh rằng DA là phân giác của FDE

b) Chứng minh rằng F là trung điểm MN

c) Chứng minh rằng $OD.OK = OE^2$ và $BD.DC = OD.DK$.

Lời giải

1. Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn và $AB \geq BC; BC \geq CA$. Xác định vị trí điểm M thuộc miền tam giác ABC (gồm các cạnh và miền trong tam giác) sao cho tổng khoảng cách từ M đến ba cạnh nhỏ nhất.



Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh AB, BC và AC. Theo giả thiết thì $AB \ge BC \ge CA$. Do đó ta có

$$S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MCA} \Leftrightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}\left(x.AB + y.BC + z.CA\right) \le \frac{1}{2}\left(x + y + z\right)AB$$

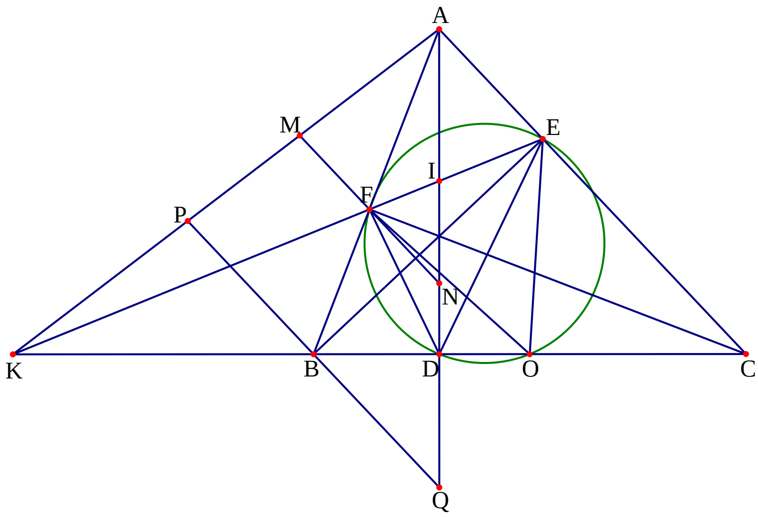
Suy ra $x + y + z \ge \frac{2.S_{ABC}}{AB}$.

+ Nếu $AB > BC$ thì dấu đẳng thức xẩy ra khi M trùng với C

+ Nếu $AB = BC > AC$ thì dấu đẳng thức xẩy ra khi M thuộc cạnh AC

+ Nếu $AB = BC = CA$ thì dấu đẳng thức xảy ra khi M là mọi vị trí bên trong tam giác ABC.

2. Cho tam giác ABC (AB < AC) có các góc đều nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC và AD lần lượt tại K và I. Qua F kẻ đường thẳng song song với AC cắt AK, AD lần lượt tại M và N. Gọi O là trung điểm của BC.



a) Chứng minh DA là phân giác của $\widehat{FDE}$

Tứ giác AFDC nội tiếp đường tròn $BAC = BDF$ và Tứ giác AEDB nội tiếp đường tròn nên $BAC = EDC$. Do đó ta được $BDF = EDC$. Mà FDA và EDA lần lượt phụ với các góc BDF và EDC nên suy ra $FDA = EDA$ hay DA là phân giác của FDE

b) Chứng minh F là trung điểm MN

+ Lời giải 1. Qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt AK và AD theo thứ tự tại P và Q. Khi đó PQ, MN và AC song song với nhau. Ta có $AFE = BFK$ và tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn nên $AFE = ACB$. Mà ta lại có $BHD = ACB$ (vì cùng phụ với HBD) và $BFD = BHD$ (vì tứ giác BFHD nội tiếp). Do đó suy ra $AFE = BFD$ nên FB là phân giác KFD mà FB vuông góc với FC nên FC là phân giác ngoài tại F của tam giác KFD. Từ đó uy ra $\frac{KB}{DB} = \frac{KC}{DC} = \frac{KF}{DF}$ hay $\frac{KB}{KC} = \frac{DB}{DC}$. Ta có BP song song với AC nên theo định lí Thales ta có $\frac{BP}{AC} = \frac{KB}{KC}$. Do BQ song song với AC nên theo định lí Thales ta có $\frac{BQ}{AC} = \frac{DB}{DC}$. Đến đây ta suy ra được $\frac{BP}{AC} = \frac{BQ}{AC}$ nên suy ra $BP = BQ$. Do MN và PQ song song với nhau nên $\frac{MF}{BP} = \frac{AF}{AB} = \frac{NF}{BQ}$, do đó $MF = NF\left(BP = BQ\right)$ hay F là trung điểm của MN.

+ Lời giải 2. Ta có DK vuông góc với DA nên DK là phân giác ngoài tam giác FDE nên $\frac{KF}{KE} = \frac{DF}{DE} = \frac{IF}{IE}$**.** Ta có MN song song với AC nên $\frac{FM}{AE} = \frac{KF}{KE}$ và $\frac{FN}{AE} = \frac{IF}{IE}$. Do đó suy ra $\frac{FM}{AE} = \frac{FN}{AE}$ nên ta được $FM = FN$ hay F là trung điểm của MN.

c) Chứng minh $OD.OK = OE^2$ ***và*** $BD.DC = OD.DK$

+ Chứng minh tương tự ý a) ta có FC là phân giác của DFE nên ta có $DFE = 2CFE$. Tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$ đường kính BC nên $EOC = 2CFE$. Do đó suy ra $DFE = EOC$ nên tứ giác DFEO nội tiếp đường tròn. Do $OE = OF$ nên $OE = OF$ suy ra $EDO = OEF = OEK$. Do đó tam giác ODE đồng dạng với tam giác OEK, suy ra ta được $OD.OK = OE^2$.

+ Tam giác BEC vuông tại E có EO là trung tuyến nên $OE = OB = OC$ nên $OE^2 = OB^2$.

Suy ra ta có

$$\begin{aligned} BD.DC &= (OB - OD)(OC + OD) = OB^2 - OD^2 \\ &= OD.OK - OD^2 = OD(OK - OD) = OD.DK \end{aligned}$$

Bài 5. (1.0 điểm). Cho hai số dương a, b thỏa $a + \frac{1}{b} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

Lời giải

Từ giải thiết ta có $a + \frac{1}{b} = 1 \Leftrightarrow ab + 1 = b \Leftrightarrow ab + 1 = b$.

Ta chứng minh được bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$. Do đó ta có

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} = \frac{\left(1+b+\frac{1}{a}\right)^2}{2} = \frac{\left(1+\frac{ab+1}{a}\right)^2}{2} = \frac{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \geq 4xy$ ta có $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2 \geq 4.\frac{a}{b} \Leftrightarrow 1 \geq 4.\frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \geq 4$ (2)

Kết hợp các kết quả trên ta được $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{2}; b = 2$.

Đề số 13

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH BÌNH ĐỊNH

Chuyên Tin – Năm học 2018 – 2019

Bài 1 (2.0 điểm).

Cho biểu thức $P=\frac{3x+5\sqrt{x}-11}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}+\frac{2}{\sqrt{x}+2}$ với $x\ge 0;\ x\ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị của x nguyên để P nhận giá trị nguyên.

Bài 2 (1.5 điểm).

Cho a và b là bình phương của hai số tự nhiên lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng $ab-a-b+1$ chia hết cho 192.

Bài 3 (2.5 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương phân biệt có tổng bằng 3. Chứng minh rằng trong ba phương trình $x^2-2ax+b=0, x^2-2bx+c=0, x^2-2cx+a=0$ có ít nhất một phương trình có hai nghiệm phân biệt và ít nhất một phương trình vô nghiệm.

Bài 4 (3.0 điểm).

Cho đường tròn tam giác ABC $\left(AB<AC\right)$ có các góc đều nhọn, tiếp nội trong đường tròn tâm O. Đường phân giác tại A của tam giác cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại điểm D khác A. Gọi M và H lần lượt là trung điểm của AD và BC. Đường tròn qua ba điểm A, B, M cắt cạnh AC tại F khác A.

a) Chứng minh rằng $\frac{BD}{BC}=\frac{DM}{CF}$.

b) Chứng minh rằng FH song song với AD.

c) Gọi E là điểm đối xứng với D qua O. Chứng minh rằng EF vuông góc với AC.

Bài 5 (1.0 điểm).

Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x\ge 3; y\ge 2; z\ge 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{xy\sqrt{z-1}+xz\sqrt{y-2}+yz\sqrt{x-3}}{xyz}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1 (2.0 điểm). Cho biểu thức $P=\frac{3x+5\sqrt{x}-11}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}+\frac{2}{\sqrt{x}+2}$ với $x\ge 0; x\ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức P. Với $x\ge 0; x\ne 1$ ta có

$$P=\frac{3x+5\sqrt{x}-11}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}+\frac{2}{\sqrt{x}+2}=\frac{3x+5\sqrt{x}-11-(x-4)+2\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{2x+7\sqrt{x}-9}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{x}+9\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{2\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}+2}$$

Vậy khi $x\ge 0; x\ne 1$ thì ta được $P=\frac{2\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}+2}$.

b) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Khi $x\ge 0; x\ne 1$ thì ta được $P=\frac{2\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}+2}$. Do đó ta có $P=2+\frac{5}{\sqrt{x}+2}$ nên P nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi $\sqrt{x}+2$ là ước của 5 hay $\sqrt{x}+2=5$ vì $\sqrt{x}+2\ge 2$ với $x\ge 0$.

Từ đó ta được $\sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=9$, thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy P có giá trị nguyên khi $x = 9$.

Bài 2 (1.5 điểm). Cho a và b là bình phương của hai số lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng $ab-a-b+1$ chia hết cho 192.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $a=\left(2n-1\right)^2; b=\left(2n+1\right)^2$ với n là một số nguyên dương. Từ đó ta được

$$ab-a-b+1=\left(a-1\right)\left(b-1\right)=\left[\left(2n-1\right)^2-1\right]\left[\left(2n+1\right)^2-1\right]$$
$$=\left(4n^2-4n\right)\left(4n^2+4n\right)=16\left[n\left(n-1\right)\right]\left[n\left(n+1\right)\right]$$

Để ý rằng $\left(n-1\right)n$ và $n\left(n+1\right)$ đều chia hết cho 2. Do đó $ab-a-b+1$ chia hết cho 64.

Ta lại có $\left(n-1\right)n\left(n+1\right)$ chia hết cho 3. Do đó ta lại được $ab-a-b+1$ chia hết cho 3.

Mà 3 và 16 là hai số nguyên tố cùng nhau nên ta được $ab-a-b+1$ chia hết cho 192.

Bài 3 (2.5 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương phân biệt có tổng bằng 3. Chứng minh rằng trong ba phương trình $x^2-2ax+b=0, x^2-2bx+c=0, x^2-2cx+a=0$ có ít nhất một phương trình có hai nghiệm phân biệt và ít nhất một phương trình vô nghiệm.

Lời giải

Xét ba phương trình $\begin{cases} x^2-2ax+b=0 \; (1) \\ x^2-2bx+c=0 \; (2) \\ x^2-2cx+a=0 \; (3) \end{cases}$.

Khi đó ta có $\Delta_1^{'}=a^2-b; \Delta_2^{'}=b^2-c; \Delta_3^{'}=c^2-a$. Kết hợp với $a+b+c=3$ ta được

$$\begin{aligned} 3\left(\Delta_1^{'}+\Delta_2^{'}+\Delta_3^{'}\right) &= 3\left(a^2+b^2+c^2\right)-3(a+b+c) \\ &= (a+b+c)^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-3(a+b+c) \\ &= (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \end{aligned}$$

Do a, b, c phân biệt nên ta có $3\left(\Delta_1^{'}+\Delta_2^{'}+\Delta_3^{'}\right)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$. Như vậy trong ba biệt thức delta trên có ít nhất một biệt thức dương. Do vậy trong các phương trình đã cho có ít nhất một phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Do vai trò của các số a, b, c như nhau nên không mất tính tổn g quát ta giả sử a là số lớn nhất trong ba số a, b, c. Khi đó dễ thấy $a>1; b<1$ hoặc $a>1; c<1$.

Từ đó ta được $\Delta_1^{'}=a^2-b>0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Ta cũng suy ra được $\Delta_2^{'}=b^2-c; \Delta_3^{'}=c^2-a$

+ Nếu $b>c$ thì suy ra $c<1$. Do đó ta có $\Delta_3^{'}=c^2-a<0$. Khi đó phương trình (3) vô nghiệm.

+ Nếu $b<c$ thì suy ra $b<1$. Do đó ta có $\Delta_2^{'}=b^2-c<b-c<0$. Khi đó phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy trong ba phương trình đã cho có ít nhất một phương trình có hai nghiệm phân biệt và ít nhất một phương trình vô nghiệm.

Bài 4 (3.0 điểm). Cho đường tròn tam giác ABC $(AB<AC)$ có các góc đều nhọn, tiếp nội trong đường tròn tâm O. Đường phân giác tại A của tam giác cắt đường tròn (O)

tại điểm D khác A. Gọi M và H lần lượt là trung điểm của AD và BC. Đường tròn qua ba điểm A, B, M cắt cạnh AC tại F khác A.

a) Chứng minh rằng $\frac{BD}{BC}=\frac{DM}{CF}$.

b) Chứng minh rằng FH song song với AD.

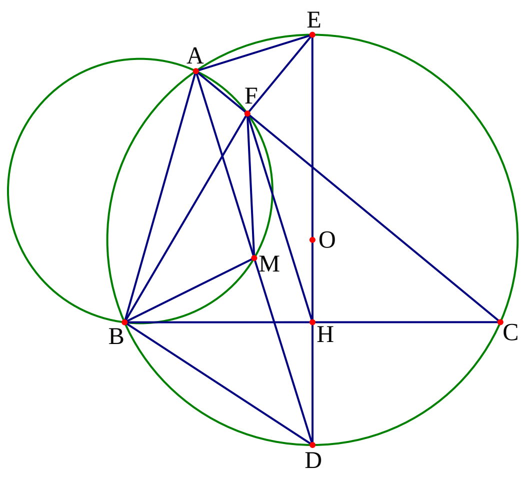
c) Gọi E là điểm đối xứng với D qua O. Chứng minh rằng EF vuông góc với AC.

Lời giải

a) Chứng minh $\frac{BD}{BC}=\frac{DM}{CF}$.

Vì AC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM tại F khác A nên ta có $MBF=MAF$.

Mà ta có $MAF=CBD=\frac{1}{2}sdCD$. Do đó ta được $MBF=CBD$. Hai tam giác MBD và FBC có $MBD=FBC$ và $MDB=FCB$ nên đồng dạng với nhau. Từ đó $\frac{BD}{BC}=\frac{DM}{CF}$.



b) Chứng minh FH song song với AD.

Từ $\frac{BD}{BC}=\frac{DM}{CF}$ ta được $\frac{BD}{2CH}=\frac{\frac{1}{2}DA}{CF}$ hay $\frac{BD}{HC}=\frac{DA}{CF}$ (vì H, M lần lượt là trung điểm của BC và AD). Lại có $BDA=HCF$ nên suy ra hai tam giác BDA và HCF đồng dạng với nhau, do đó suy ra $CFH=DAB$. Mặt khác do H là trung điểm của dây không qua tâm đường tròn (O) nên OH là đường trung trực của đoạn thẳng BC, suy ra

$BD=DC$ nên $DB=DC$ hay $DAB=CAD$. Từ đó kết hợp các kết quả lại ta suy ra được $CFH=CAD$ nên FH song song với AD.

c) Chứng minh EF vuông góc với AC.

Ta có FH song song với AD nên $FHE=ADE$. Lại có $ADE=FCE$ nên ta suy ra được $FHE=FCE$. Từ đó ta được các điểm C, H, F, E cùng thuộc một đường tròn. Mà ta lại có $CHE=90^0$ nên ta được $CFE=CHE=90^0$ hay ta được EF vuông góc với AC.

Bài 5 (1.0 điểm). Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x \ge 3; y \ge 2; z \ge 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{xy\sqrt{z-1} + xz\sqrt{y-2} + yz\sqrt{x-3}}{xyz}$$

Lời giải

Dễ chứng minh được $\frac{1}{a+b} \le \frac{1}{2\sqrt{ab}}$ với a, b là các số thực dương.

Khi đó áp dụng áp dụng bất đẳng thức trên với $x \ge 3; y \ge 2; z \ge 1$ ta có

$$\frac{\sqrt{z-1}}{z} = \frac{1}{\sqrt{z-1} + \frac{1}{\sqrt{z-1}}} \le \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{y-2}}{y} = \frac{1}{\sqrt{y-2} + \frac{2}{\sqrt{y-2}}} \le \frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{x-3}}{x} \frac{1}{\sqrt{x-3} + \frac{3}{\sqrt{x-3}}} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $P \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{12}$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \sqrt{x-3} = \frac{3}{\sqrt{x-3}} \\ \sqrt{y-2} = \frac{2}{\sqrt{y-2}} \\ \sqrt{z-1} = \frac{1}{\sqrt{z-1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{12}$ khi $x = 6; y = 4; z = 2$.

Đề số 14

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH QUẢNG NINH

Năm học 2018 – 2019

Bài 1 (1.5 điểm).

Cho biểu thức $A=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{6}+1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{6}+1}+1}}$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm một phương trình bậc hai ẩn x với hệ số nguyên nhận $A-1$ làm nghiệm.

Bài 2 (2.5 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}-\sqrt{10-x}=0$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2-5}+\sqrt{y^2+4x}=6\\(x+2)^2+y^2=29\end{cases}$

Bài 3 (1.0 điểm).

Chứng minh $4^n-2019n-1$ chia hết cho 9 với mọi số tự nhiên n.

Bài 4 (3.5 điểm).

Cho đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M. Từ M kẻ tiếp tuyến MC với đường tròn (với C là tiếp điểm). Kẻ đường thẳng qua B vuông góc với đường thẳng MC tại D và cắt đường thẳng AC tại E.

a) Chứng minh rằng $CE=CA$.

b) Gọi G là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác COB với đường thẳng MC. Tia CO cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh ba đường thẳng CB, EF, GO đồng quy.

c) Chứng minh rằng $BF+OG>2\sqrt{2}R$.

Bài 5(1.5 điểm).

a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn các điều kiện $\begin{cases}0<a<b<c\\a+b+c=6\\ab+bc+ca=9\end{cases}$.

Chứng minh rằng $a < 1; c < 4$

b) Cho lục giác đều có cạnh bằng 2cm. Bên trong lục giác lấy 13 điểm phân biệt sao cho 3 điểm bất kì không thẳng hàng. Chứng minh tồn tại một tam giác có diện tích không lớn hơn $\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ mà ba đỉnh là ba điểm trong 13 điểm nói trên.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1 (1.5 điểm). Cho biểu thức $A = \dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{6}+1}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{6}+1}+1}}$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm một phương trình bậc hai có ẩn x với hệ số nguyên nhận $A-1$ làm nghiệm.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức A. Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{6}+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{6}+1}+1} = \frac{\left(\sqrt{\sqrt{6}+1}+1\right)-\left(\sqrt{\sqrt{6}+1}-1\right)}{\left(\sqrt{\sqrt{6}+1}+1\right)\left(\sqrt{\sqrt{6}+1}-1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{6}+1}+1-\sqrt{\sqrt{6}+1}+1}{\sqrt{6}+1-1} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Từ đó ta được $A = \dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{6}+1}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{6}+1}+1}} = \dfrac{2}{\dfrac{\sqrt{6}}{3}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

b) Tìm một phương trình bậc hai ẩn x với hệ số nguyên nhận $A-1$ làm nghiệm.

Ta có $A-1=\sqrt{6}-1$. Xét phương trình bậc hai có dạng $x^2+bx+c=0$.

Cho phương trình trên nhận $A-1=\sqrt{6}-1$ làm nghiệm. Khi đó ta có

$$\left(\sqrt{6}-1\right)^2+b\left(\sqrt{6}-1\right)+c=0 \Leftrightarrow 6-2\sqrt{6}+1+b\sqrt{6}-b+c=0 \Leftrightarrow \sqrt{6}\left(b-2\right)+7-b+c=0$$

Khi đó ta chọn b avf c thỏa mãn $\begin{cases} b-2=0 \\ 7-b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=-5 \end{cases}$.

Vậy phương trình bậc hai cần chọn là $x^2+2x-5=0$.

Bài 2 (2.5 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}-\sqrt{10-x}=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2-5}+\sqrt{y^2+4x}=6\\(x+2)^2+y^2=29\end{cases}$

Lời giải

a) Giải phương trình $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}-\sqrt{10-x}=0$.

Điều kiện xác định của phương trình là $\frac{1}{2}\le x\le 10$. Biến đổi phương trình đã cho ta được

$$\left(\sqrt{2x-1}-1\right)+\left(\sqrt{x+3}-2\right)-\left(\sqrt{10-x}-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-2}{\sqrt{2x-1}+1}+\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}-\frac{1-x}{\sqrt{10-x}+3}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{1}{\sqrt{10-x}+3}\right)=0$$

Để ý rằng $\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{1}{\sqrt{10-x}+3}>0$ với mọi $\frac{1}{2}\le x\le 10$.

Do đó từ phương trình trên ta được $x=1$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2-5}+\sqrt{y^2+4x}=6\\(x+2)^2+y^2=29\end{cases}$

Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x^2-5\ge 0; y^2+4x\ge 0$.

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ trên ta được

$$(x+2)^2+y^2=29 \Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2=29 \Leftrightarrow \left(x^2-5\right)+\left(y^2+4x\right)=20$$

Đặt $a=\sqrt{x^2-5}; b=\sqrt{y^2+4x}\,(a\ge 0; b\ge 0)$. Khi đó hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases}a+b=6\\a^2+b^2=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=6\\(a+b)^2-2ab=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=6\\36-2ab=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=6\\ab=8\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2;b=4\\a=4;b=2\end{array}\right.$$

+ Với $a=2;b=4$. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-5}=2\\\sqrt{y^2+4x}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-5=4\\y^2+4x=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=9\\y^2+4x=16\end{cases}$$

Từ đó ta được $(x;y)=(3;2),(3;-2),\left(-3;2\sqrt{7}\right),\left(-3;-2\sqrt{7}\right)$.

+ Với $a=4;b=2$. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-5}=4\\ \sqrt{y^2+4x}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-5=16\\ y^2+4x=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=21\\ y^2+4x=4\end{cases}$$

Từ đó ta được $(x;y)=\left(-\sqrt{21};\sqrt{4+\sqrt{21}}\right),\left(-\sqrt{21};-\sqrt{4+\sqrt{21}}\right)$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được các nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$(x;y)=(3;2),(3;-2),\left(-3;2\sqrt{7}\right),\left(-3;-2\sqrt{7}\right),\left(-\sqrt{21};\sqrt{4+\sqrt{21}}\right),\left(-\sqrt{21};-\sqrt{4+\sqrt{21}}\right)$$

Bài 3 (1.0 điểm). Chứng minh rằng $4^n-2019n-1$ chia hết cho 9 với mọi số tự nhiên n.

Lời giải

Ta có $4^n-2019n-1=\left(4^n-3n-1\right)-2016n$. Ta xét các trường hợp sau.

+ Trường hợp 1. Khi $n=3k$ với k là một số tự nhiên.

Từ đó ta được $4^n-3n-1=4^{3k}-1-9k=64^k-1-9k$

Để ý rằng $64^k-1=(64-1)\left(64^{k-1}+64^{k-2}+...+1\right)$ chia hết cho 9.

Do đó $4^{3k}-1-9k$ chia hết cho 9 nên 4^n-3n-1 chia hết cho 9.

+ Trường hợp 2. Khi $n=3k+1$ với k là một số tự nhiên.

Từ đó ta được $4^n-3n-1=4^{3k+1}-3(3k+1)-1=4\left(64^k-1\right)-9k$

Tương tự như trên ta cũng được 4^n-3n-1 chia hết cho 9.

+ Trường hợp 3. Khi $n=3k+2$ với k là một số tự nhiên.

Từ đó ta được $4^n-3n-1=4^{3k+2}-3(3k+2)-1=16\left(64^k-1\right)-9k+9$

Tương tự như trên ta cũng được 4^n-3n-1 chia hết cho 9.

Vậy với mọi n là số tự nhiên thì 4^n-3n-1 chia hết cho 9.

Do đó $4^n-2019n-1$ chia hết cho 9 với mọi số tự nhiên n.

Bài 4 (3.5 điểm).

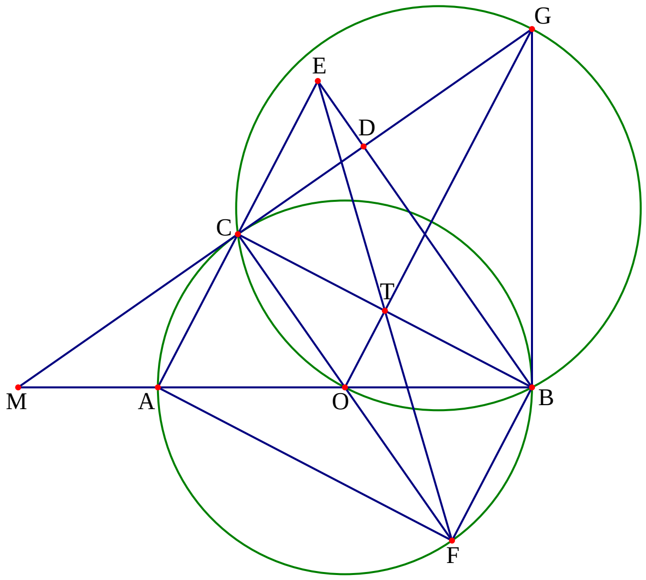
Cho đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M. Từ M kẻ tiếp tuyến MC với đường tròn (O) (C là tiếp điểm). Kẻ đường thẳng qua B vuông góc với đường thẳng MC tại D và cắt đường thẳng AC tại E.

a) Chứng minh rằng $CE=CA$.

b) Gọi G là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác COB với đường thẳng MC. Tia CO cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng ba đường thẳng CB, EF, GO đồng quy.

c) Chứng minh rằng $BF + OG > 2\sqrt{2}R$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng $CE = CA$.

Tam giác OBC cân tại O nên ta có $BCO = CBO$. Do CO và BD cùng vuông góc với MC nên OC song song với BD, do đó ta lại có $CBE = BCO$. Do đó $ABC = CBE$ hay BC là phân giác của góc CBE. Tam giác BAE có BC đồng thời là đường cao và đường phân giác nên tam giác ABE cân tại B. Do đó suy ra C là trung điểm của AE hay $CE = CA$.

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng CB, EF, GO đồng quy.

Tam giác ABE cân tại B nên ta có $BE = AB = CE$. Lại có CF song song với BE nên suy ra tứ giác BECF là hình bình hành. Do đó hai đường chéo BC và EF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Gọi T là giao điểm của hai đường chéo BC và EF, khi đó T là trung điểm của BC. Tứ giác BOCG nối đường tròn nên ta có $OCG + OBG = 180^0$. Do đó suy ra $OBG = 90^0$ nên BG là tiếp tuyến tại B của đường tròn (O). Từ đó G là giao điểm của hai tiếp tuyến CG và BG của đường tròn (O). Từ đó suy ra OG đi qua trung điểm T của BC. Vậy ba đường thẳng CB, EF, GO đồng quy.

c) Chứng minh rằng $BF + OG > 2\sqrt{2}R$.

Dễ thấy OT là đường trung bình của tam giác BCE. Do đó ta được $BF = 2OT$. Do vậy áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$BF + OG = 2OT + OG \ge 2\sqrt{2OT.OG} = 2\sqrt{2.OC^2} = 2R\sqrt{2}$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $2OT = OG$ hay T là trung điểm của OG, khi đó tứ giác BOCG là hình vuông hay CG song song với AB, điều này mâu thuẫn với giả thiết của bài toán. Vậy dấu bằng không xẩy ra. Do vậy ta được $BF + OG > 2\sqrt{2}R$.

Bài 5 (1.5 điểm).

a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn các điều kiện $\begin{cases} 0 < a < b < c \\ a + b + c = 6 \\ ab + bc + ca = 9 \end{cases}$.

Chứng minh rằng $a < 1; c < 4$.

b) Cho lục giác đều có cạnh bằng $2\,cm$. Bên trong lục giác lấy 13 điểm phân biệt sao cho 3 điểm bất kì không thẳng hàng. Chứng minh tồn tại một tam giác có diện tích không lớn hơn $\sqrt{3}\,cm^2$ mà ba đỉnh là ba điểm trong 13 điểm nói trên.

Lời giải

a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 < a < b < c; a + b + c = 6; ab + bc + ca = 9$.

Chứng minh rằng $a < 1; c < 4$.

Từ giả thiết của bài toán ta suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 18$. Mặt khác vì a, b, c là các số dương cho nên

$$9 = ab + bc + ca < a(b + c) + \frac{(b+c)^2}{4} = a(6-a) + \frac{(6-a)^2}{2}$$

Hay $\frac{3a^3}{4} - 3a < 0$, từ đó suy ra $0 < a < 4$, do vậy $0 < a < b < c$

Khi đó $18 = a^2 + b^2 + c^2 < ac + bc + c^2 = c(a + b + c) = 6c$. Suy ra $c > 3$.

+ Bây giờ ta chứng minh $c < 4$.

Thật vậy giả sử $c \ge 4$ khi đó ta được $c^2 \ge 4c$. Từ đây ta suy ra

$$18 = a^2 + b^2 + c^2 > \frac{(a+b)^2}{2} + c^2 > \frac{(6-c)^2}{2} + 4c$$

Hay $\frac{c^2}{2} - 2c < 0 \Leftrightarrow 0 < c < 4$. Mâu thuẫn với $c \ge 4$. Do vậy ta được do vậy $c < 4$

+ Ta chứng minh $a<1$.

Từ trên ta có $3<c<4$. Do đó suy ra $a<b<c<4$.

Giả sử $a \ge 1$. Khi đó ta được $1 \le a<b<c<4$, suy ra

$$(a-1)(a-4) \le 0;\ (b-1)(b-4)<0;\ (c-1)(c-4)<0$$

Hay $a^2 \le 5a-4; b^2<5b-4; c^2<5c-4$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $a^2+b^2+c^2<5(a+b+c)-12=18$

Điều này mâu thuẫn với điều kiện $a^2+b^2+c^2=18$. Do đó $a<1$. Vậy $0<a<1$.

Vậy bài toán được chứng minh hoàn tất.

b) Cho lục giác đều có cạnh bằng 2cm. Bên trong lục giác lấy 13 điểm phân biệt sao cho 3 điểm bất kì không thẳng hàng. Chứng minh tồn tại một tam giác có diện tích không lớn hơn $\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ mà ba đỉnh là ba điểm trong 13 điểm nói trên.

Xét tam giác đều ABC có cạnh bằng 2 cm. Khi đó đường cao $AH=\sqrt{3}$ cm. Từ đó ta được $S_{ABC}=\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}.\sqrt{3}.2=\sqrt{3}\left(cm^2\right)$.

Vẽ các đường chéo của hình lục giác đều, khi đó các đường chéo này này chia lục giác đều thành 6 tam giác đều, mỗi tam giác có cạnh bằng 2 cm. Do có 13 điểm nên theo nguyên lý Dirichlets thì tồn tại ba điểm cùng nằm trong một tam giác. Không mất tính tổng quát ta giả sử ba điểm đó nằm trong tam giác đều ABC có cạnh bằng 2 cm. Khi đó dễ thấy $S \le S_{ABC}=\sqrt{3}$. Vậy bài toán được chứng minh hoàn tất.

Đề số 15

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI

Vòng 2 – Năm học 2018 – 2019

Bài 1. Cho các số x, y không âm thỏa mãn điều kiện $(x+1)(y+1)=2$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{2(x^2+1)(y^2+1)}+2}+xy$$

Bài 2. Cho các số thực không âm x, y, z thay đổi thỏa mãn

$$x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=6$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=x+y+z$.

Bài 3.

a) Cho a, b là hai số nguyên dương phân biệt. Xét biểu thức

$Q=\dfrac{(a+b)^2}{a^3+a^2b-ab^2-b^3}$. Chứng minh rằng Q không thể nhận giá trị nguyên.

b) Cho a, b là các số nguyên dương. Đặt $A=(a+b)^2-2a^2$ và $B=(a+b)^2-2b^2$.

Chứng minh rằng A và B không thể đồng thời là các số chính phương.

Bài 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O).

Đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC cắt các đường thẳng AB và AC theo thứ tự tại D và E. Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC lấy điểm P sao cho AP vuông góc với PC. Đường thẳng qua B vuông góc với OP cắt PC tại Q.

a) Chứng minh rằng $PB=PQ$.

b) Chứng minh rằng O là trực tâm của tam giác ADE.

c) Chứng minh rằng $PAO=QAC$.

Bài 5. Có 45 người tham gia một cuộc họp. Quan sát sự quen nhau giữa họ, người ta thấy rằng: Nếu hai người có số người quen bằng nhau thì lại không quen nhau. Gọi S là số cặp người quen nhau trung cuộc họp (cặp người quen nhau không kể thứ tự sắp xếp giữa hai người trong cặp).

a) Xây dựng ví dụ để $S=870$.

b) Chứng minh rằng $S\le 870$.

Hướng dẫn giải

Bài 1. Cho các số x, y không âm thỏa mãn điều kiện $(x+1)(y+1)=2$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{2(x^2+1)(y^2+1)}+2}+xy$$

Lời giải

Từ $(x+1)(y+1)=2$ ta được $xy+x+y=1$.

Đặt $a=x+y;b=xy$. Khi đó từ giả thiết trên ta thu được $a+b=1$. Biến đổi biểu thức P ta được

$$\begin{aligned}P&=\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{2(x^2+1)(y^2+1)}+2}+xy=\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{2(x^2y^2+x^2+y^2+1)}+2}+xy\\&=\sqrt{(x+y)^2-2xy-\sqrt{2\left[x^2y^2+(x+y)^2-2xy+1\right]}+2}+xy\\&=\sqrt{a^2-2b-\sqrt{2(b^2+a^2-2b+1)}+2}+b=\sqrt{a^2-2b-\sqrt{2(b^2-2b+1)+2a^2}+2}+b\\&=\sqrt{a^2-2b-\sqrt{2(b-1)^2+2a^2}+2}+b=\sqrt{a^2-2b-\sqrt{2a^2+2a^2}+2}+b\\&=\sqrt{a^2-2b-2a+2}+b=\sqrt{a^2-2(a+b)+2}+b=\sqrt{a^2}+b=a+b=1\end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức P là 1.

Bài 2. Cho các số thực không âm x, y, z thay đổi thỏa mãn

$$x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=6$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=x+y+z$.

Lời giải

+ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức Q.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $x^2y^2+1\ge 2xy; y^2z^2+1\ge 2yz; z^2x^2+1\ge 2zx$.

Khi đó ta được $2(xy+yz+zx)\le x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+3$. Từ đó dẫn đến

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\le x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+3$$

Suy ra $(x+y+z)^2\le 9$ hay $Q=x+y+z\le 3$. Dấu đẳng thức xẩy ra khi $x=y=z=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của Q là 3, xẩy ra tại $x=y=z=1$.

+ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $2xy \le x^2 + y^2$.Do x, y, z là các số thực không âm nên ta lại có

$$2xy + x^2y^2 \le x^2 + y^2 + x^2y^2 \le x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 6$$

Do vậy ta có bất đẳng thức $x^2y^2 + 2xy - 6 \le 0$. Đến đây suy ra được

$$xy \le \sqrt{7} - 1 < \sqrt{9} - 1 = 2$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng được $yz < 2; zx < 2$.

Chú ý đến x, y, z không âm thì ta có $2xy \ge x^2y^2; 2yz \ge y^2z^2; 2zx \ge z^2x^2$. Do đó ta có đánh giá $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \ge x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 6$

Hay ta được $Q^2 = (x + y + z)^2 \ge 6$ nên $Q \ge \sqrt{6}$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt{6}; y = z = 0$ và các hoán vị.

Vậy giá trị lớn nhất của Q là $\sqrt{6}$, xẩy ra tại $x = \sqrt{6}; y = z = 0$ và các hoán vị.

Bài 3.

a) Cho a, b là hai số nguyên dương phân biệt. Xét $Q = \dfrac{(a+b)^2}{a^3 + a^2b - ab^2 - b^3}$. Chứng minh rằng Q không thể nhận giá trị nguyên.

b) Cho a, b là các số nguyên dương. Đặt $A = (a+b)^2 - 2a^2$ và $B = (a+b)^2 - 2b^2$. Chứng minh rằng A và B không thể đồng thời là các số chính phương.

Lời giải

a) Chứng minh rằng Q không thể nhận giá trị nguyên.

Ta viết lại biểu thức Q thành $Q = \dfrac{(a+b)^2}{(a-b)(a^2+b^2)}$.

Giả sử Q nhận giá trị nguyên, khi đó $(a+b)^2$ chia hết cho $(a-b)(a^2+b^2)$, suy ra $(a+b)^2$ chia hết cho (a^2+b^2). Để ý rằng $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ nên suy ra $2ab$ chia hết cho $a^2 + b^2$. Do a và b là các số nguyên dương phân biệt nên $2ab \ge a^2 + b^2$. Cũng do a và b là hai số nguyên dương phân biệt nên $2ab = a^2 + b^2 - (a-b)^2 < a^2 + b^2$.

Như vậy ta được hai kết quả mâu thuẫn nhau nên suy ra Q không thể nhận giá trị nguyên.

b) Cho a, b là các số nguyên dương. Đặt $A=(a+b)^2-2a^2$ và $B=(a+b)^2-2b^2$. Chứng minh rằng A và B không thể đồng thời là các số chính phương.

+ Lời giải 1. Ta xét các trường hợp sau.

◦ Trường hợp 1. Cả hai số A và B không phải là số chính phương. Khi đó ta có điều cần chứng minh.

◦ Trường hợp 2. Trong hai số A và B thì chỉ có một số là số chính phương. Khi đó ta có điều cần chứng minh.

◦ Trường hợp 3. Cả hai số A và B cùng là số chính phương. Khi đó tồn tại các số nguyên dương c, d thỏa mãn $(a+b)^2-2a^2=c^2$ và $(a+b)^2-2b^2=d^2$ hay $c^2=b^2+2ab-a^2$ và $d^2=a^2+2ab-b^2$. Để ý rằng $b^2+2ab-a^2+a^2+2ab-b^2=4ab$. Suy ra $c^2=b^2+2ab-a^2$ và $d^2=a^2+2ab-b^2$ có cùng tính chẵn lẻ hay A và B cùng tính chẵn lẻ.

Giả sử trong hai số a và b có một số chẵn và một số lẻ. Không mất tính tổn quát ta giả sử a là số chẵn và b là số lẻ. Khi đó ta có $A=(a+b)^2-2a^2$ là số lẻ và $B=(a+b)^2-2b^2$ là số chẵn. Điều này mâu thuẫn với A, B cùng tính chẵn lẻ. Do đó a và b phải cùng là số chẵn hoặc cùng là số lẻ. Nếu a và b cùng là số lẻ, khi đó dễ thấy $A=(a+b)^2-2a^2$ và $B=(a+b)^2-2b^2$ chia 4 cùng có số dư là 2, điều này mâu thuẫn với A và B là các số chính phương. Do đó a và b là các số nguyên dương chẵn. Đặt $a=2m; b=2n$ với m, n là các số nguyên dương.

Khi đó ta có $c^2=4n^2+8mn-4m^2$ và $d^2=4m^2+8mn-4n^2$. Do đó c, d là các số nguyên dương chẵn. Đặt $c=2c_1; d=2d_1$ với $c_1; d_1$ là các số nguyên dương. Khi đó ta suy ra được $c_1^2=n^2+2mn-m^2$ và $d_1^2=m^2+2mn-n^2$.

Lập luận tương tự như trên ta suy ra được m, n cùng là số chẵn. Từ đó tiếp tục các lập luận tương tự ta được a, b chia hết cho 2^k với k là số nguyên dương bất kì. Do đó suy ra $(a;b)=(0;0)$. Điều này mâu thuẫn với a, b là các số nguyên dương. Do đó trường hợp A và B cùng là số nguyên dương không xẩy ra.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

- **Lời giải 2.** Giả sử tồn tại các số nguyên dương a và b sao cho $(a+b)^2-2a^2$ và $(a+b)^2-2b^2$ là các số chính phương. Trong các cặp số $(a;b)$ như vậy ta xét cặp số có a nhỏ nhất. Đặt $(a+b)^2-2a^2=c^2$ và $(a+b)^2-2b^2=d^2$ với c, d là các số nguyên dương. Khi đó ta có $(a+b)^2-c^2=2a^2$ nên suy ra c và $(a+b)$ cùng tính chẵn lẻ. Điều này dẫn đến $(a+b)^2-c^2=2a^2$ chia hết cho 4, suy ra a chia hết cho 2. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta suy ra được b chia hết cho 2. Do vậy c và d cùng là số chẵn. Từ đó ta có $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)^2-2\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2$ và $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)^2-2\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2$ đều là các số chính phương. Do vậy cặp số $\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$ cũng thỏa mãn yêu cầu bài toán. Điều này mâu thuẫn với cách chọn cặp số $(a;b)$ với a là số bé nhất. Vậy với mọi số nguyên dương a, b thì các số A, B không thể đồng thời là số chính phương.

Bài 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC cắt các đường thẳng AB và AC theo thứ tự tại D và E. Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC lấy điểm P sao cho AP vuông góc với PC. Đường thẳng qua B vuông góc với OP cắt PC tại Q.

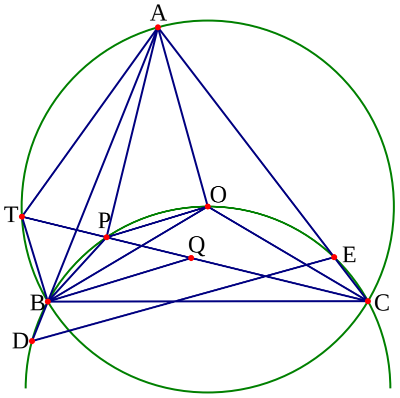
a) Chứng minh rằng $PB=PQ$.

b) Chứng minh rằng O là trực tâm của tam giác ADE.

c) Chứng minh rằng $PAO=QAC$.

Lời giải

a) Chứng minh rằng $PB=PQ$.



Tứ giác BPOC nội tiếp đường tròn nên suy ra $BPQ=BOC$ và do BQ song song với PO nên ta lại có $PQB=QPO=OBC$, do đó suy ra hai tam giác PBQ và OCB đồng dạng với nhau. Mà tam giác OCB cân tại O nên tam giác PBQ cũng cân tại P. Do đó ta được $PB=PQ$.

b) Chứng minh rằng O là trực tâm của tam giác ADE.

Ta có $OBE = OCE = OAC$. Lại có $OBA = OAB$ nên suy ra $EAB = EBA$. Từ đó ta suy ra đươci tam giác EAB cân tại E nên $EA = EB$. Để ý rằng $OA = OB$ nên suy ra OE là đường trùn trực của AB. Do đó ta có OE vuông góc với AB. Chứng minh hoàn toàn tương tự thì ta cũng có OD vuông góc với AB. Do vậy O là trực tâm của tam giác ADE.

c) Chứng minh rằng $PAO = QAC$.

Gọi T là giao điểm thứ hai của CP với đường tròn (O). Ta có $BPC = BOC = 2BTC$ nên ta suy ra được $PT = PB$. Mà ta có $PB = PQ$ nên suy ra $PT = PQ$. Để ý rằng $APQ = 90^0$ nên ta có biến đổi góc

$$PAQ = PAT = 90^0 - ATP = 90^0 - ABC = 90^0 - \frac{1}{2}AOC = OAC$$

Đến đây thì ta suy ra được $PAO = QAC$.

Bài 5. Có 45 người tham gia một cuộc họp. Quan sát sự quen nhau giữa họ, người ta thấy rằng: Nếu hai người có số người quen bằng nhau thì lại không quen nhau. Gọi S là số cặp người quen nhau trung cuộc họp (cặp người quen nhau không kể thứ tự sắp xếp giữa hai người trong cặp).

a) Xây dựng ví dụ để $S = 870$.

b) Chứng minh rằng $S \le 870$.

Lời giải

a) Để ý rằng $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$. Do đó ta chia 45 người thành 9 nhóm với nhóm thứ i có thì có i người $(1 \le i \le 9)$. Ta xét ví dụ mỗi người trong nhóm thứ i đều quen tất các mọi người ở các nhóm còn lại, và không quen bất kì ai trong chính nhóm thứ i. Như vậy mỗi người trong nhóm thứ 1 quen với 44 người khác, nỗi người trong nhóm thứ 2 quen với 43 người khác, …, mỗi người trong nhóm thứ 9 quen với 36 người khác. Nói cách khác thì mỗi người trong nhóm thứ i quen với $45 - i$ người khác. Từ đó ta có $S = \frac{1}{2}(1.44 + 2.43 + 3.42 + ... + 9.36) = 870$.

b) Gọi a_i là số người quen đúng i người khác $(1 \le i \le 44)$. Nếu một người P quen i người thì anh ta không quen ai trong a_i người này, điều này có nghĩa là P quen nhiều nhất $45-a_i$ người, do đó ta được $i \le 45-a_i$ nên suy ra $a_i \le 45-i$. Ta có

$a_1+a_2+...+a_{44}=45$ và

$$S=\frac{1}{2}\left(a_1+2.a_2+3.a_3+...+44.a_{44}\right)\le\frac{1}{2}\left(36a_1+36a_2+...+36a_{36}+37a_{37}+...+44a_{44}\right)$$
$$=\frac{1}{2}.\left[36\left(a_1+a_2+...+a_{36}+a_{37}+...+a_{44}\right)+a_{37}+2a_{38}+...+8a_{44}\right]$$
$$\le\frac{1}{2}\left(36.45+1.8+2.7+...+8.1\right)=870$$

Vậy bài toán được chứng minh hoàn tất.

Đề số 16

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHKHTN HÀ NỘI

Vòng 1 – Năm học 2018 – 2019

Bài 1.

a) Giải phương trình $x^2-x+2\sqrt{x^3+1}=2\sqrt{x+1}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+y^2=1+y \\ x^2+2y^2+2xy=4+x \end{cases}$.

Bài 2.

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $(x+y)(3x+2y)^2=2x+y-1$.

b) Với a, b là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $\sqrt{a+2b}=2+\sqrt{\frac{b}{3}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2a}}$.

Bài 3.

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng DE và M là trung điểm của đoạn thẳng DF.

a) Chứng minh rằng hai tam giác BKM và DEF đồng dạng với nhau.

b) Gọi L là hình chiếu của vuông góc của C trên đường thẳng DF và N là trung điểm của đoạn thẳng DE. Chứng minh rằng hai đường thẳng MK và NL song song với nhau.

c) Gọi J, X lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng KL và ID. Chứng minh rằng đường thẳng JX vuông góc với đường thẳng EF.

Bài 4.

Trên mặt phẳng cho hai điểm P và Q phân biệt. Xét 10 đường thẳng nằm trong mặt phẳng trên thỏa mãn các tính chất sau:

i) Không có hai đường thẳng nào song song hoặc trùng nhau.

ii) Mỗi đường thẳng đi qua P hoặc Q, không có đường thẳng nào đi qua cả P và Q.

Hỏi 10 đường thẳng trên có thể chia mặt phẳng thành tối đa bao nhiêu miền? Hãy giải thích.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

a) Giải phương trình $x^2-x+2\sqrt{x^3+1}=2\sqrt{x+1}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}xy+y^2=1+y\\x^2+2y^2+2xy=4+x\end{cases}$.

Lời giải

a) Giải phương trình $x^2-x+2\sqrt{x^3+1}=2\sqrt{x+1}$.

Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge -1$. Để ý rằng $x^2-x+1>0$.

Đặt $a=\sqrt{x+1};b=\sqrt{x^2-x+1}\left(a\ge 0;b>0\right)$. Khi đó phương trình đã cho được viết lại thành $b^2-1+2ab=2a\Leftrightarrow\left(b-1\right)\left(b+1+2a\right)=0$

Do $a\ge 0;b>0$ nên ta có $b+1+2a>0$. Khi đó từ phương trình trên ta được $b=1$.

Do đó ta có phương trình $x^2-x+1=1\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x\in\left\{0;1\right\}$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{0;1\right\}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}xy+y^2=1+y\\x^2+2y^2+2xy=4+x\end{cases}$.

Hệ phương trình đã cho được viết lại thành $\begin{cases}2xy+2y^2=2+2y\\x^2+2y^2+2xy=4+x\end{cases}$.

Cộng theo vế hai phương trình của hệ phương trình trên ra thu được

$$x^2+4y^2+4xy=6+x+2y\Leftrightarrow\left(x+2y\right)^2=x+2y+6\Leftrightarrow\left(x+2y\right)^2-\left(x+2y\right)-6=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+2y-3\right)\left(x+2y+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2y-3=0\\x+2y+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3-2y\\x=-2y-2\end{array}\right.$$

+ Thế $x=3-2y$ vào phương trình thứ nhất của hệ đã cho ta được

$$y\left(3-2y\right)+y^2=y+1\Leftrightarrow y^2-2y+1=0\Leftrightarrow\left(y-1\right)^2=0\Leftrightarrow y=1$$

Từ đó tương ứng ta được $x=1$.

+ Thế $x=-2y-2$ vào phương trình thứ nhất của hệ đã cho ta được

$$y\left(-2y-2\right)+y^2=y+1\Leftrightarrow y^2+3y+1=0\Leftrightarrow y\in\left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2};\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Từ đó với $y=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ ta được $x=1+\sqrt{5}$ và với $y=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ ta được $x=1-\sqrt{5}$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(x;y)=(1;1),\left(1+\sqrt{5};\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\right),\left(1-\sqrt{5};\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 2.

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $(x+y)(3x+2y)^2=2x+y-1$.

b) Với a, b là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $\sqrt{a+2b}=2+\sqrt{\dfrac{b}{3}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{a}{\sqrt{a+2b}}+\dfrac{b}{\sqrt{b+2a}}$.

Lời giải

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $(x+y)(3x+2y)^2=2x+y-1$.

Để ý rằng $2x+y=(3x+2y)-(x+y)$ nên phương trình đã cho được viết lại thành

$$(x+y)(3x+2y)^2=(3x+2y)-(x+y)-1$$

Đặt $a=x+y;b=3x+2y$. Khi đó ta có $ab^2=b-a-1$ hay $a(b^2+1)=b-1$.

Từ đó suy ra $b-1$ chia hết cho b^2+1. Do đó ta được $b^2+1-(b-1)(b+1)$ chia hết cho b^2+1 hay 2 chia hết cho b^2+1. Suy ra $b^2+1\in\{1;2\}$ nên $b\in\{-1;0;1\}$.

+ Với $b=-1$ ta được $a=-1$, khi đó ta được $(x;y)=(1;-2)$.

+ Với $b=0$ ta được $a=-1$, khi đó ta được $(x;y)=(2;-3)$.

+ Với $b=1$ ta được $a=0$, khi đó ta được $(x;y)=(1;-1)$.

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)=(1;-2),(1;-2),(2;-3)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Với a, b là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $\sqrt{a+2b}=2+\sqrt{\dfrac{b}{3}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{a}{\sqrt{a+2b}}+\dfrac{b}{\sqrt{b+2a}}$.

+ Lời giải 1. Ta sẽ chứng minh $M\ge 2$ với dấu đẳng thức xẩy ra chẳng hạn khi $a=b=3$.

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{b}{\sqrt{b+2a}}=\frac{b\sqrt{3b}}{\sqrt{3b(b+2a)}}\ge\frac{2b\sqrt{3b}}{3b+b+2a}=\frac{b\sqrt{3b}}{a+2b}$$

Như vậy ta cần chỉ ra được $\dfrac{a}{\sqrt{a+2b}}+\dfrac{b\sqrt{3b}}{a+2b}\ge 2$.

Đặt $x=\sqrt{a+2b}; y=\sqrt{\frac{b}{3}} \left(x\ge 0; y\ge 0\right)$. Khi đó giả thiết được viết lại thành $x-y=2$.

Cũng từ trên ta có $b=3y^2; a=x^2-6y$. Bất đẳng thức cần chứng minh trên được viết lại thành $\frac{x^2-6y^2}{x}+\frac{9y^3}{x^2}\ge 2 \Leftrightarrow \frac{x^2-6y^2}{x}+\frac{9y^3}{x^2}\ge x-y$.

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$x\left(x^2-6y^2\right)+9y^3\ge x^2\left(x-y\right) \Leftrightarrow x^3-6xy^2+9y^3\ge x^3-x^2y$$
$$\Leftrightarrow 9y^3-6xy^2+x^2y\ge 0 \Leftrightarrow y\left(9y^2-6xy+x^2\right)\ge 0 \Leftrightarrow y\left(3y-x\right)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng trên luôn đúng. Vậy bài toán được giải quyết hoàn toàn.

+ Lời giải 2. Xét biểu thức $M+\sqrt{\frac{b}{3}}=\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2a}}+\sqrt{\frac{b}{3}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức ta có

$$M+\sqrt{\frac{b}{3}}=\frac{a^2}{a\sqrt{a+2b}}+\frac{b^2}{b\sqrt{b+2a}}+\frac{b^2}{b\sqrt{3b}}\ge \frac{\left(a+b+b\right)^2}{a\sqrt{a+2b}+b\sqrt{b+2a}+b\sqrt{3b}}$$

Áp dụng tiếp bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta lại có

$$b\sqrt{b+2a}+b\sqrt{3b}=b\left(\sqrt{b+2a}+\sqrt{3b}\right)\le b\sqrt{\left(1+1\right)\left(b+2a+3b\right)}=2b\sqrt{a+2b}$$

Từ đó $\frac{\left(a+b+b\right)^2}{a\sqrt{a+2b}+b\sqrt{b+2a}+b\sqrt{3b}}\ge \frac{\left(a+2b\right)^2}{a\sqrt{a+2b}+2b\sqrt{a+2b}}=\frac{a+2b}{\sqrt{a+2b}}=\sqrt{a+2b}$.

Suy ra $M+\sqrt{\frac{b}{3}}\ge \sqrt{a+2b}$ nên $M\ge \sqrt{a+2b}-\sqrt{\frac{b}{3}}=2$. Vậy bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Bài 3. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp $\left(I\right)$ tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng DE và M là trung điểm của đoạn thẳng DF.

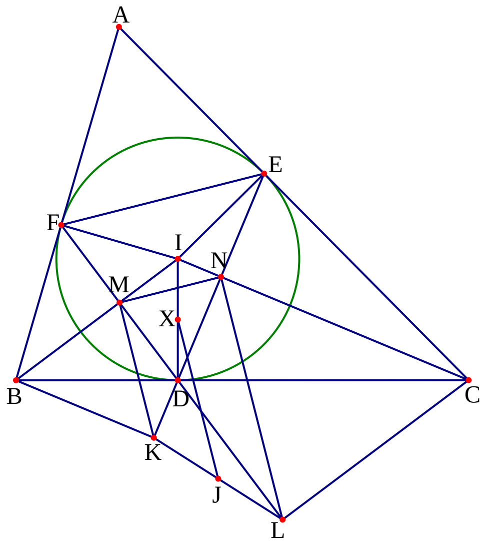
a) Chứng minh rằng hai tam giác BKM và DEF đồng dạng với nhau.

b) Gọi L là hình chiếu của vuông góc của C trên đường thẳng DF và N là trung điểm của đoạn thẳng DE. Chứng minh rằng hai đường thẳng MK và NL song song với nhau.

c) Gọi J, X lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng KL và ID. Chứng minh rằng đường thẳng JX vuông góc với đường thẳng EF.

Lời giải

a) Chứng minh hai tam giác BKM và DEF đồng dạng với nhau.



Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC nên ta có BD và BF là các tiếp tuyến. Do đó BI là đường trung trực của đoạn thẳng DF nên BI vuông góc với DF tại M. Từ đó BMDK nội tiếp đường tròn, do đó $BMK = BDK = CDE$. Cũng do CE là tiếp tuyến với đường tròn (I) tại E nên ta có $CDE = DFE$. Từ đó suy ra $BMK = DFE$. Mặt khác $BKM = BDM = DEF$ nên hai tam giác BKM và DEF đồng dạng.

b) Chứng minh hai đường thẳng MK và NL song song với nhau.

Ta có các tứ giác BKMD và CLDN nội tiếp đường tròn nên suy ra $DMK = DBK$ và $DCN = DLN$. Mặt khác do BK song song với CN nên ta có $DBK = DCN$. Từ đó suy ra $DMK = DLN$ nên MK song song với LN.

c) Chứng minh đường thẳng JX vuông góc với đường thẳng EF.

Ta có $DMK = DCN = 90^0 - CDN = 90^0 - DFE = 90^0 - DMN$, do đó $KMN = 90^0$. Do vậy tứ giác KMNL là hình thang vuông. Ta có J là trung điểm của KL nên J nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng MN hay $JM = JN$. Mặt khác $XM = XN = \frac{1}{2}ID$ nên suy ra X nằm trên đường trung trực của MN. Do đó XJ vuông góc với MN. Trong tam giác DEF thì MN là đường trung bình nên ta có MN song song với EF. Do đó suy ra JX vuông góc với EF

Bài 4. Trên mặt phẳng cho hai điểm P và Q phân biệt. Xét 10 đường thẳng nằm trong mặt phẳng trên thỏa mãn các tính chất sau:

i) Không có hai đường thẳng nào song song hoặc trùng nhau.

ii) Mỗi đường thẳng đi qua P hoặc Q, không có đường thẳng nào đi qua cả P và Q.

Hỏi 10 đường thẳng trên có thể chia mặt phẳng thành tối đa bao nhiêu miền? Hãy giải thích.

Lời giải

Gọi m, n theo thứ tự là số đường thẳng đi qua P và Q. Gọi S số miền được tạo thành. Do mỗi đường thẳng chỉ đi qua điểm P hặc điểm Q nên ta có $m+n=10$. Ta xét các trường hợp sau.

+ Trường hợp 1. Nếu $m=0$ hoặc $n=0$, chẳng hạn $m=0$ thì tất cả 10 đường thẳng đã cho cùng đồng quy tại P. Khi đó dễ thấy số miền được tạo ra trên mặt phẳng là 20. Do đó ta có $S=20$.

+ Trường hợp 2. Nếu $m>0$ và $n>0$, khi đó $m\ge 1$ và $n\ge 1$. Từ mặt phẳng đã cho với hai điểm P và Q ta vẽ thêm m đường thẳng đi qua điểm P, số miền được tạo thành là 2m.

Lần lượt vẽ thêm các đường thẳng đi qua điểm Q. Khi vẽ đường thẳng đầu tiên thì đường thẳng này cắt m đường thẳng đi qua P tại m điểm phân biệt, m điểm phân biệt này chia đường thẳng vừa vẽ thành $m+1$ phần. Nói cách khác thì đường thẳng vừa vẽ đi qua (vì thế chia đôi) đúng $m+1$ miền trong 2m miền được tạo ra. Do đó lúc này số miền được tạo ra là $2m+\left(m+1\right)$.

Kể từ đường thẳng thứ hai đến đường thẳng thứ n đi qua điểm Q thì mỗi đường sẽ cắt m đường thẳng phân biệt đi qua điểm P tại m điểm phân biệt khác Q. Các điểm phân biệt đó cùng với điểm Q chia đường thẳng vừa vẽ thành $m+2$ phần. Do đó mỗi lần vẽ đường thẳng thì số miền tăng thêm $m+2$. Do đó số miền được tao ra từ các đường còn lại đi qua Q là $\left(n-1\right)\left(m+2\right)$. Như vậy ta có

$$S=2m+\left(m+1\right)+\left(n-1\right)\left(m+2\right)=mn+2m+2n-1=mn+2\left(m+n\right)-1=mn+19$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có $mn\le \frac{1}{4}\left(m+n\right)^2=\frac{1}{4}.100=25$.

Từ đó ta được $S\le 25+19=44$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $m=n=5$.

Vậy số miền được tạo ra tối đa là 44 khi số đường thẳng đi qua P là 5 và số đường thẳng đi qua Q là 5.

Đề số 17

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHKHTN HÀ NỘI

Vòng 2 – Năm học 2018 – 2019

Bài 1.

a) Giải phương trình $\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ x^3+y^3+x^3y^3+7(x+1)(y+1)=31 \end{cases}$

b) Giải phương trình $9+3\sqrt{x(3-2x)}=7\sqrt{x}+5\sqrt{3-2x}$.

Bài 2.

a) Cho x, y là các số nguyên sao cho $x^2-2xy-y$ và $xy-2y^2-x$ đều chia hết cho 5. Chứng minh rằng $2x^2+y^2+2x+y$ cũng chia hết cho 5.

b) Cho $a_1;a_2;...;a_{50}$ là các số nguyên thỏa mãn $1 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_{50}$ và $a_1+a_2+...+a_{50}=100$. Chứng minh rằng từ các số đã cho ta có thể chọn được vài số có tổng bằng 50.

Bài 3.

Cho ngũ giác lồi ABCDE nội tiếp đường tròn (O) có CD song song với BE. Hai đường chéo CE và BD cắt nhau tại P. Điểm M thuộc đoạn thẳng BE sao cho $MAB = PAE$. Điểm K thuộc đường thẳng CA sao cho MK song song với AD, điểm L thuộc đường thẳng AD sao cho ML song song với AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC cắt BD, CE lần lượt tại Q, S (Q khác B, S khác C).

a) Chứng minh rằng ba điểm K, M , Q thẳng hàng.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác LDE cắt BD, CE lần lượt tại T, R (T khác D, R khác E). Chứng minh rằng năm điểm M, S, Q, R, T cùng nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác giác PQR tiếp xúc với đường tròn (O).

Bài 4.

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{bc}{b+c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}\right) \le 2$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

a) Giải phương trình $\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ x^3+y^3+x^3y^3+7(x+1)(y+1)=31 \end{cases}$

b) Giải phương trình $9+3\sqrt{x(3-2x)}=7\sqrt{x}+5\sqrt{3-2x}$.

Lời giải

a) Giải phương trình $\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ x^3+y^3+x^3y^3+7(x+1)(y+1)=31 \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho được viết lại thành

$$\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ (x+y)^3-3xy(x+y)+(xy)^3+7(xy+x+y+1)=31 \end{cases}$$

Đặt $a=x+y; b=xy\left(a^2\ge 4b\right)$. Khi đó hệ phương trình đã cho được viết lại thành

$$\begin{cases} ab=2 \\ a^3-3ab+b^3+7(a+b+1)=31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=2 \\ a^3+b^3+7(a+b)-30=0 \end{cases}$$

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ trên và chú ý đến $ab=2$ ta có

$$a^3+b^3+7(a+b)-30=0 \Leftrightarrow (a+b)^3-3ab(a+b)+7(a+b)-30=0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^3-6(a+b)+7(a+b)-30=0 \Leftrightarrow (a+b)^3+(a+b)-30=0$$
$$\Leftrightarrow (a+b-3)\left[(a+b)^2+3(a+b)+10\right]=0 \Leftrightarrow a+b-3=0 \Leftrightarrow a+b=3$$

Vì $(a+b)^2+3(a+b)+10=\left(a+b+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{31}{4}>0$.

Từ đó kết hợp với $ab=2$ và $a^2\ge 4b$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} ab=2 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$.

Từ đó dễ dàng tính được $x=y=1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(1;1)$.

b) Giải phương trình $9+3\sqrt{x(3-2x)}=7\sqrt{x}+5\sqrt{3-2x}$.

Điều kiện xác định của hệ phương trình là $0\le x\le \dfrac{3}{2}$.

Đặt $a=\sqrt{x}; b=\sqrt{3-2x}\,(a\ge 0; b\ge 0)$. Khi đó ta có phương trình $2a^2+b^2=3$.

Phương trình đã cho được viết lại thành $9+3ab=7a+5b$.

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2a^2+b^2=3 \\ 9+3ab=7a+5b \end{cases}$

Kết hợp hai phương trình của hệ phương trình trên ta được

$$9+3ab=7a+5b \Leftrightarrow 2a^2+b^2+3ab+6=7a+5b \Leftrightarrow b^2+(3a-5)b+2a^2-7a+6=0$$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai có ẩn b và tham số a.

Khi đó ta có $\Delta=(3a-5)^2-4(a^2-7a+6)=a^2-2a+1=(a-1)^2\ge 0$.

Do đó phương trình bậc hai có hai nghiệm là $b=2-a$ và $b=3-2a$.

+ Với $b=2-a$ thay vào phương trình thứ hai của hệ trên ta thu được phương trình

$$9+3a(2-a)=7a+5(2-a) \Leftrightarrow 3a^2-4a+1=0 \Leftrightarrow a\in\left\{\frac{1}{3};1\right\}$$

Từ đó ta tính được $x=\frac{1}{9}$ và $x=1$.

+ Với $b=3-2a$ thay vào phương trình thứ hai của hệ trên ta thu được phương trình

$$9+3a(3-2a)=7a+5(3-2a) \Leftrightarrow 6a^2-12a+6=0 \Leftrightarrow (a-1)^2=0 \Leftrightarrow a=1$$

Từ đó ta tính được $x=1$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{1}{9};1\right\}$.

Bài 2.

a) Cho x, y là các số nguyên sao cho $x^2-2xy-y$ và $xy-2y^2-x$ đều chia hết cho 5. Chứng minh rằng $2x^2+y^2+2x+y$ cũng chia hết cho 5.

b) Cho $a_1;a_2;...;a_{50}$ là các số nguyên thỏa mãn $1\le a_1\le a_2\le ...\le a_{50}$ và $a_1+a_2+...+a_{50}=100$. Chứng minh rằng từ các số đã cho ta có thể chọn được vài số có tổng bằng 50.

Lời giải

a) Cho x, y là các số nguyên sao cho $x^2-2xy-y$ và $xy-2y^2-x$ đều chia hết cho 5. Chứng minh rằng $2x^2+y^2+2x+y$ cũng chia hết cho 5.

Ta có $(x^2-2xy-y)+(xy-2y^2-x)=x^2-2y^2-xy-x-y=(x+y)(x-2y+1)$.

Do $x^2-2xy-y$ và $xy-2y^2-x$ chia hết cho 5 nên $(x+y)(x-2y+1)$ chia hết cho 5.

Vì 5 là số nguyên tố nên ta được $x+y$ chia hết cho 5 hoặc $x-2y+1$ chia hết cho 5.

+ Trường hợp 1. Khi $x+y$ chia hết cho 5.

Ta có $x^2-2xy-y=x^2-2xy-2x^2-y-x+2x^2+x=3x^2+x-2x\left(x+y\right)-\left(x+y\right)$.

Do $x^2-2xy-y$ và $x+y$ chia hết cho 5 nên ta được $3x^2+x=x\left(3x+1\right)$ chia hết cho 5, suy ra x chia hết cho 5 hoặc $3x+1$ chia hết cho 5.

◦ Nếu x chia hết cho 5 thì từ $x+y$ chia hết cho 5 ta được y cũng chia hết cho 5.

Do vậy $2x^2+y^2+2x+y$ chia hết cho 5.

◦ Nếu $3x+1$ chia hết cho 5 thì ta được x chia 5 có số dư là 3. Kết hợp với $x+y$ chia hết cho 5 ta suy ra được y chia 5 có số dư là 2. Đặt $x=5m+3; y=5n+2\left(m,n\in Z\right)$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}2x^2+y^2+2x+y&=2\left(5m+3\right)^2+\left(5n+2\right)^2+2\left(5m+3\right)+\left(5n+2\right)\\&=50m^2+30m+18+25n^2+20n+4+10m+6+5n+2\\&=5\left(10m^2+5n^2+8m+5n+6\right)\end{aligned}$$

Do đó suy ra $2x^2+y^2+2x+y$ chia hết cho 5.

+ Trường hợp 2. Khi $x-2y+1$ chia hết cho 5.

Ta có $x^2-2xy-y=x^2-2xy-x+x-y=x\left(x-2y-1\right)+\left(x-2y-1\right)+y+1$

Do $x^2-2xy-y$ và $x-2y-1$ chia hết cho 5 nên ta được $y+1$ chia hết cho 5. Do đó y chia 5 có số dư là 4. Mà $x-2y+1$ chia hết cho 5 nên suy ra x chia 5 có số dư là 4.

Đặt $x=5m+4; y=5n+4\left(m,n\in Z\right)$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}2x^2+y^2+2x+y&=2\left(5m+4\right)^2+\left(5n+4\right)^2+2\left(5m+4\right)+\left(5n+4\right)\\&=50m^2+80m+32+25n^2+40n+16+10m+8+5n+4\\&=5\left(10m^2+5n^2+18m+9n+12\right)\end{aligned}$$

Do đó suy ra $2x^2+y^2+2x+y$ chia hết cho 5.

Vậy bài toán được chứng minh.

b) Cho các số nguyên thỏa mãn $1\le a_1\le a_2\le ...\le a_{50}$ ***và*** $a_1+a_2+...+a_{50}=100$***. Chứng minh rằng từ các số đã cho ta có thể chọn được vài số có tổng bằng 50.***

- **Lời giải 1.** Ta xét các trường hợp sau.

+ Trường hợp 1. Nếu $a_1=a_2=a_3=...=a_{50}$. Khi đó từ $a_1+a_2+a_3+...+a_{50}=100$ ta suy ra được $a_1=a_2=a_3=...=a_{50}=2$. Do vậy ta có $a_1+a_2+a_3+...+a_{25}=50$.

+ Trường hợp 2. Trong các số $a_1;a_2;a_3;...;a_{50}$ tồn tại ít nhất hai số khác nhau. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là a_1 và a_2. Khi đó xét dãy số sau

$$S_1=a_1;S_2=a_2;S_3=a_1+a_2;S_4=a_1+a_2+a_3;...;S_{50}=a_1+a_2+a_3+...+a_{49}$$

Từ $1\le a_1\le a_2\le...\le a_{50}$ ta suy ra được $1\le S_1;S_2<50$ và lại có $0<S_1;S_2;S_3;...;S_{50}<100$.

Đến đây ta thấy có các khả năng sau.

◦ Khả năng 1. Trong các số $S_1;S_2;S_3;...;S_{50}$ có một số chia hết cho 50. Khi đó do $1\le S_1;S_2<50$ nên suy ra tồn tại một số S_i với $2\le i\le 50$ mà S_i chia hết cho 50.

◦ Khả năng 2. Trong các số $S_1;S_2;S_3;...;S_{50}$ không có số nào chia hết cho 50. Khi đó tồn tại hai số trong các số $S_1;S_2;S_3;...;S_{50}$ có cùng số dư khi chia cho 50. Dễ thấy hai số đó không thể đồng thời là S_1 và S_2 vì $1\le S_1;S_2<50$ và $a_1\ne a_2$. Do $1\le S_1;S_2<50$ và $a_1\ne a_2$ nên $S_3-S_1;S_3-S_2$ không chia hết cho 50 nên hai số đó cũng không thể đồng thời là S_1 và S_3 hoặc S_2 và S_3. Từ đó tồn lại hai tổng S_i và S_j với $j>i$ và $j>3$ mà S_i và S_j có cùng số dư khi chia cho 50. Dễ thấy khi đó S_j-S_i chia hết cho 50 và $0<S_j-S_i<100$. Để ý rằng nếu $j=i+1$ thì ta có $0<S_j-S_i=a_i<50$ nên S_j-S_i không chia chia hết cho 50, do đó ta có $j>i+1$. Từ đó ta có $S_j-S_i=a_{i+1}+a_{i+2}+...+a_j$ chia hết cho 50 nên suy ra được $a_{i+1}+a_{i+2}+...+a_j=50$ nên suy ra tồn tại một số S_i với $2\le i\le 50$ mà S_i chia hết cho 50.

Từ các kết quả trên thì ta thấy bài toán được chứng minh.

- **Lời giải 2.** Nếu tồn tại số n với $1\le n\le 50$ thỏa mãn $a_1+a_2+a_3+...+a_n=50$ thì kết luận của bài toán là hiển nhiên đúng.

Ta xét trường hợp ngược lại là tồn tại số n với $1\le n\le 49$ thỏa mãn

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n\le 49 \text{ và } a_1+a_2+a_3+...+a_{n+1}\ge 51$$

Khi đó từ giả thiết ta suy ra được $a_{n+1}\ge 2$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Với $a_{n+1}=2$. Khi đó từ $a_1+a_2+a_3+...+a_n\le 49$ ta suy ra được

$$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+...+a_n=49\\a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}+...+a_{100}=49\end{cases}$$

Ta thấy nếu $n\le 24$ thì do $a_1\le a_{n+2};a_2\le a_{n+3};a_3\le a_{n+4};...;a_n\le a_{2n+1}$ ta suy ra được

$$49=a_1+a_2+a_3+...+a_n\le a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}+...+a_{2n+1}<a_{n+2}+a_{n+3}+...+a_{49}+a_{50}$$

Điều này mâu thuẫn. Do đó $n \geq 25$ nên ta lại có $49 \geq a_1 + a_2 + a_3 + .. + a_n \geq na_1 \geq 25a_1$.

Do đó suy ra $a_1 < 2$ hay $a_1 = 1$ nên $a_2 + a_3 + ... + a_n = 49$ và $a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1} = 50$.

Vậy tồn tại các số $a_2; a_3; a_4; ...; a_n$ thỏa mãn $a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1} = 50$

+ Trường hợp 2. Với $a_{n+1} \geq 3$. Khi đó từ $a_1 + a_2 + ... + a_{50} = 100$ ta có

$$a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + ... + a_{50} = 100 - (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n+1}) \leq 49$$

Do đó $49 \geq (49 - n)a_{n+2} \geq (49 - n)3$ hay ta được $n \geq 33$. Suy ra ta được

$$49 \geq (a_1 + a_2 + ... + a_{16}) + (a_{17} + a_{17} + ... + a_n) \geq 16 + (n - 16)a_{17} \geq 16 + 17a_{17}$$

Do đó $a_{17} < 2$. Mà ta có $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_{17}$ và $a_1; a_2; a_3; ...; a_{17}$ là các số nguyên nên ta có $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_{17} = 1$

◦ Nếu $a_{18} \leq 18$, khi đó đặt $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n+1} = 50 + k$ với $k \in Z; k \geq 1$.

Ta có $18 \geq a_{n+1} \geq (50 + k) - 49 = k + 1$ nên suy ra $k \leq 17$.

Từ đây ta được $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{n+1} = 50$ vì $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_k = 1$

◦ Nếu $a_{18} \geq 19$, khi đó ta có $49 \geq (49 - n)a_{n+2} \geq (49 - n).19$ nên ta được $n \geq 47$.

Từ đó ta có $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_{45} = 1$ vì nếu $a_{45} \geq 2$ thì

$$(a_1 + a_2 + ... + a_{44}) + (a_{45} + a_{46} + ... + a_n) \geq 44 + (n - 44)a_{45} \geq 44 + (n - 44).2 > 49$$

Đặt $a_{n+1} = 50 - k$ với $k \in Z; 0 \leq k \geq 31$.

Khi đó ta có $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + a_{k+1} = 50$ vì $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_k = 1$

Vậy bài toán được chứng minh hoàn tất.

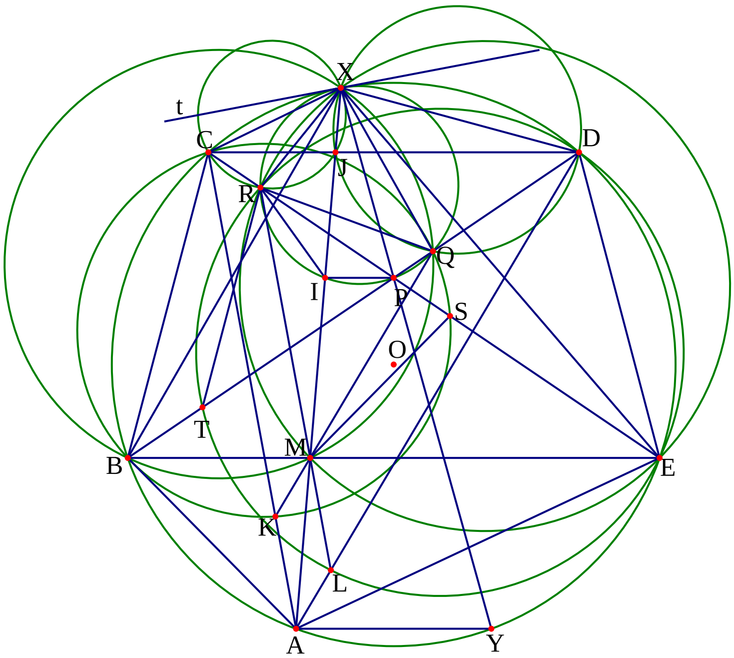
Bài 3. Cho ngũ giác lồi ABCDE nội tiếp đường tròn (O) có CD song song với BE. Hai đường chéo CE và BD cắt nhau tại P. Điểm M thuộc đoạn thẳng BE sao cho $MAB = PAE$. Điểm K thuộc đường thẳng CA sao cho MK song song với AD, điểm L thuộc đường thẳng AD sao cho ML song song với AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC cắt BD, CE lần lượt tại Q, S (Q khác B, S khác C).

a) Chứng minh rằng ba điểm K, M , Q thẳng hàng.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác LDE cắt BD, CE lần lượt tại T, R (T khác D, R khác E). Chứng minh rằng năm điểm M, S, Q, R, T cùng nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với đường tròn (O).

Lời giải



a) Chứng minh ba điểm K, M , Q thẳng hàng.

Do các tứ giác BKQC và ABCD nội tiếp nên ta có $QKC = QBC = DBC = DAC$. Mà ta có MK song song với AD nên $CKM = CAD$. Do đó ta có $QKC = MKC$ nên suy ra ba điểm K, M, Q thẳng hàng.

b) Chứng minh năm điểm M, S, Q, R, T cùng nằm trên một đường tròn.

Do các tứ giác RTED, BCQS và BCDE nội tiếp nên $RTD = CBD = DEC = RSQ$. Do đó tứ giác TSQR nội tiếp đường tròn. Chứng minh hoàn toàn tương tự như trên ta được ba điểm L, M, R thẳng hàng. Để ý đến tứ giác AKML là hình bình hành ta có $RMQ = KML = CAD = DEC = RSQ$ nên tứ giác TMQR nội tiếp đường tròn. Do vậy các điểm R, T, M, S, Q cùng nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với đường tròn (O).

+ Lời giải 1. Từ giác BCDE nội tiếp đường tròn và có BE song song với CD nên tứ giác BCDE là hình thang cân. Ta xét hai trường hợp sau.

◦ Trường hợp 1. Điểm A nằm trên trục đối xứng của hình thang cân BCDE. Khi đó A là điểm chính giữa cung nhỏ BE của đường tròn (O) và P là giao giao điểm hai đường chéo của hình thang BCDE. Gọi X là giao điểm của AP với đường tròn (O) thì AX là đường kính của đường tròn (O) và M nằm trên AX. Ta có $BXA = BCA = BQM$ hay tứ giác BMQX nội tiếp đường tròn nên $BMX = BQX = 90^0$. Hoàn toàn tương tự thì ta được $ERX = EMX = 90^0$. Suy ra tứ giác PQXR nội tiếp đường tròn đường kính PX. Khi đó dễ thấy đường tròn ngoại tiếp của tam giác PRQ và đường tròn (O) tiếp xúc với nhau tại X.

◦ Trường hợp 2. Điểm A không nằm trên trục đối xứng của hình thang BCDE. Giả sử AM, AP cắt đường tròn (O) tại X và Y. Ta có tứ giác BXDA nội tiếp đường tròn và MQ song song với DA nên ta dễ thấy $BXM = BXA = BDA = BQM$ nên tứ giác BXQM nội tiếp đường tròn. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng có tứ giác XRME nội tiếp đường tròn. Đến đây ta có biến đổi góc như sau

$$RXQ = RXM + QXM = REM + QBM = 180^0 - BPE = 180^0 - QPR$$

Suy ra tứ giác PQXR nội tiếp đường tròn. Như vậy ta cần chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR và đường tròn (O) tiếp xúc nhau tại X. Từ $MAB = PAE$ ta suy ra được $BX = EX$ nên XY, CD, BE song song với nhau. Điều này dẫn đến X và Y đối xứng với nhau qua trục đối xứng của hình thang BCDE. Kẻ tiếp tuyến Xt với đường tròn (O). Khi đó ta có $CXt = CDX$. Để ý rằng P nằm trên trục đối xứng của hình thang BCDE, ta có biến đổi góc

$$XPR = XPC = YPD = BYA + YBD = BYA + CBX = BYA + CDX = BYA + CXt$$

Sử dụng tứ giác MEXR nội tiếp đường tròn và chú ý đến AC song song với MR ta có biến đổi góc $CXR = CEX - RXE = CDE - RMB = BCD - ACD = BCA = BYA$

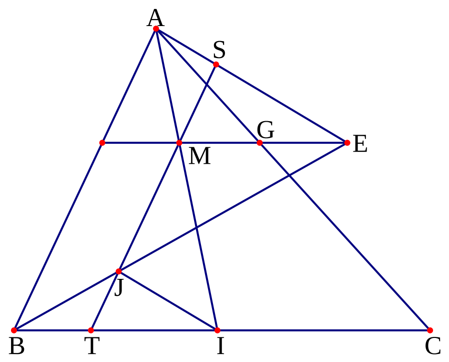
Đến đây thì ta được $XPR = BYA + CXt = CXR + CXt = RXt$ nên Xt cũng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR. Vậy đường tròn ngoại tiếp của tam giác PRQ và đường tròn (O) tiếp xúc với nhau tại X.

+ Lời giải 2. Hoàn toàn tương tự như trên ta chứng minh được khi A nằm trên trục đối xứng của hình thang BCDE thì đường tròn ngoại tiếp của tam giác PRQ và đường tròn (O) tiếp xúc với nhau tại X. ta đi xét trường hợp điểm A không nằm trên trục đối xứng của hình thang ABCD.

Cũng chứng minh tương tự như trên ta được các tứ giác RMEX, PQXR nội tiếp đường tròn. Đồng thời ta cũng có XY, BE, CD song song với nhau. Goi I là giao điểm của AX với đường tròn ngoại tiếp tứ giác PQXR và kẻ Xu là tiếp tuyến tại X với đường tròn (O). Khi đó do XY song song với CD nên tứ giác CDYX là hình thang cân. Mà ta có P nằm trên trục đối xứng của hình thang cân BCDE nên suy ra P cũng nằm trên trục đối xứng của hình thang cân CDYX, suy ra ta được $PX = PY$. Để ý đến các tứ giác nội tiếp đường tròn ta có $RPI = RXI = REB = RCD$ nên suy ra PI song song với CD hay song song với XY. Do Xu là tiếp tuyến tại X của đường tròn (O) nên ta có $YXu = XAY$ và $PXY = PYX = API$. Do đó ta được $XIP = XAY + API = YXu + PXY = PXu$ nên Xu cũng là tiếp tuyến tại X với đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR. Vậy ta có điều phải chứng minh.

+ Lời giải 3. *Trước hết ta phát biểu và chứng minh bài toán phụ:*

Cho tam giác ABC và M là một điểm nằm trên đường thẳng d song song với BC. Lấy E khác M trên đường thẳng d. Gọi I là giao điểm của AM với BC. Đường thẳng qua M song song với AB cắt BE tại J. Khi đó ta có IJ song song với AC.



Chứng minh.

Giả sử MJ cắt AE và AC theo thứ tự tại S và T. Gọi G là giao điểm của AC và ME. Khi đó do MG song song với BC nên ta có $\frac{MA}{MI} = \frac{AG}{CG}$. Gọi P là giao điểm của ME và AB. Khi đó ta có $\frac{MS}{MJ} = \frac{AP}{BP} = \frac{AG}{CG} = \frac{MA}{MI}$. Do vậy AE song song với IJ.

Quay trở lại bài toán. Gọi X, J theo thứ tự là giao điểm của AM với đường tròn (O) và CD (X khác A). Áp dụng **bài toán phụ** trên thì ta có JR song song với AE và JQ song song với AB. Do đó ta có $JRE = AEC = AXC$ nên tứ giác CRJX nội tiếp đường tròn. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có tứ giác DQJX nội tiếp đường tròn. Đến đây ta có $RXJ + JXQ + RPD = 2PCD + CPD = 180^0$ dẫn đến tứ giác RPQX nội tiếp đường tròn. Kẻ tiếp tuyến Xt của đường tròn (O), khi đó ta có

$$tXR = tXA - RXA = ADX - PDC = ADP + MAC = ADP + PAD = APB.$$

Lại có $PEX = MAC = PED$. Gọi Y là giao điểm khác X của XP voi đường tròn (O), khi đó ta có AY, BE và CD song song với nhau nên ta có $PXE = ADP$ dẫn đến $APB = RBX = RQX$ nên ta được $tXR = RQX$ hay Xt là tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR. Do vậy ta có điều cần chứng minh.

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{bc}{b+c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}\right)\le 2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{bc}{b+c}}\le\sqrt{2\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}\right)} \text{ và } \frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}\le\sqrt{2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)}$$

Do vậy $\left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{bc}{b+c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}\right)\le 2\sqrt{\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)}$.

Như vậy phép chứng minh sẽ kết thúc khi ta chỉ ra được

$$\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)\le 1.$$

Để ý rằng $\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)=\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $xy\le\frac{1}{4}(x+y)^2$ ta có

$$\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)\le\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)^2=1$$

Do đó ta có $\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)\le 1$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xẩy ta khi và chỉ khi $a=b=c$.

Đề số 18

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TP HỒ CHÍ MINH

Năm học 2018 – 2019

Bài 1 (1.0 điểm).

Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn $a+b+c=0$ và $a^2=2(a+c+1)(a+b-1)$. Tính giá trị biểu thức $A=a^2+b^2+c^2$.

Bài 2 (2.0 điểm).

a) Giải phương trình $4\sqrt{x+3}=1+4x+\dfrac{2}{x}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^3=1 \\ x^2+y^5=x^3+y^2 \end{cases}$.

Bài 3 (2.0 điểm).

Cho tam giác ABC $(AB<AC)$ vuông góc tại A có đường cao AH. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC.

a) Chứng minh rằng $BE.\sqrt{CH}+CF.\sqrt{BH}=AH.\sqrt{BC}$.

b) Gọi D là điểm đối xứng với B qua H và gọi O là trung điểm của BC. Đường thẳng qua D vuông góc với BC cắt AC tại K. Chứng minh rằng BK vuông góc với AO.

Bài 4 (1.5 điểm).

a) Chứng minh rằng với mội số thực x ta luôn có $x^4-x+\dfrac{1}{2}>0$.

b) Cho x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2-xy+y^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2$.

Bài 5 (1.5 điểm).

Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của BC và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB. Đường thẳng AC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Đường thẳng BK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là L. Các đường thẳng CL và KM cắt nhau tại E. Chứng minh rằng E nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM.

Bài 6 (2.0 điểm)

Các số nguyên dương từ 1 điểm 2018 được tô màu theo quy tắc sau: Các số mà khi chia cho 24 có số dư là 17 được tô màu xanh, các số mà khi chia cho 40 có số dư là 7 được tô màu đỏ, các số còn lại được tô màu vàng.

a) Chứng minh rằng không có số nào được tô cả hai màu xanh và đỏ. Hỏi có bao nhiêu số được tô màu vàng?

b) Có bao nhiêu cặp số $(a;b)$ sao cho a được tô màu xanh và b được tô màu đỏ thỏa mãn điều kiện $|a-b|=2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn $a+b+c=0$ và $a^2=2(a+c+1)(a+b-1)$. Tính giá trị biểu thức $A=a^2+b^2+c^2$.

Lời giải

Do $a+b+c=0$ nên ta có $b+c=-a$ hay $(b+c)^2=a^2$.

Cũng từ $a+b+c=0$ ta được $a+b=-c$ và $a+c=-b$.

Kết hợp với $a^2=2(a+c+1)(a+b-1)$ ta được

$$(b+c)^2=2(1-b)(-c-1) \Leftrightarrow b^2+c^2+2bc=-2(1+c-b-bc)$$
$$\Leftrightarrow b^2+c^2-2b-2c+2=0 \Leftrightarrow (b^2-2b+1)+(c^2-2c+1)=0$$
$$\Leftrightarrow (b-1)^2+(c-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b-1=0 \\ c-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ c=1 \end{cases}$$

Mà ta có $a+b+c=0$ nên suy ra $a=0$. Do vậy $A=a^2+b^2+c^2=2$.

Bài 2 (2.0 điểm).

a) Giải phương trình $4\sqrt{x+3}=1+4x+\dfrac{2}{x}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^3=1 \\ x^2+y^5=x^3+y^2 \end{cases}$.

Lời giải

a) Giải phương trình $4\sqrt{x+3}=1+4x+\dfrac{2}{x}$.

Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge -3$ và $x\ne 0$. Phương trình đã cho được viết lại thành $4x\sqrt{x+3}=4x^2+x+2$. Biến đổi phương trình ta được

$$4x^2+x+3-4x\sqrt{x+3}=1\Leftrightarrow\left(2x+\sqrt{x+3}\right)^2=1$$

Suy ra $2x-\sqrt{x+3}=1$ hoặc $2x-\sqrt{x+3}=-1$.

+ Trường hợp 1. Xét phương trình $2x-\sqrt{x+3}=1$. Biến đổi tương đương ta được

$$2x-1=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\(2x-1)^2=x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\4x^2-5x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{57}}{8}$$

+ Trường hợp 2. Xét phương trình $2x-\sqrt{x+3}=-1$. Biến đổi tương đương ta được

$$2x+1=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\dfrac{1}{2}\\(2x+1)^2=x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\4x^2+3x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{41}}{8}$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là

$$S=\left\{\frac{-3+\sqrt{41}}{8};\frac{5+\sqrt{57}}{8}\right\}$$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^3=1\\x^2+y^5=x^3+y^2\end{cases}$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ phương trình ta được $x^2=1-y^3$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta được $x^2-x^3=y^2-y^5\Leftrightarrow x^2(1-x)=y^2(1-y^3)$.

Thế $x^2=1-y^3$ vào phương trình trên ta được phương trình $x^2(1-x)=x^2y^2$.

Suy ra ta được $x^2=0$ hoặc $1-x=y^2$.

+ Trường hợp 1. Với $x^2=0$ ta được $x=0$. Thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $y=0$. Suy ra hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(0;1)$.

+ Trường hợp 2. Với $1-x=y^2$ ta được $x=1-y^2$, thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $(1-y^2)^2+y^3=1\Leftrightarrow y^2(y-1)(y+2)=0\Leftrightarrow y\in\{-2;0;1\}$

Suy ra hệ phương trình có các nghiệm $(x;y)=(-3;-2),(0;1),(1;0)$.

Vậy hệ phương trình đã cho các các nghiệm là $(x;y)=(-3;-2),(0;1),(1;0)$.

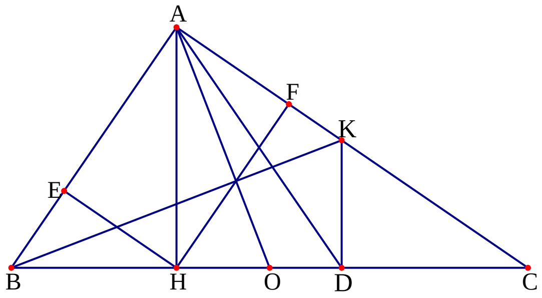
Bài 3 (2.0 điểm).

Cho tam giác ABC $(AB<AC)$ vuông góc tại A có đường cao AH. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC.

a) Chứng minh rằng $BE.\sqrt{CH}+CF.\sqrt{BH}=AH.\sqrt{BC}$.

b) Gọi D là điểm đối xứng với B qua H và gọi O là trung điểm của BC. Đường thẳng qua D vuông góc với BC cắt AC tại K. Chứng minh rằng BK vuông góc với AO.

Lời giải



a) Chứng minh $BE.\sqrt{CH}+CF.\sqrt{BH}=AH.\sqrt{BC}$.

- **Lời giải 1.** Tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao nên $AC^2=CH.CB$, suy ra ta được $\frac{CH}{CB}=\frac{CA^2}{CB^2}$ hay $\frac{CA}{CB}=\sqrt{\frac{CH}{CB}}$. Chứng minh tương tự ta cũng có $\frac{BA}{BC}=\sqrt{\frac{BH}{BC}}$.

Đến đây ta suy ra được $BC.\sqrt{\frac{CH}{CB}}+CF.\sqrt{\frac{BH}{BC}}=\frac{BE.CA+CF.BC}{BC}$. Dễ thấy hai tam giác BEH và BAC đồng dạng với nhau nên $\frac{BE}{BA}=\frac{BH}{BC}$, hai tam giác CFH và CAB đồng dạng với nhau nên $\frac{CF}{CA}=\frac{CH}{CB}$. Đến đây thì ta suy ra được $\frac{BE}{BA}+\frac{CF}{CA}=\frac{BH}{BC}+\frac{CH}{CB}=1$ hay $BE.AC+CF.AB=AB.AC=BC.AH$. Kết hợp các kết quả lại ta được

$BC.\sqrt{\frac{CH}{CB}}+CF.\sqrt{\frac{BH}{BC}}=\frac{BE.CA+CF.BC}{BC}=\frac{BC.AH}{BC}=AH$, điều này dẫn đến

$BE.\sqrt{CH}+CF.\sqrt{BH}=AH.\sqrt{BC}$. Đây chính là kết quả cần chứng minh.

- **Lời giải 2.** Dễ thấy tứ giác AEHF là hình chữ nhật nên $AF=EH$ và $AE=FH$. Ta có

$$BE\sqrt{CH}+CF\sqrt{BH}=AH\sqrt{BC}\Leftrightarrow\left(BE\sqrt{CH}+CF\sqrt{BH}\right)^2=\left(AH\sqrt{BC}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow BE^2.CH+CF^2.BH+2.BE.CF.\sqrt{CH.BH}=AH^2.BC$$

Tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH ta có $AH^2=BH.CH$. Dễ thấy hai tam giác EBH và FHC đồng dạng nên ta có

$$\frac{BE}{FH}=\frac{EH}{FC}=\frac{BH}{HC}\Rightarrow\begin{cases}BE.FC=FH.EH=AE.AF\\EH.HC=FC.BH\\BE.HC=FH.BH\end{cases}$$

Từ đó ta được $\begin{cases} BE^2.CH = BE.FH.BH = BE.AE.HB = HF^2.HB \\ CF^2.BH = CF.EH.HC = CF.AF.HC = HF^2.HC \\ 2BE.CF.\sqrt{CH.BH} = 2.AE.AF.AH \end{cases}$.

Như vậy ta có

$$\begin{aligned} & BE^2.CH + CF^2.BH + 2.BE.CF.\sqrt{CH.BH} = AH^2.BC \\ \Leftrightarrow\ & HE^2.HB + HF^2.HC + 2AE.AF.AH = AH^2.BC \\ \Leftrightarrow\ & \left(AH^2 - HE^2\right).HB + \left(AH^2 - AF^2\right).HC + 2AE.AF.AH = AH^2.BC \\ \Leftrightarrow\ & AH^2.\left(HB + HC\right) - \left(AE^2.HB - 2AE.AF.AH + AF^2.HC\right) = AH^2.BC \\ \Leftrightarrow\ & AH^2.BC - \left(AE^2.HB - 2AE.AF.AH + AF^2.HC\right) = AH^2.BC \\ \Leftrightarrow\ & AE^2.HB - 2.AE.AF.AH + AF^2.HC = 0 \Leftrightarrow AE^2.HB + AF^2.HC = 2AE.AF.AH \end{aligned}$$

Hai tam giác BEH và HEA đồng dạng nên ta có $\dfrac{EH}{EA} = \dfrac{BH}{HA}$ hay $AE.BH = EH.HA$. Hai tam giác AHF và HCF đồng dạng nên ta có $\dfrac{AH}{HC} = \dfrac{AF}{HF}$ hay $AF.HC = AH.HF$.

Từ đó ta được $AE^2.BH + AF^2.HC = AE.AF.HA + AF.AH.AE = 2.AE.AF.AH$

Vậy $BE\sqrt{CH} + CF\sqrt{BH} = AH\sqrt{BC}$.

b) Chứng minh BK vuông góc với AO.

- **Lời giải 1.** Tứ giác ABDK có $BAK + BDK = 180^0$ nên là tứ giác nội tiếp đường tròn. Từ đó $DBK = DAC = 90^0 - BAD = 90^0 - 2BAH = 90^0 - 2ACB = 90^0 - AOB$. Hay ta được $DBK + AOB = 90^0$ nên BK vuông góc với AO.

- **Lời giải 2.** Gọi M là giao điểm của BK và AO. Ta có $BAK + BDK = 180^0$ nên tứ giác ABDK nội tiếp, suy ra $DBK = DAK$. Tam giác BAD cân tại A nên $BAH = HAD$ Do đó $DBK = DAK - BAD = BAC - 2.BAH = BAC - 2.BCA$. Theo tính chất góc ngoài của tam giác và tam giác AOC cân tại O ta có $BOA = OCA + OAC = 2.BCA$. Do đó $DBK = BAC - 2.BCA = 90^0 - BOA$ hay $DBK + BOA = 90^0$. nên BK vuông góc với AO.

Bài 4 (1.5 điểm).

a) Chứng minh rằng với mội số thực x ta luôn có $x^4 - x + \dfrac{1}{2} > 0$.

b) Cho x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2 - xy + y^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2$.

Lời giải

a) Chứng minh rằng với mọi số thực x ta luôn có $x^4 - x + \frac{1}{2} > 0$.

Ta có $\left(2x^2 - 1\right)^2 \ge 0$ và $\left(2x - 1\right)^2 \ge 0$. Cộng theo vế hai bất đẳng thức ta được

$$\left(2x^2 - 1\right)^2 + \left(2x - 1\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 4x^4 - 4x^2 + 1 + 4x^2 - 4x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow 4x^4 - 4x + 2 \ge 0$$

Suy ra ta được $x^4 - x + \frac{1}{2} \ge 0$.

Do $2x^2 - 1 = 0$ và $2x - 1 = 0$ không đồng thời xảy ra nên bất đẳng thức trên không xảy ra dấu bằng.

Do vậy ta có bất đẳng thức $x^4 - x + \frac{1}{2} > 0$. Bài toán được chứng minh.

b) Cho x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2 - xy + y^2 = 3$***. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*** $P = x^2 + y^2$.

Từ giả thiết của bài toán ta có $6 = 2\left(x^2 - xy + y^2\right) = \left(x - y\right)^2 + x^2 + y^2 \ge x^2 + y^2$.

Từ đó ta được $P = x^2 + y^2 \le 6$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{3}.$$

Do đó giá trị lớn nhất của P là 6, đạt được tại $x = y = \sqrt{3}$.

Cũng tứ giả thiết của bài toán ta được

$$6 = 2\left(x^2 - xy + y^2\right) = 3\left(x^2 + y^2\right) - \left(x + y\right)^2 \le 3\left(x^2 + y^2\right).$$

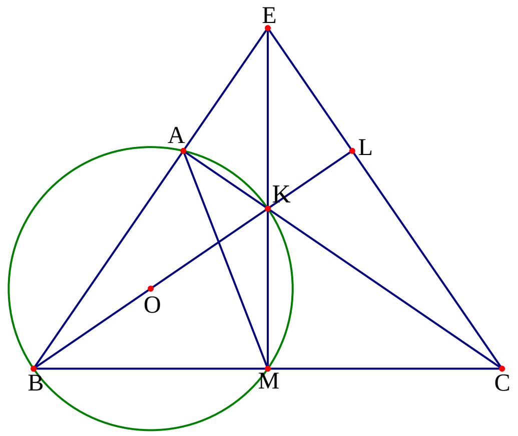
Từ đó ta được $P = x^2 + y^2 \ge 2$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = -y \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y = \pm 1.$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của P là 2, đạt được tại $x = -y = \pm 1$.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của BC và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB. Đường thẳng AC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Đường thẳng BK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là L. Các đường thẳng CL và KM cắt nhau tại E. Chứng minh rằng E nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM.

Lời giải



Tứ giác ABMK nội tiếp đường tròn (O) nên $BMK = 180^0 - BAK = 90^0$. Mặt khác do tứ giác ABCL nội tiếp đường tròn nên ta lại có $BCL = BAC = 90^0$. Do đó ta được $MBK = 90^0 - MCL = MEC$. Lại do tứ giác ABMK nội tiếp đường tròn nên suy ra $MBK = MAK$. Do vậy ta được $MAC = MAK = MEC$ nên tứ giác AMCE nội tiếp đường tròn. Vậy E nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM.

Bài 6 (2.0 điểm)

Các số nguyên dương từ 1 điểm 2018 được tô màu theo quy tắc sau: Các số mà khi chia cho 24 có số dư là 17 được tô màu xanh, các số mà khi chia cho 40 có số dư là 7 được tô màu đỏ, các số còn lại được tô màu vàng.

a) Chứng minh rằng không có số nào được tô cả hai màu xanh và đỏ. Hỏi có bao nhiêu số được tô màu vàng?

b) Có bao nhiêu cặp số $(a;b)$ sao cho a được tô màu xanh và b được tô màu đỏ thỏa mãn điều kiện $|a-b| = 2$.

Lời giải

a) Chứng minh không có số nào được tô cả hai màu xanh và đỏ. Hỏi có bao nhiêu số được tô màu vàng?

+ Nếu số n được tô màu xanh thì số n chia 24 có số dư là 17, khi đó n chia 4 có số dư là 1. Nếu số n được tô màu đỏ thì số n chia 40 có số dư 7, khi đó số n chia 4 có số dư là 3. Mà không thể có số tự nhiên nào khi chia cho 4 có số dư là 1 và 3. Do đó số n không thể chia 4 có số dư là 1 và 3 hay số n không thể được tô cả màu xanh và màu đỏ. Vì vậy không có số nào được tô cả hai màu xanh và đỏ.

+ Các số được tô màu xanh có dạng $n = 24k + 17$ với k là một số nguyên không âm. Do $1 \le n \le 2018$ nên ta suy ra được $1 \le 24k + 17 \le 2018$ nên $0 \le n \le 83$, điều này có nghĩa là có đúng 84 số nguyên dương có dạng $n = 24k + 17\left(k = 0;1;...;83\right)$ hay có đúng 84 số nguyên dương được tô mày xanh. Tương tự thì các số được tô màu đỏ có dạng $n = 40k + 7$ với k là một số nguyên. Do $1 \le n \le 2018$ nên ta suy ra được $1 \le 40k + 7 \le 2018$ nên $0 \le n \le 50$, điều này có nghĩa là có đúng 84 số nguyên dương có dạng $n = 40k + 7\left(k = 0;1;...;50\right)$ hay có đúng 51 số nguyên dương được tô mày đỏ. Như vậy số các số được tô màu vàng là $2018 - 84 - 51 = 1883$.

b) Có bao nhiêu cặp số $\left(a;b\right)$ sao cho a được tô màu xanh và b được tô màu đỏ thỏa mãn $\left|a - b\right| = 2$.

Do a là số nguyên dương được tô màu xanh nên $a = 24p + 17$ với $p \in \left\{0;1;2;...;83\right\}$. Do b là số nguyên dương được tô màu đỏ nên $b = 40q + 7$ với $q \in \left\{0;1;2;...;50\right\}$. Do $\left|a - b\right| = 2$ nên suy ra được $a - b = 2$ hoặc $a - b = -2$.

+ Trường hợp 1. Khi $a - b = 2$ thì ta được $24p - 40q + 10 = 2$ hay $3p = 5q - 1$. Do $0 \le p \le 83$ nên ta được $0 < 5p - 1 \le 249$ hay $1 \le q \le 50$. Mặt khác ta lại có $3p$ chia hết cho 3 nên $5q - 1$ phải chia hết cho 3, suy ra q chia 3 có số dư là 2, do vậy ta được $q \in \left\{2;5;8;...;50\right\}$, điều này có nghĩa là q có thể nhận 17 giá trị khác nhau từ tập hợp $\left\{2;5;8;...;50\right\}$. Từ đó ta thu được 17 giá trị khác nhau của cặp số $\left(a;b\right)$ thỏa mãn $a - b = 2$ là $\left(89;87\right),\left(209;207\right),\left(329;327\right),...,\left(2009;2007\right)$.

+ Trường hợp 2. Khi $a - b = -2$ thì ta được $24p - 40q + 10 = -2$ hay $6p - 10q = 3$, không xảy ra vì vế trái là số chẵn và vế phải là số lẻ. Do đó ta loại trường hợp này.

Vậy có tất cả 17 cặp số $\left(a;b\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đề số 19

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH HÀ NAM

Năm học 2018 – 2019

Bài 1 (2.0 điểm). Cho biểu thức:

$$Q=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right)\sqrt{a^2-2a+1} \text{ với } 0<a<1$$

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) So sánh Q và Q^3.

Bài 2 (2.0 điểm).

a) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{9-x}+3\right)=2x$.

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P) có phương trình $y=x^2$ và hay đường thẳng $(d): y=m; (d'): y=m^2$ với $0<m<1$. Đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A và B, đường thẳng (d') cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt C và D (với hoành độ điểm A và D là số âm). Tìm m để diện tích tứ giác ABCD gấp 9 lần diện tích tam giác OCD.

Bài 3 (1.0 điểm). Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $7^x=3.2^y+1$.

Bài 4 (3.0 điểm). Cho đường tròn (O) và đường thẳng d cố định (đường tròn (O) và đường thẳng d không có điểm chung). Điểm P di động trên đường thẳng d. Từ P vẽ hai tiếp tuyến PA và PB (A và B thuộc đường tròn (O)). Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống đường kính BC. Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng CP và AH. Gọi F là giao điểm thứ hai của đường thẳng CP với đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng E là trung điểm của đoạn thẳng AH.

b) Vẽ dây cung CN của đường tròn (O) sao cho CN song song với AB. Gọi I là giao điểm của NF và AB. Chứng minh rằng $\frac{IF}{IB}=\frac{AF}{AC}$ và $IA=IB$

c) Chứng minh rằng điểm I luôn thuộc một đường cố định khi P di chuyển trên đường thẳng d.

Bài 5 (1.0 điểm). Một học sinh chấm 6 điểm tùy ý phân biệt bên trong một đường tròn có bán kính bằng 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm A, B trong 6 trên điểm thỏa mãn $AB \le 1$.

Bài 6 (1.0 điểm). Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx \ge x + y + z$.

Chứng minh rằng $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} + \dfrac{y^2}{\sqrt{y^3+8}} + \dfrac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \ge 1$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1 (2.0 điểm). Cho biểu thức:

$$Q = \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right)\sqrt{a^2-2a+1} \text{ với } 0<a<1$$

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) So sánh Q và Q^3.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức Q. Với $0<a<1$ ***ta có***

$$Q = \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right)\sqrt{a^2-2a+1}$$

$$= \left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a}\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)}\right].\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}-\frac{1}{a}\right).\sqrt{(1-a)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}.\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}.(1-a) = \frac{\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\right)^2(1-a)}{\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\right)\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)}.\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}$$

$$= \frac{\left[2+2\sqrt{(1-a)(1+a)}\right](1-a)}{(1+a)-(1-a)}.\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a} = \frac{\left(\sqrt{1-a^2}+1\right)\left(\sqrt{1-a^2}-1\right)(1-a)}{a^2}$$

$$= \frac{\left(1-a^2-1\right)(1-a)}{a^2} = \frac{-a^2(1-a)}{a^2} = a-1$$

b) So sánh Q và Q^3.

Xét $Q^3 - Q - (a-1)^3 - (a-1) = (a-1)\left[(a-1)^2-1\right] = (a-1)\left(a^2-2a\right)$.

Do $0<a<1$ nên ta có $a-1<0$ và $a^2-2a = a(a-2) < 0$.

Do đó ta được $(a-1)\left(a^2-2a\right) > 0$ nên $Q^3 - Q > 0 \Leftrightarrow Q^3 > Q$.

- ***Nhận xét.*** *Ta có thể so sánh Q và* Q^3 *theo cách khác như sau.*

Do $0 < a < 1$ *nên suy ra* $-1 < a-1 < 0$. *Do đó suy ra* $a-1 < (a-1)^3$. *Do đó* $Q^3 > Q$.

Bài 2 (2.0 điểm).

a) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{9-x}+3\right)=2x$.

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P) có phương trình $y=x^2$ và hay đường thẳng $(d): y=m; (d'): y=m^2$ với $0<m<1$. Đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A và B, đường thẳng (d') cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt C và D (với hoành độ điểm A và D là số âm). Tìm m để diện tích tứ giác ABCD gấp 9 lần diện tích tam giác OCD.

Lời giải

a) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{9-x}+3\right)=2x$.

Điều kiện xác định của phương trình là $-9 \le x \le 9$.

Đặt $a=\sqrt{x+9}; b=\sqrt{9-x}\ (a,b\ge 0)$. Khi đó ta có $a^2+b^2=18$.

Cũng từ $a^2=\sqrt{x+9}$ ta được $a^2=x+9 \Leftrightarrow a^2-9=x$.

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} a^2+b^2=18 \\ (a-3)(b+3)=2(a^2-9) \end{cases}$.

Biến đổi tương đương phương trình thứ hai của hệ trên ta được

$$(a-3)(b+3)=2(a^2-9) \Leftrightarrow (a-3)(b+3)=2(a-3)(a+3)$$
$$\Leftrightarrow (a-3)(b-2a-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ b=2a+3 \end{array}\right.$$

+ Với $a=3$ ta được $\sqrt{x+9}=3 \Leftrightarrow x=0$.

+ Với $b=2a+3$, thế vào phương trình thứ nhất của hệ trên ta được

$$a^2+(2a+3)^2=18 \Leftrightarrow 5a^2+12a-9=0 \Leftrightarrow a \in \left\{-3; \frac{3}{5}\right\}$$

Do $a \ge 0$ nên ta được $a=\frac{3}{5}$ thỏa mãn. Khi đó ta được $\sqrt{x+9}=\frac{3}{5} \Leftrightarrow x=-\frac{216}{25}$.

Thay vào phương trình đã cho ta được tập nghiệm là $S=\left\{-\frac{216}{25}; 0\right\}$.

b) Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = m$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $x^2 = m \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{m}$. Khi đó tọa độ các giao điểm là $A\left(-\sqrt{m}; m\right)$ và $B\left(\sqrt{m}; m\right)$. Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = m^2$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $x^2 = m^2 \Leftrightarrow x = \pm m$. Khi đó tọa độ các giao điểm là $C\left(-m; m^2\right)$ và $D\left(-m; m^2\right)$. Do $0 < m < 1$ nên suy ra $m^2 < m < \sqrt{m}$. Do m là bằng số nên hai đường thẳng (d) và (d') song song với nhau và cùng trong song với trục hoành. Khi đó ta có $S_{OCD} = \frac{1}{2}.2m.m^2 = m^3$.

Lại có $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(m - m^2\right)\left(2m + 2\sqrt{m}\right) = \left(m - m^2\right)\left(m + \sqrt{m}\right)$.

Theo bài ra ta có $S_{ABCD} = 9.S_{COD}$ nên ta có phương trình

$$\left(m - m^2\right)\left(m + \sqrt{m}\right) = 9m^3 \Leftrightarrow \left(1 + \sqrt{m}\right)\left(1 - m\right) = 9m\sqrt{m}$$
$$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{m} - m - m\sqrt{m} = 9m\sqrt{m} \Leftrightarrow 10m\sqrt{m} + m - \sqrt{m} - 1 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{m}\,(0 < t < 1)$ ta thu được phương trình $10t^3 + t^2 - t - 1 = 0$.

Để ý rằng $0 < t < 1$ thì phương trình trên tương đương với

$(2t - 1)\left(5t^2 + 3t + 1\right) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Từ đó ta được $m = \frac{1}{4}$. Vậy $m = \frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm.

Bài 3 (1.0 điểm). Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $7^x = 3.2^y + 1$.

Lời giải

Ta đi xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1. Với $x = 1$, khi đó ta có phương trình $7 = 3.2^y + 1 \Leftrightarrow 2^y = 2 \Leftrightarrow y = 1$.

+ Trường hợp 2. Với $x = 2$, khi đó ta có phương trình $7^2 = 3.2^y + 1 \Leftrightarrow 2^y = 16 \Leftrightarrow y = 4$.

+ Trường hợp 3. Với $x \geq 3$, khi đi từ phương trình đã cho ta được $y > 5$.

Do đó suy ra 3.2^y chia hết cho 8 nên ta được $7^x - 1$ chia hết cho 8, từ đó suy ra x là số chẵn.

Đặt $x = 2k\left(k \in N, k > 1\right)$. Ta viết lại phương trình đã cho thành

$$7^{2k} = 3.2^y + 1 \Leftrightarrow 7^{2k} - 1 = 3.2^y \Leftrightarrow \left(7^k - 1\right)\left(7^k + 1\right) = 3.2^y$$

Vì $(2;3)=1$ và $7^k-1>3$ nên từ phương trình trên thì tồn tại các số nguyên dương a và b thỏa mãn $a+b=y$ và $7^k-1=3.2^a;7^k+1=2^b$. Ta có

$$2^b-3.2^a=2 \Leftrightarrow 2^a\left(2^{b-a}-3\right)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^a=1;2^{b-a}-3=2 \\ 2^a=2;2^{b-a}-3=1 \end{array}\right. \Rightarrow a=1;b=3$$

Từ đó suy ra ta được $k=1;y=4$, không thỏa mãn.

Vậy cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(1;1),(2;4)$.

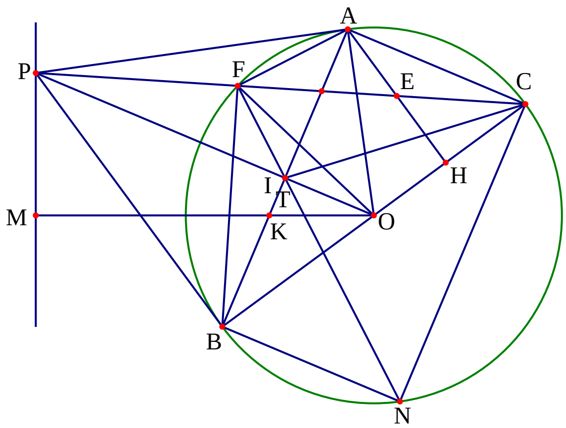
Bài 4 (3.0 điểm). Cho đường tròn (O) và đường thẳng d cố định (đường tròn (O) và đường thẳng d không có điểm chung). Điểm P di động trên đường thẳng d. Từ P vẽ hai tiếp tuyến PA và PB (A và B thuộc đường tròn (O)). Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống đường kính BC. Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng CP và AH. Gọi F là giao điểm thứ hai của đường thẳng CP với đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng E là trung điểm của đoạn thẳng AH.

b) Vẽ dây cung CN của đường tròn (O) sao cho CN song song với AB. Gọi I là giao điểm của NF và AB. Chứng minh rằng $\frac{IF}{IB}=\frac{AF}{AC}$ và $IA=IB$

c) Chứng minh rằng điểm I luôn thuộc một đường cố định khi P di chuyển trên đường thẳng d.

Lời giải



a) Chứng minh E là trung điểm của đoạn thẳng AH.

Gọi T là giao điểm của AB với PO. Dễ thấy $PCA=FAP$ nên hai tam giác PFA và PAC đồng dạng với nhau, do đó ta có $PA^2=PF.PC$. Tam giác PAO vuông tại A có AT là đường cao nên $PA^2=PT.PO$. Do đó suy ra $PF.PC=PT.PO$ hay $\frac{PF}{PT}=\frac{PO}{PC}$ nên suy ra hai tam giác PTF và PCO đồng dạng với nhau. Từ đó ta được $PTF = PCO$ nên tứ giác FIOC nội tiếp đường tròn. Lại do BC là đường kính của đường tròn (O) nên suy ra AB vuông góc với AC, suy ra AC song song với PO. Từ đó ta có biến đổi góc $ACT = CTO = OFC = OCF$ nên ta suy ra được $ECA = TCB$. Dễ thấy hai tam giác vuông AHC và BAC đồng dạng với nhau nên ta có $\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC}$. Hai tam giác AEC và BTC có $ECA = TCB$ và $EAC = TBC$ nên đồng dạng với nhau, suy ra ta có $\frac{AE}{AC} = \frac{BT}{BC}$. Mà dễ thấy T là trung điểm của AB nên suy ra E là trung điểm của AH.

***b) Chứng minh** $\frac{IF}{IB} = \frac{AF}{AC}$ **và** $IA = IB$.*

+ Để ý đến tứ giác nội tiếp đường tròn ta có $IAF = FCB$. Lại do do AB song song với CN nên ta được $IFA = NFC + AFC = NFC + BFN = BFC$, do đó hai tam giác AFI và CFB đồng dạng với nhau. Do đó suy ra $\frac{IF}{AF} = \frac{BF}{CF}$. Chứng minh hoàn toàn tương tự thì ta có hai tam giác NBI và CFB đồng dạng với nhau, do đó ta có $\frac{IB}{BN} = \frac{BF}{CF}$. Kết hợp hai kết quả ta được $\frac{IF}{AF} = \frac{IB}{BN}$ hay $\frac{IF}{IB} = \frac{AF}{BN}$. Do CN song song với AB nên ta có $AC = BN$. Do đó suy ra $\frac{IF}{IB} = \frac{AF}{AC}$.

+ Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có hai tam giác IFA và BFC đồng dạng với nhau nên $\frac{IF}{IA} = \frac{BF}{BC}$. Dễ dàng chứng minh được tam giác PFA đồng dạng với tam giác PAC nên $\frac{AF}{AC} = \frac{PA}{PC}$ và tam giác PFB đồng dạng với PBC nên $\frac{BF}{BC} = \frac{PB}{PC}$. Để ý rằng ta có $PA = PB$ nên $\frac{AF}{AC} = \frac{BF}{BC}$. Kết hợp các kết quả trên ta được $\frac{IF}{IB} = \frac{IF}{IA}$ nên ta được $IA = IB$.

c) Chứng minh điểm I luôn thuộc một đường cố định khi P di chuyển trên đường thẳng d.

Kẻ OM vuông góc với d tại M và gọi K là giao điểm của OM với AB. Dễ thấy P, I, O thẳng hàng và OI vuông góc với AB nên tam giác OIK đồng dạng với tam giác OMP suy ra $OK.OP = OI.OM$ mà $OI.OM = OB^2 = R^2$ nên $OK = \frac{R^2}{OM}$ có giá trị không đổi mà K thuộc OM cố định nên K là điểm cố định. Vì OI vuông góc với MI Và hai điểm O, K cố định nên ta có I thuộc đường tròn đường kính OK cố định.

Bài 5 (1.0 điểm). Một học sinh chấm 6 điểm tùy ý phân biệt bên trong một đường tròn có bán kính bằng 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm A, B trong 6 điểm trên thỏa mãn $AB \le 1$.

Lời giải

Ta đi xét các trường hợp sau:

+ Nếu trong 6 điểm đã cho tồn tại một điểm là tâm của đường tròn, khi đó bài toán được chứng minh.

+ Nếu trong sáu điểm không có điểm nào trùng với tâm của đường tròn. Khi đó có hai khả năng xẩy ra là

- Trong sáu điểm có hai điểm cùng nằm trên một bán kính của đường tròn. Khi đó bài toán được chứng minh.

- Trong sáu điểm đã cho không có hai điểm nào cùng nằm trên một bán kính. Khi đó ta vẽ sáu bán kính đi qua sáu điểm đã cho. Cứ hai bán kính cạnh nhau tao ra một góc ở tâm. Như vậy ta có sáu góc ở tâm. Theo nguyên lí cực hạn thì trong sáu góc đó tồn tại một góc có số đo bé nhất. Mà tổng số đo của sáu góc đó là 360^0 nên góc bé nhất không vượt quá 60^0. Không mất tính tổng quát ta giả sử $AOB \le 60^0$. Suy ra trong tam giác AOB thì cạnh AB không phải là cạnh lớn nhất. Do đó ta có $AB \le 1$.

Bài 6 (1.0 điểm). Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx \ge x + y + z$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \ge 1$$

Lời giải

Do x, y, z là các số dương nên từ giả thiết ta có đánh giá

$$xy + yz + zx \ge x + y + z \Leftrightarrow (xy + yz + zx)^2 \ge (x + y + z)^2$$

Để ý rằng $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$ nên suy ra $(xy+yz+zx)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$.

Do vậy ta có $xy + yz + zx \ge 3$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức ta có $\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \ge \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{x^3+8} + \sqrt{y^3+8} + \sqrt{z^3+8}}$

Để ý rằng ta có biến đổi $\sqrt{x^3+8} = \sqrt{x+2}.\sqrt{x^2-2x+4}$. Khi đó hoàn toàn tương tự và áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\left(\sqrt{x+2}.\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{y+2}.\sqrt{y^2-2y+4}+\sqrt{z+2}.\sqrt{z^2-2z+4}\right)^2$$
$$\le\left(x+2+y+2+z+2\right)\left(x^2-2x+4+y^2-2y+4+z^2-2z+4\right)$$
$$=\left(x+y+z+6\right)\left[x^2+y^2+z^2-2\left(x+y+z\right)+12\right]$$

Do vậy $\sqrt{x^3+8}+\sqrt{y^3+8}+\sqrt{z^3+8}\le\sqrt{\left(x+y+z+6\right)\left[x^2+y^2+z^2-2\left(x+y+z\right)+12\right]}$.

Từ đó dẫn đến

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\ge\frac{\left(x+y+z\right)^2}{\sqrt{\left(x+y+z+6\right)\left[x^2+y^2+z^2-2\left(x+y+z\right)+12\right]}}.$$

Do đó ta cần chứng được $\dfrac{\left(x+y+z\right)^2}{\sqrt{\left(x+y+z+6\right)\left[x^2+y^2+z^2-2\left(x+y+z\right)+12\right]}}\ge 1$.

Hay ta cần chỉ ra $\left(x+y+z\right)^2\ge\sqrt{\left(x+y+z+6\right)\left[x^2+y^2+z^2-2\left(x+y+z\right)+12\right]}$.

Thật vậy để ý đến giả thiết $xy+yz+zx\ge x+y+z$ và $xy+yz+zx\ge 3$ ta có

$$2\sqrt{\left(x+y+z+6\right)\left[x^2+y^2+z^2-2\left(x+y+z\right)+12\right]}$$
$$\le 2\sqrt{\left(2xy+2yz+2zx+3\right)\left[x^2+y^2+z^2-2\left(x+y+z\right)+12\right]}$$
$$\le 2xy+2yz+2zx+3+x^2+y^2+z^2-2\left(x+y+z\right)+12=\left(x+y+z\right)^2-2\left(x+y+z\right)+15$$

Như vậy phép chứng minh sẽ kết thúc khi ta chỉ ra được

$$2\left(x+y+z\right)^2\ge\left(x+y+z\right)^2-2\left(x+y+z\right)+15$$
$$\Leftrightarrow\left(x+y+z\right)^2+2\left(x+y+z\right)-15\ge 0\Leftrightarrow\left(x+y+z-3\right)\left(x+y+z+5\right)\ge 0$$

Do x, y, z là các số dương và $x+y+z\ge\sqrt{3\left(xy+yz+zx\right)}=3$ nên bất đẳng thức cuối cùng trên đúng.

Vậy bài toán được chứng minh. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Đề số 20

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH HẢI DƯƠNG

Năm học 2018 – 2019

Câu 1 (2.0 điểm).

1) Cho $x=a+1-\sqrt{1+a^2+\dfrac{a^2}{(a+1)^2}}$ với $a>0$ và $P=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}+1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

Rút gọn biểu thức P theo a.

2) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z+\sqrt{xyz}=4$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x(4-y)(4-z)}+\sqrt{y(4-z)(4-x)}+\sqrt{z(4-x)(4-y)}-\sqrt{xyz}=8$$

Câu 2 (2.0 điểm).

1) Giải phương trình $2(x+1)\sqrt{x+\dfrac{3}{x}}=x^2+7$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x^2+xy-4x+2y=2\\ x(x+1)+y(y+1)=4\end{cases}$

Câu 3 (2.0 điểm).

1) Đặt $N=a_1+a_2+a_3+...+a_{2017}+a_{2018}$ và $M=a_1^5+a_2^5+a_3^5+...+a_{2017}^5+a_{2018}^5$, trong đó $a_1;a_2;a_3;...;a_{2018}$ là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu N chia hết cho 30 thì M chia hết cho 30.

2) Tìm tất cả số tự nhiên n và k để n^8+4^{2k+1} là số nguyên tố.

Câu 4 (3.0 điểm).

Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính BC. Gọi A là điểm di động trên nửa đường tròn (A khác B, C). Kẻ AD vuông góc với VC (D thuộc BC) sao cho đường tròn đường kính AD cắt AB, AC và nửa đường tròn (O) lần lượt tại E, F, G (G khác A). Đường thẳng AG cắt BC tại H.

1) Tính $\dfrac{AD^3}{BE.CF}$ theo R và chứng minh rằng ba điểm H, E, F thẳng hàng

2) Chứng minh rằng $FG.CH+GH.CF=CG.HF$.

3) Trên BC lấy M cố định (M khác B, C). Gọi N, P lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB và MAC. Xác định vị trí của A để diện tích tam giác MNP nhỏ nhất.

Câu 5. (1.0 điểm).

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}-a^2-28b^2-28c^2$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1 (2.0 điểm).

1) Cho $x=a+1-\sqrt{1+a^2+\frac{a^2}{(a+1)^2}}$ với $a>0$ và $P=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}+1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

Rút gọn biểu thức P theo a.

2) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z+\sqrt{xyz}=4$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x(4-y)(4-z)}+\sqrt{y(4-z)(4-x)}+\sqrt{z(4-x)(4-y)}-\sqrt{xyz}=8$$

Lời giải

1) Rút gọn biểu thức P theo a.

Với $a>0$ ta có

$$x=a+1-\sqrt{1+a^2+\frac{a^2}{(a+1)^2}}=a+1-\frac{\sqrt{(1+a^2)(a+1)^2+a^2}}{a+1}$$

$$=a+1-\frac{\sqrt{(a^2+a)^2+(a+1)^2+a^2}}{a+1}=\frac{(a+1)^2-\sqrt{(a^2+a)^2+2(a^2+a)+1}}{a+1}$$

$$=\frac{(a+1)^2-\sqrt{(a^2+a+1)^2}}{a+1}=\frac{(a+1)^2-(a^2+a+1)}{a+1}=\frac{a}{a+1}$$

Điều kiện xác định của biểu thức P là $x\ge 0; x\ne 1$. Biểu thức P được viết lại thành

$$P=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}+1}{\sqrt{x^2-2x+1}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}+1}{\sqrt{(x-1)^2}}=\frac{\sqrt{x}-|\sqrt{x}-1|+1}{|x-1|}$$

Để ý rằng với $a>0$ và $x=\frac{a}{a+1}$ thì ta được $0<x<1$. Khi đó ta được

$$P=\frac{\sqrt{x}-\left|\sqrt{x}-1\right|+1}{\left|x-1\right|}=\frac{\sqrt{x}-\left(1-\sqrt{x}\right)+1}{1-x}=\frac{2\sqrt{x}}{1-x}=\frac{2\sqrt{\frac{a}{a+1}}}{1-\frac{a}{a+1}}=\frac{2\sqrt{\frac{a}{a+1}}}{\frac{1}{a+1}}=2\sqrt{a^2+a}$$

2) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z+\sqrt{xyz}=4$. *Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{x\left(4-y\right)\left(4-z\right)}+\sqrt{y\left(4-z\right)\left(4-x\right)}+\sqrt{z\left(4-x\right)\left(4-y\right)}-\sqrt{xyz}=8$$

Ta có $x+y+z+\sqrt{xyz}=4\Leftrightarrow 4\left(x+y+z\right)+4\sqrt{xyz}=16$. Khi đó ta có

$$\sqrt{x\left(4-y\right)\left(4-z\right)}=\sqrt{x\left(16-4y-4z+yz\right)}=\sqrt{x\left(yz+4\sqrt{xyz}+4x\right)}$$
$$=\sqrt{x}.\sqrt{\left(\sqrt{yz}+2\sqrt{x}\right)^2}=\sqrt{xyz}+2x$$

Tương tự $\sqrt{y\left(4-z\right)\left(4-x\right)}=\sqrt{xyz}+2y;\sqrt{z\left(4-x\right)\left(4-y\right)}=\sqrt{xyz}+2z$. Từ đó ta được

$$\sqrt{x\left(4-y\right)\left(4-z\right)}+\sqrt{y\left(4-x\right)\left(4-z\right)}+\sqrt{z\left(4-x\right)\left(4-y\right)}-\sqrt{xyz}$$
$$=2\left(x+y+z+\sqrt{xyz}\right)=2.4=8$$

Bài toán được chứng minh.

Câu 2 (2.0 điểm).

1) Giải phương trình $2\left(x+1\right)\sqrt{x+\frac{3}{x}}=x^2+7$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x^2+xy-4x+2y=2\\x\left(x+1\right)+y\left(y+1\right)=4\end{cases}$

Lời giải

1) Giải phương trình $2\left(x+1\right)\sqrt{x+\frac{3}{x}}=x^2+7$.

Điều kiện xác định của phương trình là $x>0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2\left(x+1\right)\sqrt{x^2+3}=\left(x^2+7\right)\sqrt{x}\Leftrightarrow 2\left(x+1\right)\sqrt{x^2+3}=\left(x^2+3+4\right)\sqrt{x}$$

Đặt $a=\sqrt{x};b=\sqrt{x^2+3}\left(a\ge 0;b>0\right)$. Khi đó phương trình trên được viết lại thành

$$2\left(a^2+1\right)b=\left(b^2+4\right)a\Leftrightarrow 2a^2b+2b=ab^2+4a\Leftrightarrow 2a^2b-ab^2+2b-4a=0$$
$$\Leftrightarrow ab\left(2a-b\right)-2\left(2a-b\right)=0\Leftrightarrow\left(ab-2\right)\left(2a-b\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}ab=2\\2a=b\end{array}\right.$$

+ Với $ab=2$ ta có phương trình $\sqrt{x}.\sqrt{x^2+3}=2$ hay ta được

$$x\left(x^2+3\right)=4 \Leftrightarrow x^3+3x-4=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+4\right)=0 \Leftrightarrow x=1$$

+ Với $2a=b$ ta có phương trình $\sqrt{x}=\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow x=x^2+3 \Leftrightarrow x^2-x+3=0$, vô nghiệm.

. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=1$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2+xy-4x+2y=2 \\ x(x+1)+y(y+1)=4 \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho được viết lại thành $\begin{cases} 3x^2+xy-4x+2y-2=0 \\ x^2+y^2+x+y-4=0 \end{cases}$.

Lấy hiệu theo vế hai phương trình của hệ trên thì ta được

$$2x^2-y^2+xy-5x+y+2=0 \Leftrightarrow 2x^2+(y-5)x-y^2+y+2=0$$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai có ẩn x và tham số y. Khi đó ta có

$$\Delta=(y-5)^2-4.2\left(-y^2+y+2\right)=9y^2-18y+9=(3y-3)^2 \ge 0$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm là $x=2-y$ và $x=\dfrac{y+1}{2}$ hay ta được $x=2-y$ và $y=2x-1$.

+ Với $x=2-y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta có phương trình

$$(2-y)^2+y^2+(2-y)+y-4=0 \Leftrightarrow 2y^2-4y+2=0 \Leftrightarrow (y-1)^2=0 \Leftrightarrow y=1$$

Từ đó ta được $x=1$ nên $(x;y)=(1;1)$ là một nghiệm của hệ phương trình.

+ Với $y=2x-1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta có phương trình

$$x^2+(2x-1)^2+x+(2x-1)-4=0 \Leftrightarrow 5x^2-x-4=0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{4}{5};1\right\}$$

Từ đó ta được tương ứng ta được $(x;y)=\left(-\frac{4}{5};-\frac{13}{5}\right)(1;1)$ là các nghiệm của hệ phương trình.

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là $(x;y)=\left(-\frac{4}{5};-\frac{13}{5}\right)(1;1)$.

Câu 3 (2.0 điểm).

1) Đặt $N=a_1+a_2+a_3+...+a_{2017}+a_{2018}$ và $M=a_1^5+a_2^5+a_3^5+...+a_{2017}^5+a_{2018}^5$, trong đó $a_1;a_2;a_3;...;a_{2018}$ là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu N chia hết cho 30 thì M chia hết cho 30.

2) Tìm tất cả số tự nhiên n và k để n^8+4^{2k+1} là số nguyên tố.

Lời giải

1) Đặt $N=a_1+a_2+a_3+...+a_{2017}+a_{2018}$ ***và*** $M=a_1^5+a_2^5+a_3^5+...+a_{2017}^5+a_{2018}^5$, ***trong đó*** $a_1;a_2;a_3;...;a_{2018}$ ***là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu N chia hết cho 30 thì M chia hết cho 30.***

Với a là số tự nhiên ta có

$$\begin{aligned}a^5-a&=a(a-1)(a+1)(a^2+1)=a(a-1)(a+1)(a^2-4+5)\\&=a(a-1)(a+1)(a^2-4)+5a(a-1)(a+1)\\&=a(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)+5a(a-1)(a+1)\end{aligned}$$

Để ý rằng $(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$ và $5(a-1)a(a+1)$ chia hết cho 2, 3 và 5. Mà ta có 2, 3, 5 nguyên tố với nhau theo từng đôi một nên ta có $(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$ và $5(a-1)a(a+1)$ chia hết cho 30. Do vậy a^5-a chia hết cho 30. Ta có

$$\begin{aligned}M-N&=\left(a_1^5+a_2^5+a_3^5+...+a_{2017}^5+a_{2018}^5\right)-\left(a_1+a_2+a_3+...+a_{2017}+a_{2018}\right)\\&=\left(a_1^5-a_1\right)+\left(a_2^5-a_2\right)+\left(a_3^5-a_3\right)+...+\left(a_{2018}^5-a_{2018}\right)\end{aligned}$$

Áp dụng cách chứng minh như trên ta có $\left(a_1^5-a_1\right);\left(a_2^5-a_2\right);\left(a_3^5-a_3\right);...;\left(a_{2018}^5-a_{2018}\right)$ cùng chia hết cho 30. Do vậy $M-N$ chia hết cho 30. Mà ta có N chia hết cho 30 nên suy ra M chia hết cho 30.

2) Tìm tất cả số tự nhiên n và k để n^8+4^{2k+1} ***là số nguyên tố.***

Đặt $P=n^8+4^{2k+1}$. Khi đó ta có biến đổi sau

$$\begin{aligned}P&=n^8+4^{2k+1}=\left(n^4\right)^2+4.\left(4^k\right)^2=\left(n^4\right)^2+4.\left(4^k\right)^2+4.n^4.4^k-\left(2.n^2.2^k\right)^2\\&=\left(n^4+2.4^k\right)^2-\left(2.n^2.2^k\right)^2=\left(n^4+2.4^k-2.n^2.2^k\right)\left(n^4+2.4^k+2.n^2.2^k\right)\end{aligned}$$

Do n và k là các số tự nhiên nên ta có $n^4+2.4^k-2.n^2.2^k\le n^4+2.4^k+2.n^2.2^k$.

Do đó để P là số nguyên tố thì ta cần có

$n^4+2.4^k-2.n^2.2^k=1\Leftrightarrow n^4-2^{k+1}n^2+2^{2k+1}-1=0$.

Đặt $t=n^2\ (t\in N)$, khi đó ta có phương trình $t^2-2^{k+1}t+2^{2k+1}-1=0$.

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn t, khi đó ta có

$$\Delta'=2^{2k}-\left(2^{2k+1}-1\right)=2^{2k}+1-2.2^{2k}=1-2^{2k}\ge 0$$

Từ đó suy ra $k=0$. Thay vào phương trình $n^4-2^{k+1}n^2+2^{2k+1}-1=0$ ta được phương trình

$$n^4-2n^2+1=0 \Leftrightarrow \left(n^2-1\right)^2=0 \Leftrightarrow n=1$$

Vậy cặp số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(n;k\right)=\left(1;0\right)$.

Câu 4 (3.0 điểm).

Cho nửa đường tròn $\left(O;R\right)$ đường kính BC. Gọi A là điểm di động trên nửa đường tròn (A khác B, C). Kẻ AD vuông góc với VC (D thuộc BC) sao cho đường tròn đường kính AD cắt AB, AC và nửa đường tròn $\left(O\right)$ lần lượt tại E, F, G (G khác A). Đường thẳng AG cắt BC tại H.

1) Tính $\dfrac{AD^3}{BE.CF}$ theo R và chứng minh rằng ba điểm H, E, F thẳng hàng

2) Chứng minh rằng $FG.CH+GH.CF=CG.HF$.

3) Trên BC lấy M cố định (M khác B, C). Gọi N, P lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB và MAC. Xác định vị trí của A để diện tích tam giác MNP nhỏ nhất.

Lời giải

1) Tính $\dfrac{AD^3}{BE.CF}$ theo R và chứng minh rằng ba điểm H, E, F thẳng hàng.

+ Do đường tròn đường kính AD cắt AB, AC theo thứ tự tại E và F nên ta có DE vuông góc với AB và DF vuông góc với AC. Áp dụng hệ thức lượng cho các tam giác vuông ABC ta được $AD^2=BD.CD$, do đó suy ra $AD^4=BD^2.CD^2$ Áp dụng hệ thức lương cho các tam giác vuông DAE và ADF ta lại có $BD^2=BE.BA$ và $CD^2=CF.CA$. Để ý rằng $AB.AC=AD.BC$ nên ta được

$$AD^4=BD^2.CD^2=BE.BA.CF.CA=BE.CF.AD.BC$$

Từ đó dẫn đến $AD^3=BE.CF.BC$ nên ta được $\dfrac{AD^3}{BE.CF}=BC=2R$.

+ Ta có tứ giác AGEF nội tiếp đường tròn đường kính AD nên ta có $HGE=AFE$. Mặt khác do tứ giác AEDF là hình chữ nhật nên ta có $AFE=ADE=EBA$. Do đó suy ra

$HGE = EBD$ nên tứ giác HGEB nội tiếp đường tròn. Lại để ý rằng tứ giác BGFC nội tiếp đường tròn đường kính BC nên ta có

$BEB = HGB = FCB = BAD = AEF$. Do vậy ba điểm H, E, F thẳng hàng.

***2) Chứng minh** $FG.CH + GH.CF = CG.HF$.*

+ Lời giải 1. Trước hết ta phát biểu và chứng minh định lí Ptoleme: *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Khi đó ta luôn có $AB.CD + AD.BC = AC.BD$.*

***Chứng minh.** Trên đoạn BD lấy điểm M sao cho $DAM = CAB$. Khi đó hai tam giác DAM và CAB đồng dạng với nhau, do đó ta có $\frac{AD}{AC} = \frac{DM}{BC}$ hay $AD.BC = AC.DM$. Chứng minh tương tự thì ta có $AB.CD = AC.BM$. Kết hợp hai kết quả ta được*

$$AD.BC + AB.CD = AC.DM + AC.BM = AC.BD$$

Định lí được chứng minh.

Trở lại bài toán. Do tứ giác BEGH và AGEF nội tiếp đường tròn nên ta có

$GHB = GEA = GFE$ nên suy ra tứ giác GHCF nội tiếp đường tròn. Từ đó áp dụng định lí Ptoleme trên thì ta thu được $FG.CH + GH.CF = CG.HF$.

+ Lời giải 2. Ta có $AGD = ADH = 90^0$ nên dễ thấy hai tam giác AGD và ADH đồng dạng. Do đó suy ra $ADG = AHD$. Lại có $AFG = ADG$ (các góc nội tiếp cùng chắn cung AG). Do đó ta được $AFG = AHD = AHC\left(= ADG\right)$ nên tứ giác GFCH nội tiếp

đường tròn. Gọi J là một điểm trên GC sao cho $GFJ = HFC$. Khi đó hễ thấy hai tam giác GFJ và HFC đồng dạng nên $\frac{GJ}{HC} = \frac{FG}{FH}$ hay $FG.HC = GJ.FH$. Ta cũng có hai tam giác GFH và JFC đồng dạng nên $\frac{GH}{JC} = \frac{FH}{FC}$ hay $GH.FC = FH.JC$. Đến đây thì ta được

$FG.CH + GH.CF = FH.\left(GJ + JC\right) = FH.CG$.

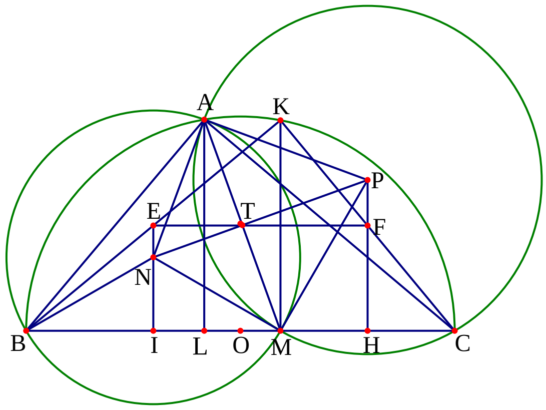
Vậy $FG.FH + GH.CF = CG.HF$

3) Trên BC lấy M cố định (M khác B, C). Gọi N, P lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB và MAC. Xác định vị trí của A để diện tích tam giác MNP nhỏ nhất.

Dễ thấy hai tam giác MNP và ANP bằng nhau nên suy ra hai tam giác MNP và ANP cùng đồng dạng với tam giác ABC. Lại có AM vuông góc với NP nên suy ra

$$S_{MNP} = S_{ANP} = \frac{1}{2}S_{ANMP} = \frac{1}{2}AM.NP.$$

$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ANP}}{S_{ABC}} = \frac{AT.NP}{AL.BC}$.



Từ đây ta suy ra diện tích tam giác MNP nhỏ nhất khi và chỉ khi NP nhỏ nhất

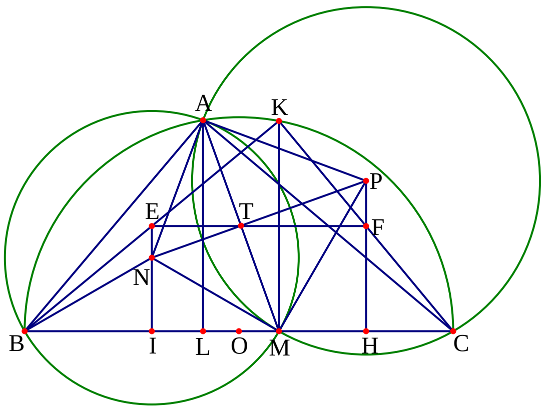
Mặt khác $\frac{NP}{BC} = \frac{AT}{AL} = \frac{1}{2}.\frac{AM}{AL}$. Ta có

$\frac{AM}{AD}$ nhỏ nhất khi D trùng M hay A là giao điểm của đường thẳng qua M vuông góc với BC với nửa đường tròn $(O;R)$

- **Lời giải.** Ta xét các trường hợp sau.

+ Trường hợp 1. Khi điểm M trùng với điểm O. Khi đó do N và P theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABM và ACM nên N nằm trên đường trung trực của BM và P nằm trên đường tròn trực của CN. Ta lại có $ABM + APM = 2\left(ABM + ACM\right) = 2.90^0 = 180^0$. Do đó $NMP = NAP = 90^0$ nên tam giác MNP vuông tại M. Gọi K là điểm chính giữa nửa đường tròn $\left(O\right)$ và T là trung điểm của MK. Đường thẳng qua T vuông góc với MK cắt đường trung trực của các đoạn thẳng BM, CM theo thứ tự tại E và F. Khi đó ta có $EF = \frac{1}{2}BC = R$. Dễ thấy được $PN \ge EF = R$ và $AM = MK = R$.

Từ đó ra được $S_{MNP} = \frac{1}{2}.NP.\frac{AM}{2} = \frac{1}{4}.NP.AM \ge \frac{1}{4}.EF.R = \frac{1}{2}R^2$. Như vậy khi M trùng với O thì diện tích tam giác MNP đạt giá trị nhỏ nhất khi A là điểm chính giữa nửa đường tròn (O).

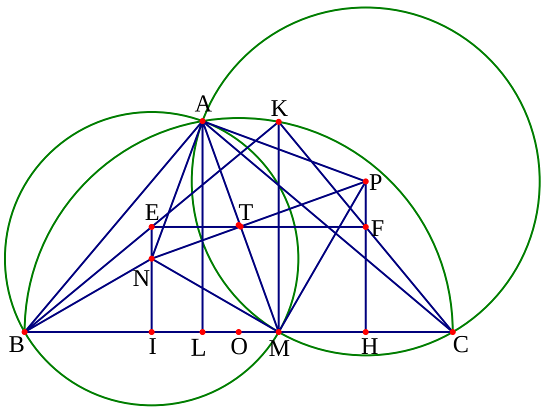


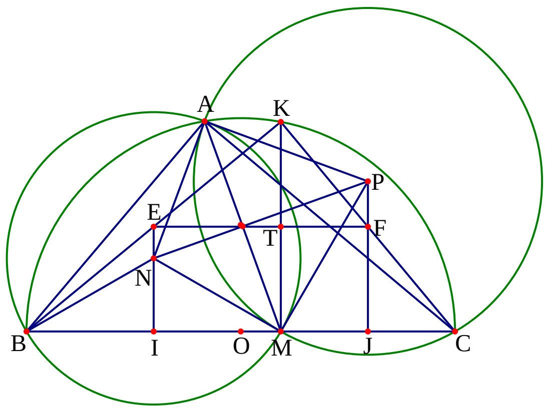
+ Trường hợp 2. Điểm M không trùng với O. Lặp lại chứng minh như trên ta suy ra được tam giác MNP vuông tại M. Đường thẳng qua M vuông góc với BC cắt nửa đường tròn (O) tại K, khi đó ta có MK không đổi. Gọi T là trung điểm của AM. Đường thẳng qua T vuông góc với MK cắt đường trung trực của các đoạn thẳng BM, CM theo thứ tự tại E và F. Khi đó EF là đường trung hình của tam giác BTC và ta có

$EF = \frac{1}{2}BC = R$ và .

Dễ thấy được $PN \ge EF = R$ và $2MN = NA + NB \ge AB; 2MP = PA + PC \ge AC$.

Từ đó ra được $S_{MNP} = \frac{1}{2}.MN.MP \ge \frac{1}{8}AB.AC$. Như vậy khi M trùng với O thì diện tích tam giác MNP đạt giá trị nhỏ nhất khi A là điểm chính giữa nửa đường tròn (O).





Câu 5. (1.0 điểm).

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}-a^2-28b^2-28c^2$$

- **Lời giải.** Áp dụng giả thiết kết hợp với bất đẳng thức AM – GM ta được

$$\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{2a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}}=\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}$$

$$\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{b^2+ab+bc+ca}}=\frac{b}{\sqrt{(b+c)(a+b)}}\le\frac{b}{a+b}+\frac{b}{4(b+c)}$$

$$\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}=\frac{c}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}}=\frac{c}{\sqrt{(c+a)(b+c)}}\le\frac{c}{c+a}+\frac{c}{4(b+c)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên thi ta được

$$\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{c+a}+\frac{1}{4}\left(\frac{b}{b+c}+\frac{c}{b+c}\right)=\frac{9}{4}$$

Mặt khác cũng áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{1}{2}\left(a^2+49b^2\right)\ge 7ab;\frac{1}{2}\left(a^2+49c^2\right)\ge 7ca;\frac{1}{2}\left(7b^2+7c^2\right)\ge 7bc$$

Từ đó ta suy ra được $a^2+28b^2+28c^2\ge 7(ab+bc+ca)=7$.

Đến đây ta suy ra được $P=\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}-\left(a^2+28b^2+28c^2\right)\le\frac{9}{4}-7=-\frac{19}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=7b=7c$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $-\frac{19}{4}$, đạt được tại $a=7b=7c$.

Đề số 21

ĐỀ THI TS LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH THÁI NGUYÊN

Năm học 2018 – 2019

Câu 1 (1.5 điểm). Không dùng máy tính cầm tay, rút gọn biểu thức

$$A=\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}-\frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

Câu 2 (1.5 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+3=4x \\ x^3+12x+y^3=6x^2+9 \end{cases}$

Câu 3 (1.0 điểm). Tìm các số x, y nguyên dương thỏa mãn $16\left(x^3-y^3\right)=15xy+371$.

Câu 4 (10 điểm). Giải phương trình $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14$

Câu 5 (1.5 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}}+\frac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}}+\frac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^2+14zx}}\le\frac{x+y+z}{5}$$

Câu 6 (1.0 điểm). Cho tam giác ABC cân có $BAC=100^0$. Điểm D thuộc nửa mặt phẳng không chứa A có bờ BC sao cho $CBD=15^0$ và $BCD=35^0$. Tính số đo của góc ADB.

Câu 7 (2.5 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), $AB<AC$. Các đường cao BD, CE cắt nhau tại H $\left(D\in AC, E\in AB\right)$. Gọi M là trung điểm BC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại N.

a) Chứng minh rằng các điểm A, D, E, H, N cùng thuộc một đường tròn

b) Lấy điểm P trên đoạn BC sao cho $BHP=CHM$. Gọi Q là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng HP. Chứng minh rằng tứ giác DENQ là hình thang cân

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với đường tròn (O).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1 (1.5 điểm). Không dùng máy tính cầm tay, rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}-\frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

Lời giải

Ta có

$$A=\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}+\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}-\frac{3\sqrt{5}\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}$$
$$=\frac{3\sqrt{5}+5-6-2\sqrt{5}}{5-4}+\frac{5+\sqrt{5}}{5-1}-\frac{9\sqrt{5}-15}{9-5}=\frac{4\sqrt{5}-4+5+\sqrt{5}-9\sqrt{5}+15}{4}$$
$$=\frac{16-4\sqrt{5}}{4}=4-\sqrt{5}$$

Câu 2 (1.5 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+3=4x\\x^3+12x+y^3=6x^2+9\end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho được viết lại thành $\begin{cases}x^2+y^2=4x-3\\x^3+3\left(4x-3\right)+y^3=6x^2\end{cases}$

Thế phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai của hệ trên ta được

$$x^3+y^3+3\left(x^2+y^2\right)=6x^2\Leftrightarrow x^3+y^3-3x^2+3y^2=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)-3\left(x+y\right)\left(x-y\right)=0\Leftrightarrow\left(x+y\right)\left(x^2+y^2-xy-3x+3y\right)=0$$

Ta xét các trường hợp sau.

+ Trường hợp 1. Khi $x+y=0$ ta được $x=-y$, thế vào phương trình thứ nhất của hệ đã cho ta được

$$x^2+\left(-x\right)^2+3=4x\Leftrightarrow 2x^2-4x+3=0\Leftrightarrow 2\left(x-1\right)^2+1=0$$

Phương trình trên vô nghiệm.

+ Trường hợp 2. Khi $x^2+y^2-xy-3x+3y=0$ ta được $x^2+y^2=xy+3x-3y$. Kết hợp với phương trình thứ nhất của hệ ta thu được phương trình

$$xy+3x-3y=4x-3\Leftrightarrow xy-x-3y+3=0\Leftrightarrow\left(x-3\right)\left(y-1\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\y=1\end{array}\right.$$

Với $x=3$ tương ứng ta được $y=0$ và với $y=1$ tương ứng ta được $x=2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(3;0\right),\left(2;1\right)$.

Câu 3 (1.0 điểm). Tìm các số x, y nguyên dương thỏa mãn $16\left(x^3-y^3\right)=15xy+371$.

Lời giải

Do x, y là các số nguyên dương nên ta có $15xy+371>0$ nên $x^3-y^3>0$ hay $x>y$. Từ phương trình trên ta có $15xy=16\left(x^3-y^3\right)-371$ là số lẻ nên suy ra x và y cùng là số lẻ. Do vậy ta có $y\ge 1$, mà lại có $x>y$ nên suy ra $x\ge 3$. Đến đây ta xét các trường hợp sau.

+ Trường hợp 1. Với $x=3$, khi đó từ $x>y$ và y là số lẻ ta suy ra được $y=1$. Thay $\left(x;y\right)=\left(3;1\right)$ vào phương trình đã cho ta thấy thỏa mãn. Do đó $\left(x;y\right)=\left(3;1\right)$ là một nghiệm của phương trình.

+ Trường hợp 2. Với $x\ge 5$, khi đó do y lẻ và $x>y$ nên ta có $x-2\ge y$. Đến đây thì ta được

$$16\left(x^3-y^3\right)\ge 16\left[x^3-\left(x-2\right)^3\right]=16\left[x^3-\left(x^3-6x^2+12x-8\right)\right]=16\left(6x^2-12x+8\right)$$

Mặt khác ta lại có $15xy+371\le 15x\left(x-2\right)+371=15x^2-30x+371$. Xét hiệu sau

$$\begin{aligned}&16\left(6x^2-12x+8\right)-\left(15x^2-30x+371\right)=96x^2-192x+128-15x^2+30x-371\\&=81x^2-162x-243=81\left(x^2-2x-3\right)=81\left(x+1\right)\left(x-3\right)\end{aligned}$$

Do $x\ge 5$ nên $\left(x+1\right)\left(x-3\right)>0$ do đó $16\left(6x^2-12x+8\right)>15x^2-30x+371$.

Do vậy $16\left(x^3-y^3\right)>15xy+371$ với mọi $x\ge 5$ hay phương trình đã cho vô nghiệm khi $x\ge 5$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $\left(x;y\right)=\left(3;1\right)$.

Câu 4 (1.0 điểm). Giải phương trình $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14$.

Lời giải

- **Lời giải 1.** Điều kiện xác định của phương trình là $\dfrac{3}{2}\le x\le \dfrac{5}{2}$.

Dễ thấy rằng $3x^2-12x+14=3\left(x^2-4x+4\right)+2=3\left(x-2\right)^2+2\ge 2$. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=1.\sqrt{2x-3}+1.\sqrt{5-2x}\le \sqrt{\left(1+1\right)\left(2x-3+5-2x\right)}=2$$

Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $\sqrt{2x-3}=\sqrt{5-2x}\Leftrightarrow x=2$.

Từ đó ta có $\begin{cases} 3x^2-12x+14\ge 2 \\ \sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}\le 2 \end{cases}$.

Kết hợp hợp với phương trình $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14$ suy ra các bất đẳng thức trên đồng thời xẩy ra dấu bằng. Do vậy ta được $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

- **Lời giải 2.** Điều kiện xác định của phương trình là $\frac{3}{2}\le x\le\frac{5}{2}$. Biến đổi tương đương phương trình đã cho ta có

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3}-1+\sqrt{5-2x}-1=3x^2-12x+12$$
$$\Leftrightarrow \frac{2(x-2)}{\sqrt{2x-3}+1}+\frac{4-2x}{\sqrt{5-2x}+1}=3(x-2)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}-\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}-3(x-2)\right]=0$$

Từ đó ta được $x=2$ hoặc $\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}-\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}-3(x-2)=0$.

Với phương trình $\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}+3(x-2)-\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}=0$ ta có

$$\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}-\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}+3(x-2)=0 \Leftrightarrow \frac{2\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{5-2x}\right)}{\left(\sqrt{2x-3}+1\right)\left(\sqrt{5-2x}+1\right)}+3(x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{8(x-2)}{\left(\sqrt{2x-3}+1\right)\left(\sqrt{5-2x}+1\right)\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}\right)}+3(x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{8}{\left(\sqrt{2x-3}+1\right)\left(\sqrt{5-2x}+1\right)\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}\right)}+3\right]=0 \Leftrightarrow x=2$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

- **Lời giải 3.** Điều kiện xác định của phương trình là $\frac{3}{2}\le x\le\frac{5}{2}$. Biến đổi tương đương phương trình đã cho ta có

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14 \Leftrightarrow 3x^2-12x+14-\sqrt{2x-3}-\sqrt{5-2x}=0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-14x+16+2x-3-\sqrt{2x-3}+1-\sqrt{5-2x}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(3x-8)+\frac{2\sqrt{2x-3}(x-2)}{\sqrt{2x-3}+1}+\frac{2(x-2)}{\sqrt{5-2x}+1}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)\left[3x-8+\frac{2\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}+\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}\right]=0$$

Do đó ta được $x=2$ hoặc $3x-8+\frac{2\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}+\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}=0$.

Với phương trình $3x-8+\frac{2\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}+\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}=0$ ta có

$$3x-8+\frac{2\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}+\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}=0 \Leftrightarrow 3x-6+\frac{2\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}-1+\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}-1=0$$
$$\Leftrightarrow 3x-6+\frac{\sqrt{2x-3}-1}{\sqrt{2x-3}+1}+\frac{1-\sqrt{5-2x}}{\sqrt{5-2x}+1}=0 \Leftrightarrow 3x-6+\frac{2x-4}{\left(\sqrt{2x-3}+1\right)^2}+\frac{2x-4}{\left(\sqrt{5-2x}+1\right)^2}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)\left[4+\frac{2}{\left(\sqrt{2x-3}+1\right)^2}+\frac{2}{\left(\sqrt{5-2x}+1\right)^2}\right]=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 5 (1.5 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}}+\frac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}}+\frac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^2+14zx}} \ge \frac{x+y+z}{5}$$

- **Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$8x^2+3y^2+14xy \le 8x^2+3y^2+12xy+x^2+y^2=9x^2+12xy+2x^2=(3x+2y)^2$$

Do đó ta được $\frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}} \ge \frac{x^2}{\sqrt{(3x+2y)^2}}=\frac{x^2}{3x+2y}$. Áp dụng y]ơng tự ta được

$$\frac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}} \ge \frac{y^2}{3y+2z};\frac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^2+14zx}} \ge \frac{z^2}{3z+2x}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên thì ta thu được

$$\frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}}+\frac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}}+\frac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^2+14zx}} \ge \frac{x^2}{3x+2y}+\frac{y^2}{3y+2z}+\frac{z^2}{3z+2x}$$

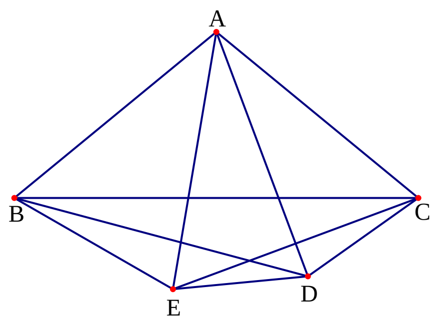
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức ta có

$$\frac{x^2}{3x+2y}+\frac{y^2}{3y+2z}+\frac{z^2}{3z+2x}\ge\frac{(x+y+z)^2}{5(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{5}$$

Do vậy ta được $\dfrac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}}+\dfrac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}}+\dfrac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^2+14zx}}\ge\dfrac{x+y+z}{5}$.

Bất đẳng thức được chứng minh hoàn tất. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z$

Câu 6 (1.0 điểm). Cho tam giác ABC cân có $BAC=100^0$. Điểm D thuộc nửa mặt phẳng không chứa A có bờ BC sao cho $CBD=15^0$ và $BCD=35^0$. Tính số đo của góc ADB.



Lời giải

Do tam giác ABC cân và có $BAC=100^0$ nên suy rat ma giác ABC cân tại A. Từ đó ta suy ra được $ABC=ACB=40^0$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC lất điểm E sao cho tam giác ACE là tam giác đều, khi đó ta có $CED=ACD-ACE=75^0-60^0=15$. Mặt khác do tam giác ABC cân và tam giác ACE đều nên suy ra $AB=AC=AE$, do đó tam giác ABE cân tại A.

Lại có $BAE=BAC-EAC=100^0-60^0=40^0$ nên $ABE=AEB=70^0$. Mà $ABC=40^0$ nên suy ra $CBE=30^0$. Chú ý rằng $CBD=15^0$ nên suy ra $DBE=15^0$. Do vậy $DBE=DEC=15^0$ nên tứ giác BCDE nội tiếp . Từ đó $CED=DBC=15^0$ nên $AED=75^0$ và $CED=ECD=15^0$ nên tam giác DEC cân tại D. Hai tam giác AED và ACD có $AE=AC, AED=ACD=75^0, DE=DC$ nên bằng nhau. Chú ý rằng $CDE=150^0$ nên đó ta suy ra được $ADE=ADC=75^0$. Đến đây thì ta suy ra được $ADB=55^0$.

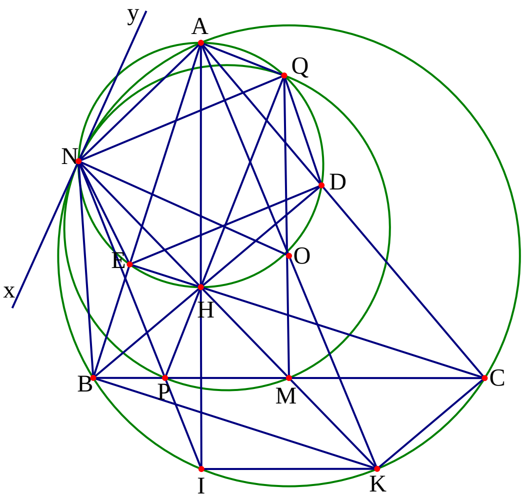
Câu 7 (2.5 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), $AB < AC$. Các đường cao BD, CE cắt nhau tại H $(D \in AC, E \in AB)$. Gọi M là trung điểm BC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại N.

a) Chứng minh rằng các điểm A, D, E, H, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Lấy điểm P trên đoạn BC sao cho $BHP = CHM$. Gọi Q là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng HP. Chứng minh rằng tứ giác DENQ là hình thang cân

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với đường tròn (O).

Lời giải



a) Chứng minh các điểm A, D, E, H, N cùng thuộc một đường tròn.

Do BD và CE là các đường cao của tam giác ABC nên ta có $ADH = AEH = 90^0$ nên tứ giác ADHE nội tiếp đường tròn đường kính AH. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O) khi đó dễ dàng chứng minh được tứ giác BHCK là hình bình hành nên HK và BC cắt nhau tại trung điểm M của BC hay ba điểm K, M, H thẳng hàng. Điều này dẫn đến các điểm K, M, H, N thẳng hàng. Suy ra $ANH = ANK = 90^0$ nên N nằm trên đường tròn đường kính AH. Vậy các điểm A, D, E, H, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Lấy điểm P trên đoạn BC sao cho $BHP = CHM$***. Gọi Q là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng HP. Chứng minh tứ giác DENQ là hình thang cân.***

Do Q là hình chiếu của A trên HP nên suy ra $QAH = 90^0$ hay điểm Q nằm trên đường tròn đường kính AH. Do đó tứ giác DENQ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AH. Mặt khác ta có $BHP = CHM$ nên suy ra $NHE = DHQ$, do đó $sdNE = sdDQ$ nên DE song song với NQ. Do vậy tứ giác DENQ là hình thang. Suy ra tứ giác DENQ là hình thang cân.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với đường tròn (O).

+ Lời giải 1. Ta có $DQH = DAH = HBP$ và $BHP = QHD$ nên suy ra hai tam giác BPH và QDH đồng dạng với nhau, do đó ta được $BPH = QDH$. Tứ giác DHNQ nội tiếp nên $QDH + QNH = 180^0$, mà ta lại có $HPB + QPM = 180^0$ nên $QNM = QPM$ hay tứ giác NQPM nội tiếp đường tròn. Như vậy N là một điểm chung của đường tròn (O) với đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ.

Ta có $BHP = CHK = NKB$ và $PBH = 90^0 - ACB = 90^0 - AKB = BAK = BNK$ nên suy ra hai tam giác BHP và NKB đồng dạng với nhau, từ đó ta được $\frac{BP}{BN} = \frac{HB}{KN} = \frac{KC}{KN}$. Lại có $NBK = CKN$ nên ta lại có hai tam giác NBP và NKC đồng dạng với nhau, điều này dẫn đến $BNP = KNC$. Từ N kẻ tiếp tuyến xy với đường tròn (O). Khi đó ta có $PNx = BNx + BNP = NCM + KNC = NCP$ nên xy cũng là tiếp tuyến tại N của đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ. Do vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với đường tròn (O).

+ Lời giải 2. Tương tự như trên ta chứng minh được tứ giác MPNQ nội tiếp đường tròn. Để ý đến các tứ giác nội tiếp thì ta có $CAK = 90^0 - AKC = 90^0 - ABC = BAH$. Do đó ta suy ra được $DAK + ADE = EAH + AHE = 90^0$ nên AK vuông góc với DE. Mà ta đã có NQ song song với DE nên ta được AK vuông góc với NQ. Đến đây ta suy ra được $ANQ = AKN$. Gọi I là gia điểm của AH với đường tròn (O), khi đó dễ chứng minh được I và H đối xứng với nhau qua BC, đồng thời KI song song với BC. Điều này dẫn đến $AIN = AKN = ANQ = AHQ = PHI = HIP$ nên suy ra ba điểm N, P, I thẳng hàng. Từ N kẻ tiếp tuyến xy với đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ. Khi đó ta có biến đổi góc $PNx = PQN = HQN = HAN = IAN$ nên xy cũng là tiếp tuyến tại N của đường tròn (O). Do vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với đường tròn (O).

Đề số 22

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH BẮC NINH

Năm học 2018 – 2019

Câu 1 (2.5 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $P=\left[\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right]:\frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{b^2}$.

Với $|a|>|b|>0$.

b) Cho phương trình $x^2+ax+b=0$ với x là ẩn và a, b là tham số. Tìm các giá trị của a, b để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $\begin{cases}x_1-x_2=5\\x_1^3-x_2^3=35\end{cases}$

Câu 2 (2.5 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=x+3$.

b) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0\le a,b,c\le 2$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$.

Câu 3 (1.5 điểm).

a) Tìm các số nguyên tố $(x;y)$ thỏa mãn $x^2-2y^2=1$

b) Chứng minh rằng nếu hiệu các lập phương của 2 số nguyên liên tiếp là bình phương của một số tự nhiên n thì n là tổng 2 số chính phương liên tiếp.

Câu 4 (3.0 điểm).

1) Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (với B, C là tiếp điểm). AO cắt BC tại H. Đường tròn đường kính CH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Gọi T là trung điểm BD

a) Chứng minh rằng tứ giác ABHD nội tiếp đường tròn.

b) Gọi E là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính AB với AC và S là giao của AO với BE. Chứng minh rằng TS song song với HD.

2) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm A, B. Gọi MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn với M thuộc đường tròn (O_1) và N thuộc đường tròn

(O_2). Qua A kẻ đường thẳng d song song với MN cắt $(O_1);(O_2);BM;BN$ theo thứ tự tại C, D, F, G. Gọi E là giao của CM và DN. Chứng minh rằng $EF = EG$.

Câu 5 (0.5 điểm).

Cho 20 số tự nhiên sao cho mỗi số có ước nguyên tố không vượt quá 7. Chứng minh rằng luôn chọn được ra hai số thỏa mãn tích của chúng là một số chính phương.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1 (2.5 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $P = \left[\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}} - \dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right] : \dfrac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{b^2}$.

Với $|a| > |b| > 0$.

b) Cho phương trình $x^2 + ax + b = 0$ với x là ẩn và a, b là tham số. Tìm các giá trị của a, b để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases}$

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức $P = \left[\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}} - \dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right] : \dfrac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{b^2}$ với $|a| > |b| > 0$.

Với $|a| > |b| > 0$ ta có $a^2 - b^2 > 0$. Khi đó ta có biến đổi sau

$$P = \left[\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}} - \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right] : \frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{b^2}$$

$$= \left[\frac{\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)^2 - \left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)^2}{\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)}\right] . \frac{b^2}{4\sqrt{a^2\left(a^2-b^2\right)}}$$

$$= \frac{a^2 + 2a\sqrt{a^2-b^2} + a^2 - b^2 - a^2 + 2a\sqrt{a^2-b^2} - \left(a^2-b^2\right)}{a^2 - \left(a^2-b^2\right)} . \frac{b^2}{4|a|\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$= \frac{4a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} . \frac{b^2}{4|a|\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{a}{|a|}$$

Từ đó nếu $a > 0$ thì ta được $P = 1$ và nếu $a < 0$ thì ta được $P = -1$.

b) Cho phương trình $x^2+ax+b=0$ với x là ẩn và a, b là tham số. Tìm các giá trị của a, b để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $\begin{cases}x_1-x_2=5\\x_1^3-x_2^3=35\end{cases}$

Phương trình $x^2+ax+b=0$ có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta=a^2-4b\ge 0$.

Theo hệ thức Vi – et ta có $x_1+x_2=-a;x_1x_2=b$. Biến đổi hệ đã cho ta được

$$\begin{cases}x_1-x_2=5\\x_1^3-x_2^3=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2=5\\(x_1-x_2)\left[(x_1-x_2)^2-3x_1x_2\right]=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2=5\\5\left[25+x_1x_2\right]=35\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2=5\\25-3x_1x_2=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2=5\\3x_1x_2=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2=5\\x_1x_2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=6\end{cases}$$

Từ đó thay vào hệ thức Vi – et trên ta được $a=-7;b=6$.

Câu 2 (2.5 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=x+3$.

b) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0\le a,b,c\le 2$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$.

Lời giải

a) Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=x+3$.

- **Lời giải 1.** Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge -\dfrac{1}{3}$.

Đặt $a=\sqrt{x+3};b=\sqrt{3x+1}\,(a>0;b\ge 0)$. Khi đó ta được $3a^2-b^2=8$

Phương trình đã cho được viết lại thành $a+b=a^2$.

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}3a^2-b^2=8\\a+b=a^2\end{cases}$

Ta có $a+b=a^2\Leftrightarrow b=a^2-a$, thay vào phương trình $3a^2-b^2=8$ thì ta thu được phương trình

$$3a^2-(a^2-a)^2=8\Leftrightarrow 3a^2-(a^4-2a^3+a^2)=8\Leftrightarrow a^4-2a^3-2a^2+8=0$$
$$\Leftrightarrow(a^4-2a^3)-(2a^2-8)=0\Leftrightarrow a^3(a-2)-2(a-2)(a+2)=0$$
$$\Leftrightarrow(a-2)(a^3-2a-4)=0\Leftrightarrow(a-2)^2(a+2a+2)=0$$

Do $a>0$ nên từ phương trình trên ta được $a=2$, do đó ta được $b=2$

Đến đây ta tìm được $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

- **Lời giải 2.** Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge -\frac{1}{3}$. Biến đổi phương trình đã cho ta có

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=x+3 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}-2+\sqrt{3x+1}-2=x-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{3(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2}=x-1 \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}-1\right)=0$$

+ Với $x-1=0$ ta được $x=1$ thỏa mãn điều kiện xác định.

+ Với $\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}-1=0$ ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}-1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}-\frac{3}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{3\left(2-\sqrt{3x+1}\right)}{\sqrt{3x+1}+2}=0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)^2}+\frac{9(1-x)}{\left(\sqrt{3x+1}+2\right)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow (1-x)\left[\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)^2}+\frac{9}{\left(\sqrt{3x+1}+2\right)^2}\right]=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=1$.

b) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \le a,b,c \le 2$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$.

+ Do a, b, c không âm nên dễ chứng minh được $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca > 0$.

Từ đó ta có $P=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \ge \frac{ab+bc+ca}{ab+bc+ca}=1$, dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1, xẩy ra tại $a=b=c=1$.

+ Cũng do $0 \le a,b,c \le 2$ nên ta có $(a-2)(b-2)(c-2) \le 0$ hay ta được

$$abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8 \le 0$$

Kết hợp với $a+b+c=3$ thì ta được $2(ab+bc+ca) \ge abc+4$.

Để ý rằng a, b, c là các số không âm nên ta lại có $abc \ge 0$. Do đó $abc+4 \ge 4$.

Từ đó suy ra $2(ab+bc+ca) \ge 4$ nên $ab+bc+ca \ge 2$.

Ta có $P=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}=\frac{\left(a+b+c\right)^2-2\left(ab+bc+ca\right)}{ab+bc+ca}=\frac{9}{ab+bc+ca}-2\le\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$.

Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=2;b=1;c=0$ và các hoán vị.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5}{2}$, xẩy ra tại $a=2;b=1;c=0$ và các hoán vị.

Câu 3 (1.5 điểm).

a) Tìm các số nguyên tố $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $x^2-2y^2=1$

b) Chứng minh rằng nếu hiệu các lập phương của 2 số nguyên liên tiếp là bình phương của một số tự nhiên n thì n là tổng 2 số chính phương liên tiếp.

Lời giải

a) Tìm các số nguyên tố $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $x^2-2y^2=1$

Từ $x^2-2y^2=1$ ta được $x^2=2y^2+1$. Do đó ta suy ra được x là số nguyên tố lẻ.

Từ đó ta đặt $x=2k+1$ với $k\in N^*$.

Khi đó ta được $\left(2k+1\right)^2=2y^2+1\Leftrightarrow 4k^2+4k+1=2y^2+1\Leftrightarrow 2k\left(k+1\right)=y^2$

Do đó y^2 là số chẵn nên y là số chẵn. Mà y là số nguyên tố nên $y=2$.

Thay vào $x^2-2y^2=1$ ta suy ra được $x^2-2.2^2=1\Leftrightarrow x^2=9$ nên $x=3$.

Vậy cặp số nguyên tố $\left(x;y\right)=\left(3;2\right)$ thỏa mãm yêu cầu bài toán.

b) Chứng minh rằng nếu hiệu các lập phương của 2 số nguyên liên tiếp là bình phương của một số tự nhiên n thì n là tổng 2 số chính phương liên tiếp.

Gọi hai số nguyên liên tiếp là a và $a+1$. Khi đó ta có

$$n^2=\left(a+1\right)^3-a^3=a^3+3a^2+3a+1-a^3=3a^2+3a+1$$

Do đó ta có $4n^2=12n^2+12n+4=3\left(4a^2+4a+1\right)+1=3\left(2a+1\right)^2$

Suy ra ta được $3\left(2a+1\right)^2=\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)$.

Đặt $d=\left(2n-1;2n+1\right)$, khi đó ta có $2n-1\vdots 3$ và $2n+1\vdots 3$ nên $\left(2n+1\right)-\left(2n-1\right)\vdots 3$ hay $2\vdots d$, tứ đó suy ra $d\in\left\{1;2\right\}$. Mà do $2n+1$ là số lẻ nên d là số lẻ.

Do vậy ta được $d=1$ hay $\left(2n-1;2n+1\right)=1$. Khi đó tồn tại các số nguyên p và q thỏa mãn

$$\begin{cases}2n-1=3p^2\\2n+1=q^2\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}2n-1=p^2\\2n+1=3q^2\end{cases}$$

+ Trường hợp 1. Với $\begin{cases}2n-1=3p^2\\2n+1=q^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2n-1=3p^2\\2n-1=q^2-2\end{cases} \Rightarrow q^2-2=3p^2 \Rightarrow q^2=3p^2+2$.

Trường hợp này không thỏa mãn vì số chính phương khi chia cho 3 có số dư là 0 hoặc 1.

+ Trường hợp 2. Với $\begin{cases}2n-1=p^2\\2n+1=3q^2\end{cases}$.

Từ $2n-1=p^2$ ta được p là số lẻ. Đặt $p=2k+1$ với k là số nguyên. Từ đó ta được

$$2n-1=\left(2k+1\right)^2 \Rightarrow 2n=4k^2+4k+2 \Rightarrow n=2k^2+2k+1=k^2+\left(k+1\right)^2$$

Vậy bài toán được chứng minh hoàn tất.

Câu 4 (3.0 điểm).

1) Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (với B, C là tiếp điểm). AO cắt BC tại H. Đường tròn đường kính CH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Gọi T là trung điểm BD

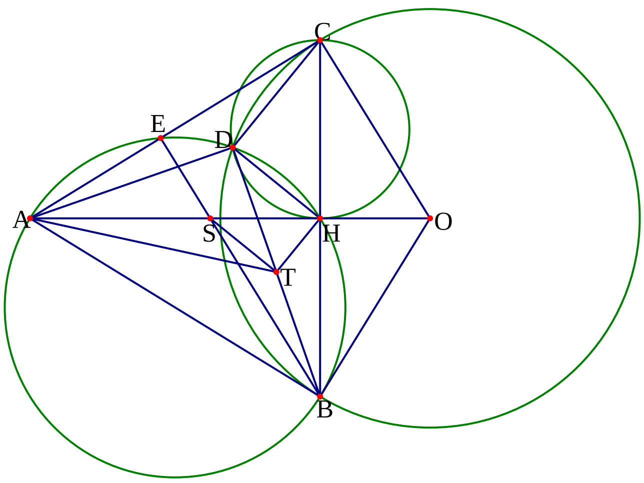
a) Chứng minh rằng tứ giác ABHD nội tiếp đường tròn.

b) Gọi E là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính AB với AC và S là giao của AO với BE. Chứng minh rằng TS song song với HD.

2) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm A, B. Gọi MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn với M thuộc đường tròn (O_1) và N thuộc đường tròn (O_2). Qua A kẻ đường thẳng d song song với MN cắt $(O_1);(O_2);BM;BN$ theo thứ tự tại C, D, F, G. Gọi E là giao của CM và DN. Chứng minh rằng $EF=EG$.

Lời giải

1) Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (với B, C là tiếp điểm). AO cắt BC tại H. Đường tròn đường kính CH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Gọi T là trung điểm BD



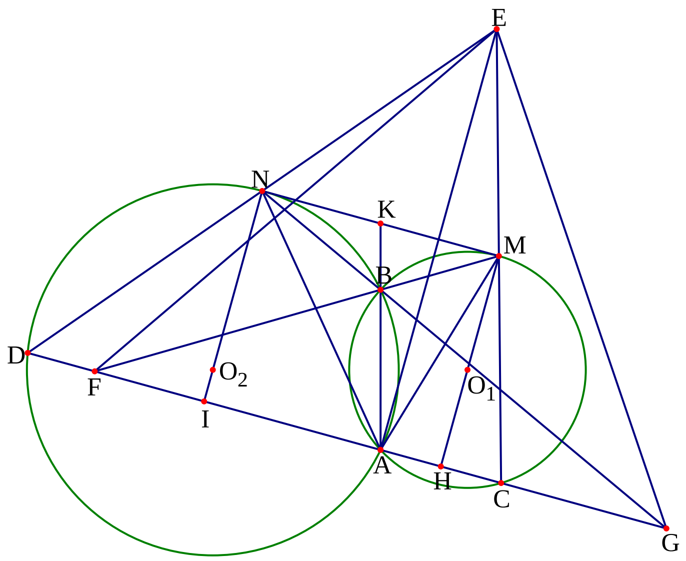
a) Chứng minh tứ giác ABHD nội tiếp đường tròn.

Do AB là tiếp tuyến với đường tròn (O) nên ta có $ABD = BCD$. Do AO vuông góc với BC tại H nên AO tiếp xúc với đường tròn đường kính CH tại H, do đó ta có $AHD = HCD = BCD$. Suy ra ta được $ABD = AHD$ nên tứ giác ABHD nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh TS song song với HD.

Tứ giác ABHD nội tiếp đường tròn nên ta có $DAH = DBC$, lại có $AHD = BCD$ nên suy ra hai tam giác ADH và BDC đồng dạng với nhau, suy ra ta được $\frac{AD}{AH} = \frac{BD}{BC} = \frac{2DT}{2CH} = \frac{DT}{CH}$ hay ta được $\frac{AD}{TD} = \frac{AH}{CH}$. Lại có $ADB = AHB = 90^0$ nên ta lại có hai tam giác vuông TDA và CHA đồng dạng với nhau, do đó suy ra $TAD = HAC$ nên $TAS = DAC = DAE = DBE = TBS$ suy ra tứ giác ABTS nội tiếp đường tròn, từ đó ta có $HST = TBA = DBA = DHA$ nên suy ra ST song song với DH.

2) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm A, B. Gọi MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn với M thuộc đường tròn (O_1) và N thuộc đường tròn (O_2). Qua A kẻ đường thẳng d song song với MN cắt $(O_1);(O_2);BM;BN$ theo thứ tự tại C, D, F, G. Gọi E là giao của CM và DN. Chứng minh rằng $EF = EG$.



Ta có CD song song với MN, lại có MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2) nên suy ra MO_1 và NO_2 vuông góc với CD lần lượt tại H và I, suy ra MO_1 và NO_2 lần lượt là đường trung trực của AC và AD. Do đó ta có $HA = HC$ và $IA = ID$. Để ý rằng tứ giác tứ giác MNIH là hình chữ nhật nên suy ra $MN = HI = \frac{1}{2}CD$. Lại có MN song song với CD nên suy ra MN là đường trung bình của tam giác EC, do đó ta được $MC = ME$. Lại có H là trung điểm của AC nên HM là đường trung bình của của tam giác AEC, suy ra MH song song vơú AE nên AE vuông góc với CD. Gọi K là giao điểm của AB với MN, khi đó dễ dàng chứng minh được $KM^2 = K.KB = KN^2$ nên K là trung điểm của MN. Do MN song song với FG nên suy ra hai tam giác BMN và BFG đồng dạng với nhau. Dễ thấy hai tam giác BMK và BFA đồng dạng. Từ đó do K là trung điểm của MN nên suy ra A là trung điểm của FG. Như vậy AE trở thành đường trung trực của GF nên ta suy ra được $EF = EG$.

Câu 5 (0.5 điểm).

Cho 20 số tự nhiên sao cho mỗi số có ước nguyên tố không vượt quá 7. Chứng minh rằng luôn chọn được ra hai số thỏa mãn tích của chúng là một số chính phương.

Lời giải

Do các số tự nhiên đã cho các các ước nguyên tố không vượt quá 7 nên các số đã cho đều có dạng $2^x.3^y.5^z.7^t$ với x, y, z, t là các số tự nhiên. Mỗi số trong các số x, y, z, t đều có thể là số chẵn hoặc số lẻ. Như vậy xét tính chẵn lẻ của bộ số $(x;y;z;t)$ thì có 16 trường hợp xẩy ra. Như vậy với 20 số có dạng $2^x.3^y.5^z.7^t$ thì tồn tại 20 bộ số mũ $(x;y;z;t)$ có tính chẵn lẻ như trên và theo nguyên lý Dirichlet thì luôn tồn tại hai bộ số như vậy có cùng tính chẵn lẻ. Giả sử hai bộ số mũ đó là $(x_1;y_1;z_1;t_1)$ và $(x_2;y_2;z_2;t_2)$. Khi đó ta có $x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2;t_1+t_2$ là các số chẵn và tích hai số tự nhiên ứng với hai bộ số mũ trên là

$$\left(2^{x_1}.3^{y_1}.5^{z_1}.7^{t_1}\right).\left(2^{x_2}.3^{y_2}.5^{z_2}.7^{t_2}\right)=2^{x_1+x_2}.3^{y_1+y_2}.5^{z_1+z_2}.7^{t_1+t_2}$$

Do đó $\left(2^{x_1}.3^{y_1}.5^{z_1}.7^{t_1}\right).\left(2^{x_2}.3^{y_2}.5^{z_2}.7^{t_2}\right)$ là một số chính phương

Đề số 23

ĐỀ THI TS LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH BẮC GIANG

Năm học 2018 – 2019

Câu 1.

1. Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2}+\dfrac{x+\sqrt{x}}{1-x}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$ với $x>0;x\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $A\ge \dfrac{1+\sqrt{2018}}{\sqrt{2018}}$.

2. Cho phương trình $x^2-\left(m+1\right)x-3=0$ với x là ẩn và m là tham số. Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình đã cho. Đặt $B=\dfrac{3x_1^2+3x_2^2+4x_1+4x_2}{x_1^2+x_2^2-4}$. Tìm m để B đạt giá trị lớn nhất.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\sqrt{x+3}+x^2+4x=7$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-xy-x+3y-6=0\\ \sqrt{5x-6}+\sqrt{16x-3y}=2y^2-2x+y-4\end{cases}$

Câu 3.

1. Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n sao cho n^2+2018 là số chính phương.

2. Mười đội bóng chuyền tham gia giải bóng chuyền VTV cup 2018. Cứ hai đội trong giải đấu đó thi đấu với nhau đúng một trận. Đội thứ nhất thắng x_1 trận và thua y_1 trận, ... , đội thứ 10 thắng x_{10} trận và thua y_{10} trận. Biết rằng trong môt trận bóng chuyền không có trận hòa. Chứng minh rằng:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+...+x_{10}^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2+...+y_{10}^2$$

Câu 4.

1. Cho tam giác ABC nhọn nối tiếp đường tròn $\left(O\right)$ với $AB<AC$. Gọi M là điểm thuộc cạnh BC (M kkhông trùng với B, C). Đường thẳng AM cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại điểm D khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD cắt đường thẳng AC

tại điểm E khác C. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MBD cắt đường thẳng AB tại điểm F khác B.

a) Chứng minh rằng tứ giác BECF nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng $\Delta ECD \backsim \Delta FBD$ và ba điểm E, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Các cạnh của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $BC^2 = 2.BC.AC + 4AC^2$. Tính số đo góc ABC.

Câu 5. Cho x, y, z là các số thực toản mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $$M = |x^3 - y^3| + |y^3 - z^3| + |z^3 - x^3|$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

1. Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{x + 4\sqrt{x} + 4}{x + \sqrt{x} - 2} + \dfrac{x + \sqrt{x}}{1 - x}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} - \dfrac{1}{1 - \sqrt{x}}\right)$ với $x > 0; x \ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $A \ge \dfrac{1 + \sqrt{2018}}{\sqrt{2018}}$.

2. Cho phương trình $x^2 - (m+1)x - 3 = 0$ với x là ẩn và m là tham số. Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình đã cho. Đặt $B = \dfrac{3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1 + 4x_2}{x_1^2 + x_2^2 - 4}$. Tìm m để B đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

1. Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{x + 4\sqrt{x} + 4}{x + \sqrt{x} - 2} + \dfrac{x + \sqrt{x}}{1 - x}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} - \dfrac{1}{1 - \sqrt{x}}\right)$ ***với*** $x > 0; x \ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức A. Với điều kiện xác định $x > 0; x \ne 1$ ta có

$$A = \left(\dfrac{x + 4\sqrt{x} + 4}{x + \sqrt{x} - 2} + \dfrac{x + \sqrt{x}}{1 - x}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} - \dfrac{1}{1 - \sqrt{x}}\right)$$

$$= \left[\dfrac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right] : \dfrac{(\sqrt{x}-1)+(1+\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right) : \dfrac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \dfrac{2}{\sqrt{x}-1}.\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $A \geq \frac{1+\sqrt{2018}}{\sqrt{2018}}$.

Với điều kiện $x > 0, x \neq 1$ ta có $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$. Khi đó

$$A \geq \frac{1+\sqrt{2018}}{\sqrt{2018}} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{x}} \geq 1+\frac{1}{\sqrt{2018}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{2018}} \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{2018} \Rightarrow 0 < x \leq 2018$$

Vì $x > 0, x \neq 1$ và x nguyên nên ta có $x \in \{2;3;4;...;2018\}$. Suy ra có 2017 giá trị nguyên của x thỏa mãn bài toán.

2. Cho phương trình $x^2-(m+1)x-3=0$ với x là ẩn và m là tham số. Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình đã cho. Đặt $B=\frac{3x_1^2+3x_2^2+4x_1+4x_2}{x_1^2+x_2^2-4}$. Tìm m để B đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $\Delta=(m+1)^2+12>0$ với mọi m. Suy ra phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Theo hệ thức Vi – et ta có $x_1+x_2=m+1; x_1x_2=-3$.

$$B=\frac{3x_1^2+3x_2^2+4x_1+4x_2-5}{x_1^2+x_2^2-4}=\frac{3\left(x_1^2+x_2^2\right)+4\left(x_1+x_2\right)-5}{x_1^2+x_2^2-4}$$
$$=\frac{3\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]+4\left(x_1+x_2\right)-5}{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2-4}=\frac{3\left[(m+1)^2+6\right]+4(m+1)-5}{(m+1)^2+6-4}$$
$$=\frac{3m^2+10m+20}{m^2+2m+3}$$

Khi đó ta có $(B-3)m^2+2(B-5)m+3B-20=0 \quad (*)$.

+ Nếu $B=3$ thì ta được $m=-\frac{11}{4}$.

+ Nếu $B \neq 3$ thì $(*)$ là phương trình bậc hai ẩn m. Phương trình $(*)$ có nghiệm m khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0$ hay

$$(B-5)^2-(B-3)(3B-20) \geq 0 \Leftrightarrow 2B^2-19B+35 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq B \leq 7.$$

Vậy giá trị lớn nhất của B bằng 7 khi $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\sqrt{x+3}+x^2+4x=7$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - xy - x + 3y - 6 = 0 \\ \sqrt{5x-6} + \sqrt{16x-3y} = 2y^2 - 2x + y - 4 \end{cases}$

Lời giải

1. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + x^2 + 4x = 7$ **.**

Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge -3$.Phương trình đã cho tương đương

$$\left(\sqrt{x+3} - 2\right) + \left(x^2 + 4x - 5\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} + (x-1)(x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} + (x+5)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2} + (x+5) = 0 \end{array}\right.$$

+ Với $x - 1 = 0$ ta được $x = 1$ thỏa mãn điều kiện xác định.

+ Với $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2} + (x+5) = 0$.

Do $x \ge -3$ nên dễ thấy $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2} + (x+5) > 0$. Do đó phương trình trên vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - xy - x + 3y - 6 = 0 \\ \sqrt{5x-6} + \sqrt{16x-3y} = 2y^2 - 2x + y - 4 \end{cases}$

+ Điều kiện xác định của hệ phương $x \ge \dfrac{6}{5}; y \le \dfrac{16}{3}$.

Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ đã cho ta được

$$x^2 - xy - x + 3y - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-y+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ y = x+2 \end{array}\right.$$

+ Với $x = 3$ thay vào phương trình còn lại của hệ ta được

$$\sqrt{16-3y} = y + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 13y + 9 = 0 \\ y \ge -5 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{-13+\sqrt{133}}{2}.$$

+ Với $y = x + 2$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{5x-6} + \sqrt{10-3x} = 2x^2 - x - 2 \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt{5x-6} - 2\right) + \left(\sqrt{10-3x} - 2\right) = 2x^2 - x - 6 \\ \Leftrightarrow & \frac{5(x-2)}{\sqrt{5x-6}+2} - \frac{3(x-2)}{\sqrt{10-3x}+2} - (x-2)(2x+3) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-2)\left(\frac{5}{\sqrt{5x-6}+2} - \frac{3}{\sqrt{10-3x}+2} - 2x - 3\right) = 0 \end{aligned}$$

Do $y=x+2$ và $y\le \frac{16}{3}$ nên ta có $x+2\le \frac{16}{3}$ hay $x\le \frac{10}{3}$. Từ đó suy ra $\frac{6}{5}\le x\le \frac{10}{3}$.

Do đó suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{5x-6}+2\ge 2 \\ -\frac{3}{\sqrt{10-3x}+2}-2x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{\sqrt{5x-6}+2}\le \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{\sqrt{10-3x}+2}-2x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{\sqrt{5x-6}+2}-3<0 \\ -\frac{3}{\sqrt{10-3x}+2}-2x<0 \end{cases}$$

Nên ta được $\frac{5}{\sqrt{5x-6}+2}-\frac{3}{\sqrt{10-3x}+2}-2x-3<0$.

Do đó từ phương trình trên ta được $x-2=0$ hay $x=2$. Suy ra $(x;y)=(2;4)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là $(x;y)=(2;4),\left(3;\frac{-13+\sqrt{133}}{2}\right)$.

Câu 3.

1. Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n sao cho n^2+2018 là số chính phương.

2. Mười đội bóng chuyền tham gia giải bóng chuyền VTV cup 2018. Cứ hai đội trong giải đấu đó thi đấu với nhau đúng một trận. Đội thứ nhất thắng x_1 trận và thua y_1 trận, ... , đội thứ 10 thắng x_{10} trận và thua y_{10} trận. Biết rằng trong môt trận bóng chuyền không có trận hòa. Chứng minh rằng:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+...+x_{10}^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2+...+y_{10}^2$$

Lời giải

1. Chứng minh không tồn tại số tự nhiên n sao cho n^2+2018 ***là số chính phương.***

Giả sử $2018+n^2$ là số chính phương thì $2018+n^2=m^2$ với m là một số nguyên dương. Suy ra $2018=m^2-n^2$ hay $2018=(m-n)(m+n)$. Như vậy trong hai số $m-n$ và $m+n$ phải có ít nhất một số chẵn. Mà $(m-n)+(m+n)=2m$ nên suy ra hai số $m-n$ và $m+n$ cùng tính chẵn lẻ.

Từ các kết quả trên suy ra hai số $m-n$ và $m+n$ là hai số chẵn. Do vậy ta được $(m-n)(m+n)$ chia hết cho 4. Mà 2018 không chia hết cho 4 nên điều giả sử là sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2018+n^2$ là số chính phương.

***2.** Mười đội bóng chuyền tham gia giải bóng chuyền VTV cup 2018. Cứ hai đội trong giải đấu đó thi đấu với nhau đúng một trận. Đội thứ nhất thắng x_1 trận và thua y_1 trận, ... , đội thứ 10 thắng x_{10} trận và thua y_{10} trận. Biết rằng trong môt trận bóng chuyền không có trận hòa. Chứng minh rằng:*

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+...+x_{10}^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2+...+y_{10}^2$$

Có 10 đội bóng mà mỗi đội thi đấu đúng 9 trận với 9 đội còn lại. Do đó số trận thua của mỗi đội từ đội thứ nhất đến đội thứ 10 lần lượt là

$$y_1=9-x_1; y_2=9-x_2;...; y_{10}=9-x_{10}.$$

Có tất cả số trận đấu là $\frac{10.9}{2}=45$ trận. Vì không có trận hòa nên tổng số các trận thắng của 10 đội là $x_1+x_2+...+x_{10}=9+8+...+2+1=45$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
&y_1^2+y_2^2+...+y_{10}^2=\left(9-x_1\right)^2+\left(9-x_2\right)^2+...+\left(9-x_{10}\right)^2\\
\Leftrightarrow\ &y_1^2+y_2^2+...+y_{10}^2=10.9^2-18\left(x_1+x_2+...+x_{10}\right)+\left(x_1^2+x_2^2+....+x_{10}^2\right)\\
\Leftrightarrow\ &x_1^2+x_2^2+...+x_{10}^2=y_1^2+y_2^2+...+y_{10}^2
\end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 4.

1. Cho tam giác ABC nhọn nối tiếp đường tròn (O) với $AB<AC$. Gọi M là điểm thuộc cạnh BC (M kkhông trùng với B, C). Đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại điểm D khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD cắt đường thẳng AC tại điểm E khác C. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MBD cắt đường thẳng AB tại điểm F khác B.

   a) Chứng minh rằng tứ giác BECF nội tiếp đường tròn.

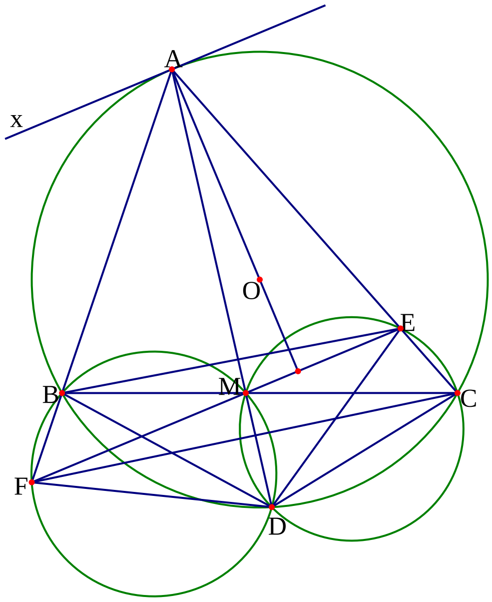
   b) Chứng minh rằng $\Delta ECD \backsim \Delta FBD$ và ba điểm E, M, F thẳng hàng.

   c) Chứng minh rằng đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Các cạnh của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $BC^2=2.BC.AC+4AC^2$. Tính số đo góc ABC.

Lời giải

1. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi M là điểm thuộc cạnh BC (M không trùng với B, C). Đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại điểm D khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD cắt đường thẳng AC tại điểm E khác C. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MBD cắt đường thẳng AB tại điểm F khác B.



a) Chứng minh tứ giác BECF nội tiếp đường tròn.

Các tứ giác BMDF và CEMD nội tiếp nên ta có $AB.AF = AM.AD = AE.AC$ nên suy ra tứ giác BECF nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $\Delta ECD \backsim \Delta FBD$ và ba điểm E, M, F thẳng hàng.

+ Để chứng minh tam giác BDF đồng dạng với tam giác CDE ta cần phải chỉ ra được $BFD = CED$ và $DBF = ECD$. Chú ý đến các tứ giác BMDF và CEMD nội tiếp đường tròn nên $BFD = AMB$, $DBF = FMD$, $DMC = DEC$, $AME = ECD$. Ta lại có $FMD = AME$ và $DMC = AMB$ nên suy ra $BFD = CED$ và $DBF = ECD$. Từ đó ta được tam giác BDF và tam giác CDE đồng dạng với nhau.

+ Do hai tam giác DBF và CDE đồng dạng nên $BDF = EDC$. Mà ta có $BDF = BMF$ và $CME = EDC$ nên $CME = BMF$. Do đó $BME + EMC = BME + BMF = EMF = 180^0$ do đó ba điểm E, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF.

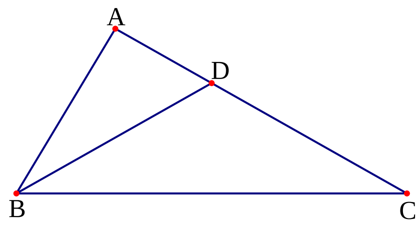
+ Lời giải 1. Kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O). Khi đó ta có OA vuông góc với Ax. Tứ giác BMDF nội tiếp đường tròn nên suy ra $AFE = ADB$. Lại có $ACB = ADB$ nên suy ra $ACB = AFE$. Vì Ax là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $xAB = ACB$. Suy ra $xAB = AFE$ nên EF song song với Ax. Mà OA vuông góc với Ax nên OA vuông góc với EF.

+ Lời giải 2. Gọi I là trực tâm tam giác ABC, giả sử AI cắt BC và đường tròn (O) lần lượt tại H và J. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Khi dó dễ dàng chứng minh được J là điểm đối xứng với H qua BC và tứ giác BICK là hình bình hành. Từ đó ta suy ra được JK song song với BC. Như vậy ta được hai cung nhỏ BJ và CK của đường tròn (O) bằng nhau. Từ đó dẫn đến $BAH = CAO$. Để ý đến các tứ giác BMDF và CEMD nội tiếp đường tròn ta có $AB.AF = AM.AN = AE.AC$ nên tứ giác BECF nội tiếp đường tròn. Từ đó ta thấy $FBC = FEC$ nên ta được $ABC = AEF$. Mà ta lại có AH vuông góc với BC nên ta suy ra được AO vuông góc với EF.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Các cạnh của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $BC^2 = 2.BC.AC + 4AC^2$***. Tính số đo góc*** ABC***.***

+ Lời giải 1. Ta đi chứng minh bài toán phụ. *Cho tam giác ABC có* $ABC = 2ACB$. *Khi đó ta luôn có* $AC^2 = AB^2 + AB.AC$.

Chứng minh. Kẻ tia phân giác của BD của tam giác ABC, khi đó $DBC = DCB = ABD$ và tam giác BCD cân tại D. Từ đó ta được



$$ADB = DBC + DCB = 2ACB = ABC$$

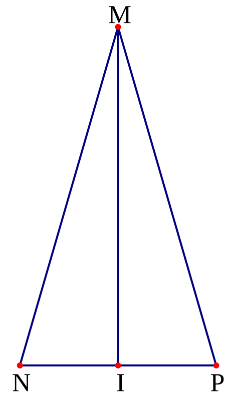
Hai tam giác ABC và ADB có $ABC = ADB$ và $ABD = ACB$ nên đồng dạng với nhau nên $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$ hay $AB^2 = AC.AD$. Mặt khác theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$ hay ta được $\frac{AD}{AD+CD} = \frac{AB}{AB+BC}$ nên $AD = \frac{AB.AC}{AB+AC}$.

Như vậy ta có $AB^2 = AC.AD = \frac{AB.AC}{AB+AB}.AC$ suy ra $AC^2 = AB^2 + AB.AC$.

Trở lại bài toán. Từ giả thiết $BC^2 = 2.BC.AC + 4AC^2$ ta được $\frac{BC^2}{AC^2} - 2\frac{BC}{AC} - 4 = 0$.

Đặt $t = \frac{BC}{AC}(t > 1)$ thì ta có phương trình $t^2 - 2t - 4 = 0$, giải phương trình ta được $t = 1 + \sqrt{5}$. Từ đó ta được $\frac{BC}{AC} = 1 + \sqrt{5}$. Để ý rằng tam giác ABC vuông tại A nên ta có $\sin ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

+ Ta đi chứng minh $\sin 18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.



Thật vậy, xét tam giác MNP cân tại M có $M = 36^0$, khi đó ta có $N = P = 72^0$ và $N = 2M$. Gọi I là trung điểm của PN, khi đó MI là đường trung trực của NP nên $NMI = PMI = 18^0$.

Trong tam giác MNI vuông ta có $\sin 18^0 = \dfrac{NI}{NM} = \dfrac{NP}{2MN}$.

Theo bài toán phụ trên thì ta có $MN^2 = NP^2 + MN.NP$ nên

suy ra $\left(\dfrac{NP}{MN}\right)^2 + \dfrac{NP}{NP} - 1 = 0$

Hay ta được $4\left(\dfrac{NP}{2MN}\right)^2 + 2\dfrac{NP}{2MN} - 1 = 0$. Đến đây ta có phương trình

$4\sin^2 18^0 + 2\sin 18^0 - 1 = 0$. Giải phương trình thì ta được $\sin 18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Như vậy ta tính được $ABC = 18^0$.

+ Lời giải 2. Gọi D là trung điểm của cạnh BC. Theo giả thiết ta có

$$(2CD)^2 = 4CD.AC + 4AC^2 \Leftrightarrow CD^2 = CD.AC + AC^2 \Leftrightarrow \frac{CD^2}{AC} = CD + AC$$

Kẻ phân giác trong AE của tam giác ACD. Theo tính chất của đường phân giác ta có $\dfrac{EC}{ED} = \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AC}{DC} \Rightarrow \dfrac{EC}{ED+EC} = \dfrac{AC}{AD+AC} \Rightarrow \dfrac{EC}{CD} = \dfrac{AC}{AC+CD}$.

Kết hợp hai kết quả ta được $\dfrac{EC}{AC} = \dfrac{CD}{CD+AC} = \dfrac{AC}{CD}$. Suy ra tam giác ACE đồng dạng với tam giác DCA nên tam giác ACE cân tại A.

Lại có $EAC = \dfrac{1}{2}CAD = \dfrac{1}{2}ACB$. Do đó $\dfrac{1}{2}ACB + ACB + ACB = 180^0$ nên $ACB = 72^0$. Từ đó suy ra $ABC = 18^0$

Câu 5. Cho x, y, z là các số thực toản mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = \left|x^3 - y^3\right| + \left|y^3 - z^3\right| + \left|z^3 - x^3\right|$$

Lời giải

Áp dụng tính chất $|a-b|\le|a|+|b|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab\le 0$.

Khi đó ta có $M\le 2\left(|x|^3+|y|^3+|z|^3\right)$. Mặt khác $x^2+y^2+z^2=8$ nên ta được

$$\begin{cases} x^2\le 8 \\ y^2\le 8 \\ z^2\le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\le 2\sqrt{2} \\ |y|\le 2\sqrt{2} \\ |z|\le 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|x^3\right|\le 2\sqrt{2}x^2 \\ \left|y^3\right|\le 2\sqrt{2}y^2 \\ \left|z^3\right|\le 2\sqrt{2}z^2 \end{cases}$$

Vậy $M\le 2\left(|x|^3+|y|^3+|z|^3\right)\le 4\sqrt{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)=32\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $(x;y;z)=\left(2\sqrt{2};0;0\right)$ hoặc $(x;y;z)=\left(-2\sqrt{2};0;0\right)$ và các hoán vị của nó. Vậy giá trị lớn nhất của M bằng $32\sqrt{2}$.

Đề số 24

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH VĨNH PHÚC

Vòng 1 – Năm học 2018 – 2019

Câu 1 (2.0 điểm).

Cho biểu thức $P=\left[\frac{\sqrt{x}+1}{x-4}-\frac{\sqrt{x}+3}{x-4\sqrt{x}+4}\right]:\left[\frac{10}{\sqrt{x}-2}+3\right]$ với $x\ge 0;x\ne 4$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả các số nguyên x để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (2.0 điểm).

Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $(d): y=\frac{2(1-m)}{m-2}x+\frac{1}{m-2}$ với m là tham số khác 2. Giả sử đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ Ox, Oy tương ứng tại A, B.

a) Khi $m=3$, tìm tọa độ các điểm A, B và tính diện tích tam giác OAB.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để tam giác OAB cân.

Câu 3 (2.0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+6x+y+5=0 \\ (x+3)^4+5y=16 \end{cases}$

b) Giải phương trình $\frac{x}{x^2-x-2}+\frac{3x}{x^2+3x-2}=1$.

Câu 4 (3.0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn có $AB<AC$ nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến tại B và C với đường tròn (O) cắt nhau tại E. AE cắt đường tròn (O) tại D khác A. Kẻ đường thẳng d đi qua E và song song với tiếp tuyến tại A của đường tròn (O), đường thẳng d cắt AB, AC lần lượt tại P và Q. Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại N khác A.

a) Chứng minh rằng tứ giác OBEC nội tiếp đường tròn và $EB^2=ED.EA$.

b) Chứng minh rằng $AB.AP=AC.AQ$ và E cách đều các đỉnh của tứ giác BCPQ.

d) Chứng minh rằng tứ giác BCND là hình thang cân.

Câu 5 (1.0 điểm). Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $(a+b-c)^2=ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{c^2}{(a+b-c)^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1 (2.0 điểm). Cho biểu thức $P=\left[\frac{\sqrt{x}+1}{x-4}-\frac{\sqrt{x}+3}{x-4\sqrt{x}+4}\right]:\left[\frac{10}{\sqrt{x}-2}+3\right]$ với $x\ge 0; x\ne 4$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả các số nguyên x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Với $x\ge 0; x\ne 4$ thì ta có

$$P=\left[\frac{\sqrt{x}+1}{x-4}-\frac{\sqrt{x}+3}{x-4\sqrt{x}+4}\right]:\left[\frac{10}{\sqrt{x}-2}+3\right]=\left[\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}-\frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)^2}\right]:\frac{3\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)^2(\sqrt{x}+2)}\cdot\frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+4}=\frac{-6\sqrt{x}-8}{(x-4)(\sqrt{x}-1)}\cdot\frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+4}=\frac{2}{4-x}$$

b) Với $x\ge 0; x\ne 4$ ta được $P=\frac{2}{4-x}$. Khi đó để P nhận giá nguyên thì $4-x$ phải là ước của 2.

Do vậy ta có $4-x\in\{-2;-1;1;2\}$ nên ta được $x\in\{2;3;5;6\}$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $x\in\{2;3;5;6\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2 (2.0 điểm).

Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $(d): y=\frac{2(1-m)}{m-2}x+\frac{1}{m-2}$ với m là tham số khác 2. Giả sử đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ Ox, Oy tương ứng tại A, B.

a) Khi $m=3$, tìm tọa độ các điểm A, B và tính diện tích tam giác OAB.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để tam giác OAB cân.

Lời giải

a) Với $m=3$ thì đường thẳng (d) được viết lại thành $y=-4x+1$. Khi đó với $y=0$ thì $x=\frac{1}{4}$ ta được điểm $A\left(\frac{1}{4};0\right)$ nằm trên trục Ox và với $x=0$ thì $y=1$ ta được điểm $B(0;1)$ nằm trên trục Oy. Tam giác OAB vuông tại O nên ta được

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.1=\frac{1}{8}(dvdt)$$

b) Tam giác OAB cân và lại có $AOB=90^0$ nên tam giác OAB cân tại O. Khi đó ta có $OA=OB$.

+ Với $m=1$ thì đường thẳng (d) trở thành $y=-1$ không cắt trục Ox. Do đó $m=1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $m\neq 1$, khi đó với $x=0$ ta được $y=\frac{1}{m-2}$, ta có điểm $B\left(0;\frac{1}{m-2}\right)$ nằm trên trục Oy. Với $y=0$ ta được $x=\frac{1}{2(m-1)}$, ta được điểm $A=\left(\frac{1}{2(m-1)};0\right)$. Từ đó

$$OA=OB\Leftrightarrow\left|\frac{1}{m-2}\right|=\left|\frac{1}{2(m-1)}\right|\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1;m\neq 2\\|m-2|=|2(m-1)|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1;m\neq 2\\\left[\begin{array}{l}m-2=2m-2\\m-2=2-2m\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\frac{4}{3}\end{array}\right.$$

Vậy có hai giá trị $m=0$ hoặc $m=\frac{4}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3 (2.0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+6x+y+5=0\\(x+3)^4+5y=16\end{cases}$

b) Giải phương trình $\frac{x}{x^2-x-2}+\frac{3x}{x^2+3x-2}=1$.

Lời giải

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+6x+y+5=0\\(x+3)^4+5y=16\end{cases}$

Biến đổi tương đương hệ phương trình đã cho ta được

$$\begin{cases} x^2+6x+y+5=0 \\ (x+3)^4+5y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2+y=4 \\ (x+3)^4+5y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x+3)^2+5y=20 \\ (x+3)^4+5y=16 \end{cases}$$

Lấy hiệu theo vế hai phương trình trên ta được

$$(x+3)^4-5(x+3)^2=-4 \Leftrightarrow (x+3)^4-5(x+3)^2+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+3)^2=1 \\ (x+3)^2=4 \end{array}\right.$$

+ Với $(x+3)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=1 \\ x+3=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-4 \end{array}\right.$. Từ đó ta tìm được $y=3$.

Do đó hệ có hai nghiệm $(x;y)=(-2;3),(-4;3)$.

+ Với $(x+3)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=2 \\ x+3=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-5 \end{array}\right.$. Từ đó ta tìm được $y=0$.

Do đó hệ có hai nghiệm $(x;y)=(-1;0),(-5;0)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là $(x;y)=(-1;0),(-5;0),(-2;3),(-4;3)$.

b) Giải phương trình $\dfrac{x}{x^2-x-2}+\dfrac{3x}{x^2+3x-2}=1$.

Điều kiện xác định của phương trình là $x^2-x-2 \neq 0; x^2+3x-2 \neq 0$.

Dễ thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho. Do đó xét $x \neq 0$, khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{x-\frac{2}{x}-1}+\frac{3}{x-\frac{2}{x}+3}=0$$

Đặt $t=x-\dfrac{2}{x}-1$, khi đó phương trình trên được viết lại thành

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{t+4}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0; t \neq -4 \\ t^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow t=\pm 2$$

+ Với $t=2$ ta có phương trình $x-\dfrac{2}{x}-1=2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x \in \{-2;1\}$

+ Với $t=-2$ ta có phương trình

$$x-\frac{2}{x}-1=-2 \Leftrightarrow x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2};\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là

$$S=\left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2};-2;1;\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$$

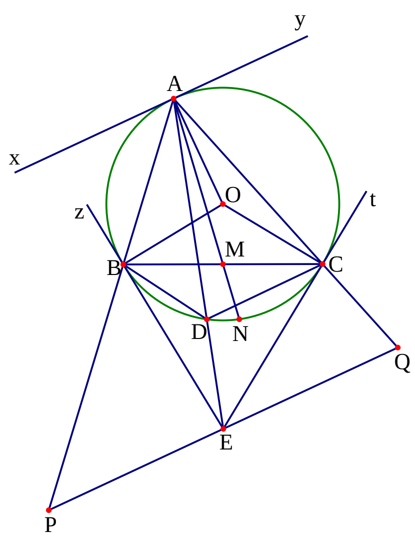
Câu 4 (3.0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến tại B và C với đường tròn (O) cắt nhau tại E. AE cắt đường tròn (O) tại D khác A. Kẻ đường thẳng d đi qua E và song song với tiếp tuyến tại A của đường tròn (O), đường thẳng d cắt AB, AC lần lượt tại P và Q. Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại N khác A.

a) Chứng minh rằng tứ giác OBEC nội tiếp đường tròn và $EB^2 = ED.EA$.

b) Chứng minh rằng $AB.AP = AC.AQ$ và E cách đều các đỉnh của tứ giác BCPQ.

c) Chứng minh rằng tứ giác BCND là hình thang cân.

Lời giải



a) Tứ giác OBEC có $OBE + OCE = 180^0$ nên nội tiếp đường tròn. Hai tam giác ABE và BDE có AEB chung và $BAD = DBE$ nên đồng dạng với nhau, từ đó ta suy $\frac{AE}{BE} = \frac{BE}{DE}$ hay $BE^2 = AE.DE$.

b) Do Ax là tiếp tuyến tại A với đường tròn (O) nên ta có $xAB = ACB$. Do Ax song song với PQ nên $BPQ = BAx$. Do đó $ACB = BPQ$. Hai tam giác ABC và QAP có BAC chung và $BPQ = ACB$ nên đồng dạng với nhau. Do vậy $\frac{AB}{AQ} = \frac{AC}{AP}$ hay ta được $AB.AP = AC.AQ$.

Ta có $BPE = BAx = ADB = ABz = EBP$ nên tam giác EBP cân tại E, do đó ta được $EB = EP$. Ta có $CQE = CAy = ADC = ACt = ECQ$ nên tam giác ECQ cân tại E, do đó ta được $EC = EQ$. Mặt khác ta lại có $BE = CE$ nên từ đó suy ra $EB = EC = EP = EQ$ hay E là tâm đường tròn ngoại tiếp của đường tròn ngoại tiếp tứ giác PBCQ.

c) ***Nhận xét.*** *Đường thẳng AD được gọi là đường đối trung của tam giác ABC. Nó chính là đường thẳng đối xứng với đường trung tuyến AM qua đường phân giác trong của tam giác ABC tại đỉnh A. Nó có nhiều tính chất rất và ứng dụng rất thú vị, là một kiến thức quan trọng trong bồi dưỡng học sinh giỏi hình học, đặc biệt ở bậc THPT. Câu (c) của đề thi* *được khai thác từ định nghĩa của đường đối trung là sự đối xứng của AD và AM qua phân giác trong tại đỉnh A. .*

+ Cách 1. Hai tam giác ABC và AQP có BAC chung và $ABC = AQP$ nên đồng dạng với nhau, tứ đó ta được $\frac{BA}{QA} = \frac{BC}{QP}$ hay $\frac{BA}{QA} = \frac{2BM}{2QD}$ hay $\frac{BA}{QA} = \frac{BM}{QD}$. Điều này dẫn đến hai tam giác ABM và AQD đồng dạng với nhau, suy ra $BAM = QAD$ hay $BAD = CAM$. Từ đó suy ra $BD = CN$ nên BC song song với DN hay BCND là hình thang cân.

+ Cách 2. Dễ chứng minh được $AB.CD = AC.BD$. Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác ABCD thì ta được $AD.BC = AB.DC + BD.AC = 2.AC.DC$. Do vậy

$$AD.BC = 2.AC.DC \Leftrightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{\frac{BC}{2}} = \frac{BD}{MC} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{MC} \Leftrightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{MC}$$

Mà ta có tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn nên $ACB = BDA$. Do vậy hai tam giác ADB và ACM đồng dạng với nhau nên $BAD = NAC$. Ta có

$BAD = \frac{1}{2}sdBD = BCD; NAC = \frac{1}{2}sdNC = NBC$. Để ý rằng $BAD = NAC$ nên ta được $BCD = NBC$ hay BCDN là hình thang cân.

+ Cách 3. Nhận xét với mọi tam giác nhọn ABC ta có $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$, với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đây là định lí sin.

Gọi M' là giao điểm của đường thẳng đối xứng với đường thẳng AD qua đường phân giác trong tại đỉnh A. Ta sẽ chứng minh M' trùng với điểm M.

Thật vậy áp dụng kết quả ở trên cho các tam giác ABM', ACM', ABE, ACE ta có và lưu ý $BAM' = CAE;\ ACM' = ABE;\ ABM' = ACE;\ CAM' = BAE$ ta có

$$\frac{M'B}{M'C} = \frac{\frac{M'A.\sin BAM'}{\sin ABM'}}{\frac{M'A.\sin CAM'}{\sin ACM'}} = \frac{\sin BAM'.\sin ACM'}{\sin ABM'.\sin CAM'} = \frac{\sin CAE.\sin ABE}{\sin ACE.\sin BAE} = \frac{CE}{AE}.\frac{AE}{BE} = 1$$

Do vậy $M'B = M'C$ nên M' là trung điểm của BC, do đó M trùng M'. Mà ta có $CAM' = BAE$ nên ta được $CAM = BAE$ suy ra BC song song với DN hay BCND là hình thang cân.

Câu 5 (1.0 điểm).

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $(a+b-c)^2 = ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{c^2}{(a+b-c)^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$$

Lời giải

Ta có $(a+b-c)^2 = ab \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1\right)^2 = \frac{a}{c}.\frac{b}{c}$

Đặt $x = \frac{a}{c}; y = \frac{b}{c} (x > 0; y > 0)$. Khi đó giả thiết được viết lại thành $(x+y-1)^2 = xy$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho giả thiết ta được $(x+y-1)^2 = xy \le \frac{1}{4}(x+y)^2$.

Do đó suy ra $|x+y-1| \le \frac{1}{2}(x+y)$ hay ta được $\frac{2}{3} \le x+y \le 2$. Biểu thức đã cho được viết lại thành

$$P = \frac{1}{(x+y-1)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} = \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{|x+y-1|}{x+y}$$
$$= \frac{1}{2xy} + \frac{1}{2xy} + \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{|x+y-1|}{x+y} \ge \frac{2}{(x+y)^2} + \frac{4}{x^2+y^2+2xy} + \frac{x+y-1}{x+y}$$
$$= \frac{4}{(x+y)^2} + \frac{2}{(x+y)^2} - \frac{1}{x+y} + 1 = \frac{4}{(x+y)^2} + \frac{2-(x+y)}{(x+y)^2} + 1 \ge \frac{4}{2^2} + \frac{2-2}{2^2} + 1 = 2$$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2, xẩy ra tại $x = y = 1$ hay $a = b = c$.

Đề số 25

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH VĨNH PHÚC

Vòng 2 – Năm học 2018 – 2019

Câu 1 (3.0 điểm).

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2mx - m + 1$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn hệ thức $2x_1 + 2x_2 + y_1y_2 = 0$.

b) Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{x-4} = \sqrt{-x^2 + 6x - 1}$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$

Câu 2 (2.0 điểm). Cho phương trình $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 9!\,(1)$, trong đó x, y, z là ẩn và 9! là tích của các số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến 9.

a) Chứng minh rằng nếu tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn (1) thì x, y, z đều chia hết cho 4.

b) Chứng minh rằng không tồn các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn (1).

Câu 3 (1.0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2}{c^2 + ca + a^2} \ge 1$$

Câu 4 (3.0 điểm). Cho hình thoi ABCD có $AC > BD$. Đường tròn nội tiếp (O) của tứ giác ABCD tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA theo thứ tự tại E, F, G, H. Xét điểm K trên đoạn HA và điểm L trên đoạn AE sao cho KL tiếp xúc với đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng $LOK = LBO$ và $BL.DK = OB^2$.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác CFL cắt cạnh AB tại M khác L và đường tròn ngoại tiếp tam giác CKG cắt cạnh AD tại điểm N khác K. Chứng minh rằng bốn điểm K, L, M, N cùng nằm trên một đường tròn.

c) Lấy các điểm P, Q tương ứng trên các đoạn CF, CG sao cho LP song song với KQ. Chứng minh rằng PQ tiếp xúc với đường tròn (O).

Câu 5 (1.0 điểm). Một bảng ô vuông gồm n hàng và n cột (n là số nguyên dương). Các hàng và cột được đánh số từ 1 đến n (các hàng đánh số từ trên xuông và các cột đánh số từ trái qua phải). Ô vuông nằm ở hàng i, cột j $(i,j=1;2;...;n)$ của bảng được gọi là ô $(i;j)$. Tại mỗi ô của bảng điền một số 0 hặc 1 sao cho nếu ô $(i;j)$ điền số 0 thì $a_i+b_j\ge n$, trong đó a_i là số số 1 trên dòng i và b_j là số số 1 trên cột j. Gọi P là tổng các số trong các ô của bảng hình vuông đã cho.

a) Xây dựng một bảng ô vuông thỏa mãn yêu cầu bài toán trong trường hợp $n=4$ và $P=8$.

b) Chứng minh rằng $P\ge\left[\frac{n^2}{2}\right]$ với $\left[\frac{n^2}{2}\right]$ là phần nguyên của $\frac{n^2}{2}$.

Hướng dẫn giải

Câu 1 (3.0 điểm).

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $(d):y=2mx-m+1$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ thỏa mãn hệ thức $2x_1+2x_2+y_1y_2=0$.

b) Giải phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=\sqrt{-x^2+6x-1}$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=5\\x+y+xy=5\end{cases}$

Lời giải

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $(d):y=2mx-m+1$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ thỏa mãn hệ thức $2x_1+2x_2+y_1y_2=0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là

$$x^2 = 2mx - m + 1 \text{ hay } x^2 - 2mx + m - 1 = 0$$

Để đường thẳng (d) và Parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt. Ta có $\Delta = m^2 - m + 1 > 0$ đúng với mọi m nên phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt. Khi đó hoành độ các giao điểm A và B là nghiệm của phương trình trên, do đó theo hệ thức Vi – et ta có $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = m - 1$. Để ý rằng $y_1 = x_1^2; y_2 = x_2^2$ nên ta có

$$2x_1 + 2x_2 + y_1y_2 = 0 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) + (x_1x_2)^2 = 0$$
$$\Rightarrow 4m + (m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$$

Vậy với $m = -1$ thì đường thẳng (d) và Parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{x-4} = \sqrt{-x^2 + 6x - 1}$.

Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} x - 4 \ge 0 \\ -x^2 + 6x - 1 \ge 0 \end{cases}$.

Bình phương hai vế phương trình đã cho ta được

$$2x - 4 + 2\sqrt{x^2 - 4x} = -x^2 + 6x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2\sqrt{x^2 - 4x} - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 - 4x} - 1\right)\left(\sqrt{x^2 - 4x} + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $x = 2 + \sqrt{5}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$

Biến đổi tương đương hệ phương trình đã cho ta được

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y + xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 5 \\ 2(x+y) + 2xy = 10 \end{cases}$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ trên ta được

$$(x+y)^2 + 2(x+y) = 15 \Leftrightarrow (x+y)^2 + 2(x+y) - 15 = 0 \Leftrightarrow x + y \in \{-5; 3\}$$

+ với $x + y = -5$, kết hợp với phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=-5 \\ x+y+xy=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-5 \\ xy=10 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm do $(x+y)^2 < 4xy$.

+ với $x+y=3$, kết hợp với phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x+y+xy=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2; y=1 \\ x=1; y=2 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x;y)=(1;2),(2;1)$.

Câu 2 (2.0 điểm). Cho phương trình $x^3+2y^3+4z^3=9!\,(1)$, trong đó x, y, z là ẩn và 9! là tích của các số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến 9.

a) Chứng minh rằng nếu tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn (1) thì x, y, z đều chia hết cho 4.

b) Chứng minh rằng không tồn các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn (1).

Lời giải

a) Chứng minh rằng nếu tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn (1) thì x, y, z đều chia hết cho 4.

Phương trình đã cho được viết lại thành $x^3+2y^3+4z^3=2^7.3^4.5.7$. Do đó từ phương trình ta suy ra được x^3 chia hết cho 2 nên x chia hết cho 2. Đặt $x=2x_1\ (x_1 \in Z)$ và thay vào phương trình trên thì ta được

$$(2x_1)^3+2y^3+4z^3=2^7.3^4.5.7 \Leftrightarrow 4x_1^3+y^3+2z^3=2^6.3^4.5.7$$

Từ phương trình trên ta lại được y^3 chia hết cho 2 nên y chia hết cho 2. Đặt $y=2y_1\ (y_1 \in Z)$ và thay vào phương trình thì ta được

$$4x_1^3+(2y_1)^3+2z^3=2^6.3^4.5.7 \Leftrightarrow 2x_1^3+4y_1^3+z^3=2^5.3^4.5.7$$

Đến đây thì ta thu được z^3 chia hết cho 2 nên z chia hết cho 2. Đặt $z=2z_1\ (z_1 \in Z)$ và thay vào phương trình trên ta được

$$2x_1^3+4y_1^3+(2z_1)^3=2^5.3^4.5.7 \Leftrightarrow x_1^3+2y_1^3+4z_1^3=2^4.3^4.5.7$$

Lập luận tương tự như trên ta được

$$8x_2^3+16y_2^3+32z_2^3=2^4.3^4.5.7 \Leftrightarrow x_2^3+2y_2^3+4z_2^3=2.3^4.5.7$$

Như vậy $x=4x_2;y=4y_2;z=4z_2\left(x_2;y_2;z_2\in Z\right)$ nên x, y, z cùng chia hết cho 4.

b) Chứng minh không tồn các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn (1).

Giả sử tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn phương trình (1). Khi đó theo kết quả trên thì tồn tại các số nguyên dương x_2,y_2,z_2 sao cho $x=4x_2;y=4y_2;z=4z_2$ và phương trình (1) được viết lại thành $x_2^3+2y_2^3+4z_2^3=2.3^4.5.7$. Từ phương trình ta suy ra được x_2^3 chia hết cho 2 nên suy ra x_2 chia hết cho 2. Đặt $x_2=2x_3$ và thay vào phương trình trên ta được $4x_3^3+y_2^3+2z_2^3=3^4.5.7$. Để ý rằng với n là một số nguyên thì n^3 chia 9 có số dư là một trong các số $-1;0;1$. Đến đât ta xét các trường hợp sau.

+ Trường hợp 1. Ba số x_3,y_2,z_2 không cùng chia hết cho 3. Khi đó từ $4x_3^3+y_2^3+2z_2^3=3^4.5.7$ suy ra trong ba số x_3,y_2,z_2 có nhiều nhất một số chia hết cho 3. Từ đó xẩy ra một trong các khả năng sau đây

$$4x_3^3+y_2^3+2z_2^3\equiv\pm4\pm1\pm2\pmod 9$$

$$4x_3^3+y_2^3+2z_2^3\equiv\pm4\pm1\pmod 9$$

$$4x_3^3+y_2^3+2z_2^3\equiv\pm1\pm2\pmod 9$$

$$4x_3^3+y_2^3+2z_2^3\equiv\pm4\pm2\pmod 9$$

Ta thấy rằng trong các khả nằng xẩy ra trên thì $4x_3^3+y_2^3+2z_2^3$ không chia hết cho 9, điều này mâu thuẫn với phương trình $4x_3^3+y_2^3+2z_2^3=3^4.5.7$. Do đó trương hợp 1 không xẩy ra.

+ Trường hợp 2. Ba số x_3,y_2,z_2 cùng chia hết cho 3. Khi đó tồn tạ các số nguyên x_4,y_3,z_3 thỏa mãn $x_3=3x_4;y_2=3y_3;z_2=3z_3$. Thay vào phương trình $4x_3^3+y_2^3+2z_2^3=3^4.5.7$ thì ta thu được phương trình $4x_4^3+y_3^3+2z_3^3=3.5.7=105$. Từ phương trình ta nhận thấy y_3 là số nguyên dương lẻ và cũng từ phương trình ta có $y_3^3<105$ nên $y_3<5$. Do đó suy ra $y_3\in\{1;3\}$, thử trực tiếp các giá trị nhận được ta thấy không thỏa mãn. Do đó trương hợp 2 cũng không xẩy ra.

Vậy không tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3 (1.0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\ge 1$$

Lời giải

Do a, b, c là các số dương nên bất đẳng thức cần chứng mính được viết lại thành

$$\frac{1}{1+\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{1}{1+\frac{c}{b}+\left(\frac{c}{b}\right)^2}+\frac{1}{1+\frac{a}{c}+\left(\frac{a}{c}\right)^2}\ge 1$$

Đặt $x=\frac{b}{a};y=\frac{c}{b};z=\frac{a}{c}$, khi đó ta được x, y, z dương và $xyz=1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trên được viết lại thành $\frac{1}{1+x+x^2}+\frac{1}{1+y+y^2}+\frac{1}{1+z+z^2}\ge 1$. Biến đổi tương đương ta được

$$\begin{aligned}&\left(1+y+y^2\right)\left(1+z+z^2\right)+\left(1+x+x^2\right)\left(1+z+z^2\right)+\left(1+x+x^2\right)\left(1+y+y^2\right)\\&\qquad\ge\left(1+x+x^2\right)\left(1+y+y^2\right)\left(1+z+z^2\right)\\&\Leftrightarrow 3+2\left(x+y+z\right)+2\left(x^2+y^2+z^2\right)+xy+yz+zx+x^2y+xy^2\\&\qquad+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2y^2\ge 1+x+y+z+2\left(xy+yz+zx\right)\\&\qquad+xyz+xyz\left(x+y+z\right)+x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2+y^2+z^2+z^2x+zx^2\\&\qquad+xyz\left(xy+yz+zx\right)+x^2y^2+y^2z^2+z^2y^2+x^2y^2z^2\\&\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx\Leftrightarrow\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2\ge 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng với mọi x, y, z dương.

Do vậy phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

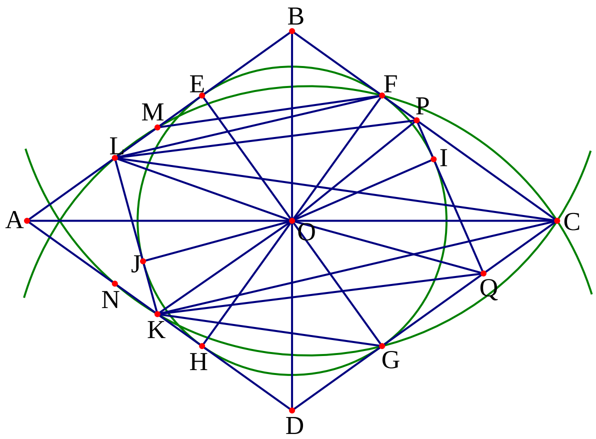
Câu 4 (3.0 điểm). Cho hình thoi ABCD có $AC>BD$. Đường tròn nội tiếp (O) của tứ giác ABCD tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA theo thứ tự tại E, F, G, H. Xét điểm K trên đoạn HA và điểm L trên đoạn AE sao cho KL tiếp xúc với đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng $LOK=LBO$ và $BL.DK=OB^2$.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác CFL cắt cạnh AB tại M khác L và đường tròn ngoại tiếp tam giác CKG cắt cạnh AD tại điểm N khác K. Chứng minh rằng bốn điểm K, L, M, N cùng nằm trên một đường tròn.

c) Lấy các điểm P, Q tương ứng trên các đoạn CF, CG sao cho LP song song với KQ. Chứng minh rằng PQ tiếp úc với đường tròn (O).

Lời giải



a) Chứng minh $LOK = LBO$ *và* $BL.DK = OB^2$.

+ Gọi J là tiếp điểm của KL với đường tròn (O). Khi đó theo tính chất tiếp tuyến với đường tròn ta có $LOJ = LOE$ và $KOJ = KOH$ nên ta suy ra được

$$LOK = \frac{1}{2}EOH = \frac{1}{2}\left(180^0 - 2BOE\right) = \frac{1}{2}\left[180^0 - 2\left(90^0 - LBO\right)\right] = LBO$$

+ Mặt khác ta lại có $DOL = LOK + KOD = LBO + BLO = LOK + BLO$ nên $KOD = BLO$. Kết hợp với $LOK = LBO$ ta được hai tam giác BLO và DOK đồng dạng với nhau, suy ra $\frac{BL}{OD} = \frac{OB}{DK}$ hay ta được $BL.DK = OB.OD = OB^2$.

b) Chứng minh bốn điểm K, L, M, N cùng nằm trên một đường tròn.

Do bốn điểm C, F, L, M cùng nằm trên một đường tròn nên ta có $BFM = BLC$ suy ra hai tam giác BFM và BLC đồng dạng với nhau. Để ý rằng tam giác BOC vuông tại O có OF là đường cao nên ta được $BO^2 = BF.BC = BM.BL$. Mà ra đã có $BL.DK = OB^2$ nên suy ra $BM = DK$. Do đó M và K đối xứng với nhau qua AC. Chứng minh hoàn toàn tương tự thì N và L đối xứng với nhau qua AC. Do vậy tứ giác KMLN là một hình thang cân nên tứ giác KMLN nội tiếp đường tròn.

c) Chứng minh PQ tiếp xúc với đường tròn (O).

Do BC song song với DA và LP song song với LQ nên suy ra $BPL = DKQ$, do đó hai tam giác BPL và DKQ đồng dạng nên $\frac{BP}{DK} = \frac{BL}{DQ}$ hay $BP.DQ = BL.DK$. Do vậy ta suy ra được $BP.DQ = BL.DK = BO^2$ hay $\frac{BP}{BO} = \frac{BO}{DQ} = \frac{DO}{DQ}$ nên hai tam giác BPO và DOQ đồng dạng với nhau, đến đây thì ta thu được $\frac{OP}{OQ} = \frac{BP}{DO} = \frac{BP}{BO}$. Mặt khác ta lại có $POQ = 180^0 - BOP - DOQ = 180^0 - BOP - BPO = OBP = QDO$. Như vậy các tam giác BOP, OQP và DQO đồng dạng với nhau, điều này dẫn đến $BPO = OPQ$ và $PQO = OQD$. Gọi I là hình chiếu của O trên PQ suy ra hai tam giác vuông OFP và OIP bằng nhau nên $OI = OF$. Do vậy PQ tiếp xúc với đường tròn (O) tại I.

Câu 5 (1.0 điểm). Một bảng ô vuông gồm n hàng và n cột (n là số nguyên dương). Các hàng và cột được đánh số từ 1 đến n (các hàng đánh số từ trên xuông và các cột đánh số từ trái qua phải). Ô vuông nằm ở hàng i, cột j ($i, j = 1; 2; ...; n$) của bảng được gọi là ô $(i; j)$. Tại mỗi ô của bảng điền một số 0 hặc 1 sao cho nếu ô $(i; j)$ điền số 0 thì $a_i + b_j \geq n$, trong đó a_i là số số 1 trên dòng i và b_j là số số 1 trên cột j. Gọi P là tổng các số trong các ô của bảng hình vuông đã cho.

a) Xây dựng một bảng ô vuông thỏa mãn yêu cầu bài toán trong trường hợp $n = 4$ và $P = 8$.

b) Chứng minh rằng $P \geq \left[\frac{n^2}{2}\right]$ với $\left[\frac{n^2}{2}\right]$ là phần nguyên của $\frac{n^2}{2}$.

Lời giải

a) Xây dựng một bảng ô vuông thỏa mãn yêu cầu bài toán trong trường hợp $n = 4$ và $P = 8$.

Ta đưa ra một cách xây dựng bảng thỏa mãn yêu cầu bài toán như sau

0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0

b) Chứng minh rằng $P \ge \left[\frac{n^2}{2}\right]$ với $\left[\frac{n^2}{2}\right]$ là phần nguyên của $\frac{n^2}{2}$.

Giả sử $k = \min\left\{a_1; a_2; a_3; ...; a_n; b_1; b_2; b_3; ...; b_n\right\}$. Xét hàng có đúng k số 1 là dòng m. Xét k cột chứa các ô có số 1 của hàng m, mỗi cột như vậy chứa ít nhất k số 1 nên suy ra số số 1 trong k cột này lớn hơn hoặc bằng k^2. Trong hàng m này có chứa $n-k$ số 0. Xét $n-k$ cột chứa các ô có số 0 của hàng m này, trong mỗi cột chứa ít nhất $n-k$ số 1 (vì tổng số số 1 trên hàng và cột chứa số 0 lớn hơn hoặc bằng n, trong đó số số 1 trong hàng m là bằng k nên suy ra mỗi cột chứa sô 0 thuộc hàng m sẽ lớn hơn hoặc bằng $n-k$) nên suy ra số số 1 trong $n-k$ cột này lớn hơn hoặc bằng $(n-k)^2$. Từ đó ta có

$$P \ge k^2 + (n-k)^2 = \frac{k^2}{1} + \frac{(n-k)^2}{1} \ge \frac{(k+n-k)^2}{2} = \frac{n^2}{2} \ge \left[\frac{n^2}{2}\right]$$

Do vậy ta được $P \ge \left[\frac{n^2}{2}\right]$.

Đề số 26

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH TRÀ VINH

Năm học 2018 – 2019

Bài 1 (2.0 điểm).

Cho biểu thức $Q = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right) : \dfrac{y}{x - \sqrt{x^2 - y^2}}$ với $x > y > 0$.

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Xác định giá trị của biểu thức Q khi $x = 3y$.

Bài 2 (1.0 điểm).

Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$. Tìm a, b biết đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol $(P): y = x^2$ tại điểm $A(-1;1)$.

Bài 3 (2.0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \sqrt{x^2 - 4}} = 8 - x^2$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y + 1 \\ xy = x + 1 \end{cases}$.

Bài 4 (1.0 điểm)

Với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm:

$$\left(b^2 + c^2 - a^2\right)x^2 - 4bcx + \left(b^2 + c^2 - a^2\right) = 0.$$

Bài 5 (1.0 điểm)

Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{2}{y^2 + z^2} + \frac{2}{z^2 + x^2} \le \frac{x^3 + y^3 + z^3}{2xyz} + 3$$

Bài 6 (3.0 điểm).

Từ một điểm A nằm bên ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (với B và C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy điểm M, vẽ MI vuông góc với AB tại I và vẽ MK vuông góc với AC tại K.

a) Chứng minh rằng AIMK là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Vẽ MP vuông góc với BC tại P. Chứng minh rằng $MPK = MIP$.

c) Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để tích $MI.MK.MP$ đạt giá trị lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1 (2.0 điểm).

Cho biểu thức $Q=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right):\dfrac{y}{x-\sqrt{x^2-y^2}}$ với $x>y>0$.

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Xác định giá trị của biểu thức Q khi $x=3y$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức Q. Với $x>y>0$ ta có

$$Q=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right):\frac{y}{x-\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{y}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{x^2-x^2+y^2}{y\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{\left(\sqrt{x-y}\right)^2}{\sqrt{x+y}.\sqrt{x-y}}=\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}$$

b) Xác định giá trị của biểu thức Q khi $x=3y$.

Với $x>y>0$ ta được $Q=\dfrac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}$. Do đó khi $x=3y$ thì ta được

$$Q=\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}=\frac{\sqrt{3y-y}}{\sqrt{3y+y}}=\frac{\sqrt{2y}}{\sqrt{4y}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bài 2 (1.0 điểm). Cho đường thẳng $(d): y=ax+b$. Tìm a, b biết đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol $(P): y=x^2$ tại điểm $A(-1;1)$.

Lời giải

Đường thẳng $(d): y=ax+b$ đi qua điểm $A(-1;1)$ nên ta có $1=-a+b \Leftrightarrow b=a+1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$ax+b=x^2 \Leftrightarrow x^2-ax-b=0$$

Từ đó ta được $x^2 - ax - a - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1-a) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; a+1\}$

Vì (d) tiếp xúc với parabol $(P): y = x^2$ tại điểm $A(-1;1)$ nên phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -1$.

Do vậy ta được $-1 = a+1 \Leftrightarrow a = -2 \Rightarrow b = -2+1 = -1$

Vậy $a = -2; b = -1$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 3 (2.0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \sqrt{x^2 - 4}} = 8 - x^2$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y + 1 \\ xy = x + 1 \end{cases}$.

Lời giải

a) Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \sqrt{x^2 - 4}} = 8 - x^2$.

Điều kiện xác định của phương trình là $x^2 - 4 \ge 0$. Biến đổi phương trình ta được

$$\sqrt{\frac{x^2}{4} + \sqrt{x^2 - 4}} = 8 - x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4\sqrt{x^2 - 4}} = 16 - 2x^2$$

Từ đó ta có điều kiện có nghiệm của phương trình là $2 \le |x| \le 2\sqrt{2}$

Đặt $y = \sqrt{x^2 - 4}$ $(y \ge 0)$, khi đó ta có $x^2 = y^2 + 4$. Phương trình trên được viết lại thành

$$\sqrt{y^2 + 4 + 4y} = 16 - 2(y^2 + 4) \Leftrightarrow \sqrt{(y+2)^2} = 8 - 2y^2 \Leftrightarrow |y+2| = 8 - 2y^2$$

$$\Leftrightarrow y + 2 = 8 - 2y^2 \Leftrightarrow 2y^2 + y - 6 = 0 \Leftrightarrow (y+2)(2y-3) = 0 \Leftrightarrow 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$$

Với $y = \dfrac{3}{2}$ ta có $x^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{5}{2}$, thỏa mãn điều kiện $2 \le |x| \le 2\sqrt{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{\dfrac{-5}{2}; \dfrac{5}{2}\right\}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y + 1 \\ xy = x + 1 \end{cases}$.

Dễ thấy với $x = 0$ hệ phương trình không có nghiệm.

Xét $x \neq 0$, khi đó hệ phương trình được biến đổi như sau.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y + 1 \\ xy = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y + 1 = 2 \\ y = 1 + \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 2 \\ y - 1 = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Từ đó ta được

+ Với $x = 1$ ta có phương trình $y = 1 + \dfrac{1}{1} \Leftrightarrow y = 2$

+ Với $x = -1$ ta có phương trình $y = 1 + \dfrac{1}{-1} \Leftrightarrow y = 0$.

Vậy các nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = (1; 2), (-1; 0)$.

Bài 4 (1.0 điểm). Với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm:

$$(b^2 + c^2 - a^2)x^2 - 4bcx + (b^2 + c^2 - a^2) = 0.$$

Lời giải

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên a, b, c là các số thực dương thỏa mãn

$$b + c - a > 0; a + b - c > 0; a + c - b > 0$$

Ta đi xét các trường hợp như sau.

+ Trường hợp 1. Với $b^2 + c^2 - a^2 = 0$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành $-4bcx = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Như vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

+ Trường hợp 2. Với $b^2 + c^2 - a^2 \neq 0$. Khi đó phương trình đã cho là phương trình bậc hai. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \Delta' &= (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \\ &= \left[(b+c)^2 - a^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right] = (a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b) \end{aligned}$$

Do ta đã có $b + c - a > 0; a + b - c > 0; a + c - b > 0$ nên $\Delta' > 0$, suy ra phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm. Bài toán được chứng minh hoàn tất.

Bài 5 (1.0 điểm). Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{2}{y^2+z^2}+\frac{2}{z^2+x^2}\le\frac{x^3+y^3+z^3}{2xyz}+3$$

Lời giải

Vì x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=2$ nên ta có

$$\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{2}{y^2+z^2}+\frac{2}{z^2+x^2}\le\frac{x^3+y^3+z^3}{2xyz}+3$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2+x^2}\le\frac{x^2}{2yz}+\frac{y^2}{2zx}+\frac{z^2}{2xy}+3$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{z^2}{x^2+y^2}+1+\frac{x^2}{y^2+z^2}+1+\frac{y^2}{z^2+x^2}\le\frac{x^2}{2yz}+\frac{y^2}{2zx}+\frac{z^2}{2xy}+3$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{y^2+z^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2}\le\frac{x^2}{2yz}+\frac{y^2}{2zx}+\frac{z^2}{2xy}$$

Để ý rằng $\left(x-y\right)^2\ge 0\Leftrightarrow x^2+y^2\ge 2xy\Leftrightarrow\frac{z^2}{x^2+y^2}\le\frac{z^2}{2xy}$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{y^2}{z^2+x^2}\le\frac{y^2}{2zx};\ \frac{z^2}{x^2+y^2}\le\frac{z^2}{2xy}$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^2}{y^2+z^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2}\le\frac{x^2}{2yz}+\frac{y^2}{2zx}+\frac{z^2}{2xy}$$

Do vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

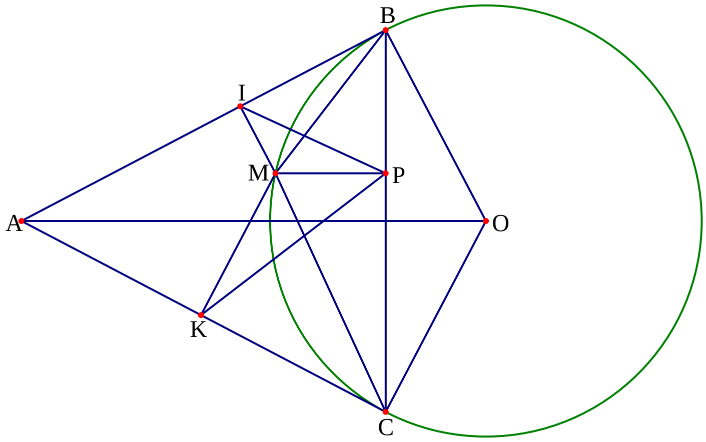
Bài 6 (3.0 điểm). Từ một điểm A nằm bên ngoài đường tròn $\left(O;R\right)$ vẽ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (với B và C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy điểm M, vẽ MI vuông góc với AB tại I và vẽ MK vuông góc với AC tại K.

a) Chứng minh rằng AIMK là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Vẽ MP vuông góc với BC tại P. Chứng minh rằng $MPK=MIP$.

c) Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để tích $MI.MK.MP$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) Chứng minh rằng AIMK là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Tứ giác AIMK có $AIM = AKM = 90^0$ nên ta có $AIM + AKM = 180^0$ nên tứ giác AIMK nội tiếp đường tròn.

b) Vẽ MP vuông góc với BC tại P. Chứng minh rằng $MPK = MIP$.

Chứng minh tương tự như trên ta có các tứ giác BIMP và CKMP nội tiếp đường tròn. Từ đó ta được $MIP = MBP$ và $MCK = MPK$. Mà ta có $MBC = MCK$ nên ta suy ra được $MPK = MIP$.

c) Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để tích $MI.MK.MP$ ***đạt giá trị lớn nhất.***

Chứng minh tương tự ta cũng được có $MPI = MKP$. Kết hợp với $MPK = MIP$ ta được hai tam giác MPK và MIP đồng dạng với nhau. Do đó ta được $\frac{MP}{MI} = \frac{MK}{MP}$ hay ta có $MP^2 = MI.MK$ suy ra $MI.MK.MP = MP^2.MP = MP^3$. Do đó tích $MI.MK.MP$ lớn nhất khi và chỉ khi MP lớn nhất, điều này chỉ xẩy ra khi M là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Vậy khi M là điểm chính giữa của cung nhỏ BC thì tích $MI.MK.MP$ đạt giá trị lớn nhất.

Đề số 27

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH PHÚ THỌ

Chuyên Toán – Năm học 2018 – 2019

Bài 1 (2.0 điểm).

a) Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thỏa mãn

$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}=x$, với x là một số thực. Tính $P=xabc$.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=9$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^3+y^3+z^3+3xyz$.

Bài 2 (2.0 điểm). Cho a là số nguyên dương. Giả sử $x_1;x_2;x_3\left(x_1<x_2<x_3\right)$ là các nghiệm của phương trình $x^3-3x^2+\left(2-a\right)x+a=0$.

a) Chứng minh rằng $A=4\left(x_1+x_2\right)-x_1^2+x_2^2+x_3^2$ không đổi khi a thay đổi.

b) Đặt $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n\left(n\in N\right)$. Chứng minh rằng S_n là số nguyên lẻ với mọi $n\in N$.

Bài 3 (2.0 điểm).

a) Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2\left(y+3\right)=y\left(x^2-3\right)^2$.

b) Giải phương trình $x^2-2\sqrt{2x-1}=\frac{13x^2-28x+24}{2x+1}$.

Bài 4 (3.0 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ và điểm H cố định trên đoạn OA (H khác O và A). Đường thẳng qua H và vuông góc với AB cắt nửa đường tròn đã cho tại C. Gọi E là điểm thay đổi trên cung AC (E khác A và C) và F là điểm thay đổi trên cung BC (F khác B và C) sao cho $EHC=FHC$.

a) Chứng minh rằng tứ giác EHOF nội tiếp đường tròn.

b) Gọi $R^{'}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác EHOF. Tính góc EHF khi $R=R^{'}$.

c) Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5 (1.0 điểm). Trung tâm thành phố Việt Trì có tất cả 2019 bóng đèn chiếu sáng đô thị, bao gồm ba loại đèn: Đèn ánh sáng trắng có 671 bóng, đèn ánh sáng vàng nhạt có 673 bóng, đèn ánh sáng đỏ có 675 bóng. Vào dịp giỗ tổ Hùng Vương người ta thay bóng đèn theo quy luật sau: Mỗi lần tháo bỏ hai bóng đèn khác loại và thay vào đó hai bóng đèn thuộc loại còn lại. Hỏi đến một lúc nào đó có thể tất cả các bóng đèn của trung tâm thành phố đều cùng thuộc một loại không?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1 (2.0 điểm).

a) Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thỏa mãn $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}=x$, với x là một số thực. Tính $P=xabc$.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=9$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^3+y^3+z^3+3xyz$.

Lời giải

a) Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thỏa mãn $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}=x$, với x là một số thực. Tính $P=xabc$.

+ Lời giải 1. Từ $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}=x$ ta được $ab+1=bx; bc+1=cx; ca+1=ax$. Do đó suy ra $bx^2=(ab+1)x=abx+x=(ca+1)b+x=abc+b+x$ nên ta được $b(x^2-1)=abc+x$. Lập luận hoàn toàn tương tự thì ta có $c(x^2-1)=abc+x; a(x^2-1)=abc+x$. Đến đây ta suy ra được $a(x^2-1)=b(x^2-1)=c(x^2-1)$. Mà do a, b, c là các số đôi một khác nhau nên từ đẳng thức trên ta suy ra được $x^2=1$ nên $abc+x=0$ hay $abc=-x$.

Vậy $P=abcx=-x^2=-1$.

+ Lời giải 2. Từ giả thiết $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}$ ta được $a-b=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{b-c}{bc}$.

Hoàn toàn tương tự thì ta được $b-c=\frac{c-a}{ca}; c-a=\frac{a-b}{ab}$.

Như vậy ta được $(a-b)(b-c)(c-a)=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{a^2b^2c^2}$.

Mà do a, b, c là các số đôi một khác nhau nên từ đẳng thức trên ta được $a^2b^2c^2=1$ hay $abc=\pm1$.

Nếu $abc=1$, khi đó từ $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}=x$ ta được $a+ac=b+ba=c+cb=x$.

Suy ra $x^3=abc(a+1)(b+1)(c+1)=abc+ab+bc+ca+a+b+c+1$.

Lại có $3x=ab+bc+ca+a+b+c$. Để ý rằng $abc=1$ ta suy ra được $x^3=x+2$.

$$x^3=3x+2 \Leftrightarrow x^3-3x-2=0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2)=0 \Leftrightarrow x\in\{-1;2\}$$

Do vậy ta có $P=abcx=-1$.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=9$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^3+y^3+z^3+3xyz$.

+ Lời giải 1. Do x, y, z là các số dương nên áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}=\frac{9}{9}=1$$

Kết hợp với $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ suy ra dấu đẳng thức của bất đẳng thức trên xẩy ra, tức là $x=y=z$.

Kết hợp với $x+y+z=9$ ta được $x=y=z=3$. Do đó $T=x^3+y^3+z^3+3xyz=162$.

+ Lời giải 2. Từ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ ta được $xy+yz+zx=xyz$. Mặt khác dễ thấy

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right]=9\left(9^2-3xyz\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho các số dương ta được $x+y+z\ge3\sqrt[3]{xyz}$.

Do vậy ta được $xyz\le\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=27$. Đến đây thì ta có

$$\begin{aligned}T&=x^3+y^3+z^3+3xyz=x^3+y^3+z^3-3xyz+6xyz=729-27xyz+6xyz\\&=729-21xyz\ge729-21.27=162\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 162, xẩy ra khi $x = y = z = 3$.

Bài 2 (2.0 điểm). Cho a là số nguyên dương. Giả sử $x_1; x_2; x_3 \left(x_1 < x_2 < x_3\right)$ là các nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 + \left(2 - a\right)x + a = 0$.

a) Chứng minh rằng $A = 4\left(x_1 + x_2\right) - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ không đổi khi a thay đổi.

b) Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n \left(n \in N\right)$. Chứng minh rằng S_n là số nguyên lẻ với mọi $n \in N$.

Lời giải

a) Chứng minh rằng $A = 4\left(x_1 + x_2\right) - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ không đổi khi a thay đổi.

+ Lời giải 1. Ta có $x^3 - 3x^2 + \left(2 - a\right)x + a = 0 \Leftrightarrow \left(x - 1\right)\left(x^2 - 2x - a\right) = 0$. Do đó ta được $x = 1$ hoặc $x^2 - 2x - a = 0$. Do a là số nguyên dương nên phương trình $x^2 - 2x - a = 0$ luôn có hai nghiệm phân biêt. Mặt khác thao hệ thức Vi – et thì tổng hai nghiệm của phương trình là 2 nên trong hai nghiệm có một nghiệm lớn hơn 1. Lại có tích hai nghiệm là một số âm nên trong hai nghiệm có một nghiệm âm. Do đó kết hợp với $x_1 < x_2 < x_3$ ta được $x_1; x_3$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - a = 0$. Từ đó suy ra $x_2 = 1; x_1 + x_3 = 2; x_1x_3 = -a$. Ta có

$$\begin{aligned} A &= 4\left(x_1 + x_2\right) - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4x_2 + 4x_1 - -x_1^2 + 1 + x_3^2 \\ &= 5 + 4x_1 + \left(x_3 - x_1\right)\left(x_3 + x_1\right) = 5 + 4x_1 + 2\left(x_3 - x_1\right) = 5 + 2\left(x_1 + x_3\right) = 5 + 2.2 = 9 \end{aligned}$$

+ Lời giải 2. Ta có $x^3 - 3x^2 + \left(2 - a\right)x + a = 0 \Leftrightarrow \left(x - 1\right)\left(x^2 - 2x - a\right) = 0$ đo đó ta được $x = 1$ hoặc $x^2 - 2x - a = 0$.

Với phương trình $x^2 - 2x - a = 0$ ta có $\Delta = 4 + 4a > 0$ với mọi a là số nguyên dương.

Do đó phương trình có hai nghiêm phân biêt là $x = 1 - \sqrt{a + 1}$ và $x = 1 + \sqrt{a + 1}$.

Dễ thấy $1 - \sqrt{a + 1} < 1 < 1 + \sqrt{a + 1}$ nên kết hợp với $x_1 < x_2 < x_3$ suy ra phương trình đã cho có các nghiệm là $x_1 = 1 - \sqrt{a + 1}; x_2 = 1; x_3 = 1 + \sqrt{a + 1}$. Do vậy ta có

$$\begin{aligned} A &= 4\left(x_1 + x_2\right) - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4x_2 + 4x_1 - -x_1^2 + 1 + x_3^2 = 5 + 4x_1 + \left(x_3 - x_1\right)\left(x_3 + x_1\right) \\ &= 5 + 4\left(1 - \sqrt{a + 1}\right) + 2\left(1 + \sqrt{a + 1} - 1 + \sqrt{a + 1}\right)\left(1 + \sqrt{a + 1} - 1 - \sqrt{a + 1}\right) \\ &= 5 + 4 - 4\sqrt{a + 1} + 2.2\sqrt{a + 1} = 5 + 4 = 9 \end{aligned}$$

b) Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n \left(n \in N\right)$. Chứng minh rằng S_n là số nguyên lẻ với mọi $n \in N$.

+ Lời giải 1. Đặt $Q_n = x_1^n + x_3^n$. Ta sẽ chứng minh $Q_n = x_1^n + x_3^n$ là số chẵn với mọi số tự nhiên n. Với $n = 0$ ta có $Q_0 = x_1^0 + x_3^0 = 1 + 1 = 2$ và với $n = 1$ ta có $Q_1 = x_1 + x_3 = 2$ là các số chẵn.

Giả sử với $n = k$ thì $Q_k = x_1^k + x_3^k$ là số chẵn. Khi đó với $n = k + 2$ thì ta có

$$Q_{k+2} = x_1^{k+2} + x_3^{k+2} = \left(x_1 + x_3\right)\left(x_1^{k+1} + x_3^{k+1}\right) - x_1x_3\left(x_1^k + x_3^k\right) = 2\left(x_1^{k+1} + x_3^{k+1}\right) + a\left(x_1^k + x_3^k\right)$$

Do đó ta có Q_{k+2} là một số chẵn.

Như vậy theo nguyên lí quy nạp thì $Q_n = x_1^n + x_3^n$ là số chẵn.

Do vậy $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n = 1 + Q_n$ là số lẻ với mọi số tự nhiên n.

+ Lời giải 2. Đặt $Q_n = x_1^n + x_3^n$. Khi đó ta có $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n = 1 + Q_n$.

Do x_1 và x_3 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - a = 0$ nên ta có

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 - a = 0 \\ x_3^2 - 2x_3 - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{n+2} - 2x_1^{n+1} - ax_1^n = 0 \\ x_3^{n+2} - 2x_3^{n+1} - ax_3^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{n+2} = 2x_1^{n+1} + ax_1^n \\ x_3^{n+2} = 2x_3^{n+1} + ax_3^n \end{cases}$$

Do đó ta có $x_1^{n+2} + x_3^{n+2} = 2\left(x_1^{n+1} + x_3^{n+1}\right) + a\left(x_1^n + ax_3^n\right)$ hay $Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + aQ_n$

Do $Q_1 = Q_2 = 2$ là số chẵn nên Q_n là số chẵn. Do vậy $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n = 1 + Q_n$ là số lẻ với mọi số tự nhiên n.

Bài 3 (2.0 điểm).

a) Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2\left(y + 3\right) = y\left(x^2 - 3\right)^2$.

b) Giải phương trình $x^2 - 2\sqrt{2x - 1} = \dfrac{13x^2 - 28x + 24}{2x + 1}$.

Lời giải

a) Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2\left(y + 3\right) = y\left(x^2 - 3\right)^2$.

- **Lời giải 1.** Do x và y là các số nguyên dương nên phương trình đã cho được viết lại thành

$$\frac{y + 3}{y} = \frac{\left(x^2 - 3\right)^2}{x^2} \Leftrightarrow \frac{y + 3}{y} = \left(\frac{x^2 - 3}{x}\right)^2 \Leftrightarrow 1 + \frac{3}{y} = x^2 + \frac{9}{x^2} - 6$$

Ta xét các trường hợp sau.

+ Trường hợp 1. Khi $x=1$, từ phương trình trên ta được $1+\frac{3}{y}=1+9-6 \Leftrightarrow y=1$.

+ Trường hợp 2. Khi $x=2$, từ phương trình trên ta được $1+\frac{3}{y}=4+\frac{9}{4}-6$, phương trình không có nghiệm nguyên dương.

+ Trường hợp 3. Khi $x \ge 3$, từ phương trình trên ta được $\frac{3}{y}=x^2+\frac{9}{x^2}-7>x^2-7 \ge 2$.

Do đó $2y<3$ nên suy ra $y=1$. Từ đó thay vào phương trình ban đầu ta được $x=3$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên dương là $(x;y)=(1;1),(3;1)$.

- **Lời giải 2.** Ta có nhận xét: Nếu số tự nhiên x thỏa mãn $\sqrt{x}$ là một số hữu tỉ thì x là một số chính phương.

+ Với $x=1$ ta dễ dàng tìm được $y=1$.

+ Với $x \ge 2$, biến đổi phương trình đã cho ta được

$$\left(\frac{x}{x^2-3}\right)^2=\frac{y}{y+3} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2-3}=\frac{\sqrt{y(y+3)}}{y+3}.$$

Do x và y là các số nguyên dương nên suy ra $\frac{x}{x^2-3}$ và $y+3$ là các số hữu tỉ.

Do đó theo nhận xét trên thì $y(y+3)=y^2+3y$ là một số chính phương với mọi số nguyên dương y.

Ta có $y^2+2y+1 \le y^2+3y<y^2+4y+4 \Leftrightarrow (y+1)^2 \le y^2+3y<y^2+4y+4$.

Do y^2+3y là số chính phương nên ta được $y^2+2y+1=y^2+3y \Leftrightarrow y=1$.

Thay vào phương trình đã cho ta được $x=3$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên dương là $(x;y)=(1;1),(3;1)$.

b) Giải phương trình $x^2-2\sqrt{2x-1}=\frac{13x^2-28x+24}{2x+1}$.

Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge \frac{1}{2}$. Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$(2x+1)\left(x^2-2\sqrt{2x-1}\right)=13x^2-28x+24$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+x^2-2(2x+1)\sqrt{2x-1}=13x^2-28x+24$$

$$\Leftrightarrow 2(2x+1)\sqrt{2x-1}=2x^3-12x^2+28x-24$$

$$\Leftrightarrow (2x-1+2)\sqrt{2x-1}=\left(x^3-6x^2+12x-8\right)+2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{2x-1}+2\sqrt{2x-1}=(x-2)^3+2(x-1)$$

Đặt $a=\sqrt{2x-1}; b=x-2\,(a\ge 0)$. Khi đó phương trình trên được viết lại thành

$$a^3+2a=b^3+2b \Leftrightarrow a^3-b^3+2(a-b)=0 \Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab-b^2+2\right)=0$$

Dễ thấy rằng $a^2-ab+b^2+2>0$ với mọi a, b nên từ trên ta được $a=b$.

Do đó $\sqrt{2x-1}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ 2x-1=(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-6x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm của phương trình là $S=\{5\}$.

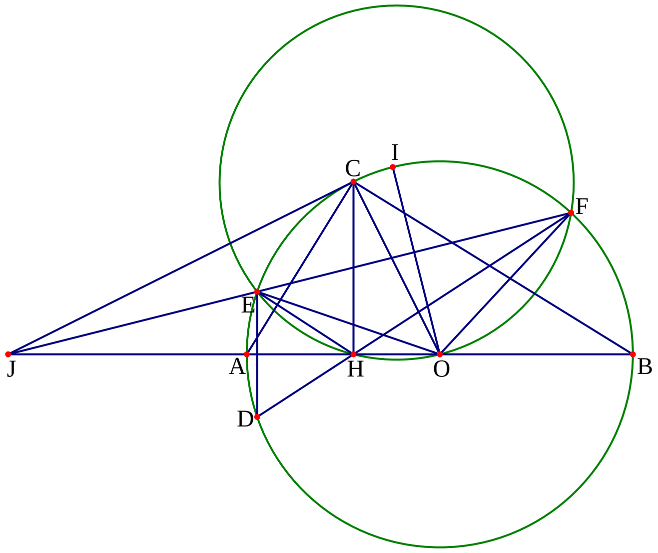
Bài 4 (3.0 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ và điểm H cố định trên đoạn OA (H khác O và A). Đường thẳng qua H và vuông góc với AB cắt nửa đường tròn đã cho tại C. Gọi E là điểm thay đổi trên cung AC (E khác A và C), F là điểm thay đổi trên cung BC (F khác B và C) sao cho $EHC=FHC$.

a) Chứng minh rằng tứ giác EHOF nội tiếp đường tròn.

b) Gọi R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác EHOF. Tính góc EHF khi $R=R'$.

c) Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) Chứng minh rằng tứ giác EHOF nội tiếp đường tròn.

Gọi D là điểm đối xứng với E qua AB, khi đó dễ thấy điểm D nằm trên đường tròn $(O;R)$ và ta cũng có $EHA = DHA$. Ta có $EHC = FHC$ nên $EHA = FHO$. Do vậy $DHA = FHO$ nên ba điểm D, H, F thẳng hang. Để ý rằng CH song song với DE nên $EHF = 2CHF = 2EDF = 2sdEF$. Mặt khác ta lại có $EOF = sdEF$ nên suy ra $EOF = EHF$ hay tứ giác EHOF nội tiếp đường tròn.

b) Gọi** R' **là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác EHOF. Tính góc** EHF **khi** $R = R'$**.

Gọi $(O';R')$ là đường tròn ngoại tiếp tứ giác EHOF. Do $R = R'$ nên $OO' = R' = R$ suy ra điểm O' nằm trên đường tròn $(O;R)$. Do đó O' là giao điểm của nửa đường tròn $(O;R)$ với đường trung trực của đoạn thẳng OH. Từ đó $O'E = OO' = OE = R$ nên suy tam giác EOO' đều, do đó ta có $EOO' = 60^0$. Đến đây ta được $EHF = EOF = 2EOO' = 120^0$.

c) Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Gọi I là giao điểm của EF với AB. Hai tam giác IOF và FOH có $OFI = OEF$ và $OEF = OHF$ nên hai tam giác IOF và FOH đồng dạng với nhau, suy ra $\frac{OI}{OF} = \frac{OF}{OH}$

nên $OI = \frac{OF^2}{OH} = \frac{R^2}{OH}$ không đổi, do đó I là điểm cố định. Vậy EF luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5 (1.0 điểm). Trung tâm thành phố Việt Trì có tất cả 2019 bóng đèn chiếu sáng đô thị, bao gồm ba loại đèn: Đèn ánh sáng trắng có 671 bóng, đèn ánh sáng vàng nhạt có 673 bóng, đèn ánh sáng đỏ có 675 bóng. Vào dịp giỗ tổ Hùng Vương người ta thay bóng đèn theo quy luật sau: Mỗi lần tháo bỏ hai bóng đèn khác loại và thay vào đó hai bóng đèn thuộc loại còn lại. Hỏi đến một lúc nào đó có thể tất cả các bóng đèn của trung tâm thành phố đều cùng thuộc một loại không?

Lời giải

+ Lời giải 1. Điểm đặc biệt của bài toán nằm ở bộ ba số 671; 673; 675 vì khi chia chúng cho 3 thì được các số dư lần lượt là 2; 1; 0. Đến đây ta xét các trường hợp sau.

◦ Ta xét trường hợp thay một bóng đèn ánh sáng trắng và một bóng đèn ánh sáng vàng nhạt bằng hai bóng ánh sáng đỏ, khi đó trung tâm thành phố có 670 bóng đèn ánh sáng trắng, 672 bóng đèn ánh sáng vàng nhạt, 677 bóng đèn ánh sáng đỏ. Ta nhận thấy nếu chia các số 670; 672; 677 cho 3 thì ta được các số dư lần lượt là 1; 0; 2.

◦ Ta xét trường hợp thay một bóng đèn ánh sáng trắng và một bóng đèn ánh sáng đỏ bằng hai bóng ánh sáng vàng nhạt, khi đó trung tâm thành phố có 670 bóng đèn ánh sáng trắng, 675 bóng đèn ánh sáng vàng nhạt, 674 bóng đèn ánh sáng đỏ. Ta nhận thấy nếu chia các số 670; 675; 674 cho 3 thì ta được các số dư lần lượt là 1; 0; 2.

◦ Ta xét trường hợp thay một bóng đèn ánh sáng vàng nhạt và một bóng đèn ánh sáng đỏ bằng hai bóng ánh sáng trắng, khi đó trung tâm thành phố có 673 bóng đèn ánh sáng trắng, 672 bóng đèn ánh sáng vàng nhạt, 674 bóng đèn ánh sáng đỏ. Ta nhận thấy nếu chia các số 673; 672; 674 cho 3 thì ta được các số dư lần lượt là 1; 0; 2.

Như vậy dù thay đổi các loại bóng như thế nào thì khi chia số bóng mỗi loại cho 3 thì ta thấy xuất hiện đầy đủ các số dư là 1; 0; 2. Mà tổng số bóng của trung tâm thành phố là 2019 luôn chia hết cho 3. Nếu như xẩy ra tình trạng thể tất cả các bóng đèn của trung tâm thành phố đều cùng thuộc một loại thì số dư khi chia các số bóng mỗi loại cho 3 lần lượt là 0; 0; 0. Điều này vô lí. Do vậy không thể xẩy ra tình trạng tất cả các bóng đèn của trung tâm thành phố đều cùng thuộc một loại.

+ Lời giải 2. Ta quy ước $m \equiv n \pmod{3}$ nếu các số nguyên m và n có cùng số dư khi chia cho 3. Gọi $A_n; B_n; C_n \left(n \in N\right)$ lần lượt là số bóng đèn ánh sáng trắng, đèn ánh sáng vàng nhạt, đèn ánh sáng đỏ còn lại khi thực hiện quy trình như giả thiết bài toán lần thứ n.

Lúc đầu theo giả thiết thì đèn ánh sáng trắng có 671 bóng, đèn ánh sáng vàng nhạt có 673 bóng, đèn ánh sáng đỏ có 675 bóng nên ta có
$A_0 - B_0 \equiv 1 \pmod{3}; B_0 - C_0 \equiv 1 \pmod{3}; C_0 - A_0 \equiv 1 \pmod{3}$.

Nhận thấy sau mỗi lần thực hiện quy trình thì mỗi loại bóng đèn hoặc là giảm đi 1 bóng hoặc là tăng lên hai bóng. Như vậy sau khi thực hiện quy trình n lần thì ta có

$$A_n - B_n \equiv 1 \pmod{3}; B_n - C_n \equiv 1 \pmod{3}; C_n - A_n \equiv 1 \pmod{3}$$

Nếu như xẩy ra tình trạng thể tất cả các bóng đèn của trung tâm thành phố đều cùng thuộc một loại thì hiệu giữa hai loại bóng đèn là 0 hoặc 2019, mà các số này đều chia hết cho 3, điều này vô lí. Do vậy không thể xẩy ra tình trạng tất cả các bóng đèn của trung tâm thành phố đều cùng thuộc một loại.

Đề số 28

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH PHÚ THỌ

Chuyên Toán – Năm học 2018 – 2019

Bài 1 (2.0 điểm).

a) Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x - 8 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|$.

b) Tìm các số thực dương x, y thỏa mãn $xy + 3x + 15 = 10\sqrt{(x-1)(y+2)}$.

Bài 2 (2.0 điểm).

a) Cho p, q là hai số nguyên tố và x, y là hai số nguyên dương phân biệt thỏa mãn $x < p$ và $y < q$. Chứng minh rằng biểu thức $\frac{p}{x} + \frac{q}{y}$ không thể nhận giá trị nguyên.

b) Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x+1$ thì dư 4 và khi chia cho $x^2 - 4$ thì dư $2x+3$. Tìm đa thức dư khi chia $f(x)$ cho $(x+1)(x^2-4)$.

Bài 3 (2.0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 4xy - 5 = 0 \\ y^2 - 2y - x + 2 = 0 \end{cases}$

b) Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} (a+b)(c+d) = 2 \\ (a+c)(b+d) = 3 \\ (a+d)(b+c) = 4 \end{cases}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Bài 4 (3.0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O) có M là trung điểm của BC. Gọi BE và CF là các đường cao của tam giác ABC. Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở S. Gọi N và P lần lượt là giao điểm của BE với EF và AS với đường tròn (O) (P khác A). Chứng minh rằng:

a) MN vuông góc với BF.

b) $AB.CP = AC.BP$.

c) $CAM = BAP$.

Bài 5 (1.0 điểm).

Trong tất cả các điểm trên mặt phẳng đều được tô màu, mỗi điểm được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, tím. Chứng minh rằng luôn tìm được ít nhất một tam giác cân có ba đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà ba đỉnh của tam giác đó cùng màu hoặc đôi một khác màu.

Hướng dẫn giải

Bài 1 (2.0 điểm).

a) Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x - 8 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|$.

- **Lời giải.** Biến đổi tương đương phương trình đã cho ta được

$$\left(x^4 - 4x^3 + 4x^2\right) - \left(8x^2 - 16x + 8\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x\right)^2 - \left(2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[x^2 - 2\left(\sqrt{2}+1\right)x + 2\sqrt{2}\right]\left[x^2 + 2\left(\sqrt{2}-1\right)x - 2\sqrt{2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2\left(\sqrt{2}+1\right)x + 2\sqrt{2} = 0 \\ x^2 + 2\left(\sqrt{2}-1\right)x - 2\sqrt{2} = 0 \end{array}\right.$$

+ Với $x^2 - 2\left(\sqrt{2}+1\right)x + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[x - \left(\sqrt{2}+1\right)\right]^2 - 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ x_2 = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} \end{array}\right.$.

+ Với $x^2 + 2\left(\sqrt{2}-1\right)x - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[x - \left(\sqrt{2}-1\right)\right]^2 - 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ x_4 = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3} \end{array}\right.$.

Đến đây ta thay các nghiệm của phương trình vào biểu thức T thì được

$$\begin{aligned} T &= |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = \left|1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right| + \left|1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right| + \left|1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right| + \left|1-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right| \\ &= 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-1+\sqrt{2}+\sqrt{3} = 2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

b) Tìm các số thực dương x, y thỏa mãn $xy + 3x + 15 = 10\sqrt{(x-1)(y+2)}$.

- **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $(x-1)(y+2) \ge 0$.

Kết hợp với x, y là các số thực dương thì ta được $x \ge 1; y > 0$.

Đặt $a=\sqrt{x-1}; b=\sqrt{y+2}\left(a\ge 0; b>4\right)$. Khi đó ta được $x=a^2+1; y=b^2-2$, thay vào phương trình đã cho thì ta ccos phương trình

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2-2\right)+3\left(a^2+1\right)+15=10ab \Leftrightarrow a^2b^2+b^2-3a^2-2+3a^2+18=10ab$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+a^2+b^2-10ab+16=0 \Leftrightarrow \left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(a^2b^2-8ab+16\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(a-b\right)^2+\left(ab-4\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ ab-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=2 \\ \sqrt{y+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $\left(x;y\right)=\left(5;1\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2 (2.0 điểm).

a) Cho p, q là hai số nguyên tố và x, y là hai số nguyên dương phân biệt thỏa mãn $x<p$ và $y<q$. Chứng minh rằng biểu thức $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}$ không thể nhận giá trị nguyên.

- **Lời giải.** Ta có $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}=\frac{py+qx}{xy}$. Giả sử $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}$ nhận giá trị nguyên, khi đó $py+qx$ chia hết cho xy, suy ra $py+qx$ chia hết cho x nên py chia hết cho x, để ý rằng p là số nguyên tố nên ta suy ra được y chia hết cho x. lập luận tương tự ta được x chia hết cho y. Do vậy suy ra $x=y$, điều này trái với giả thiết x và y là hai số nguyên dương phân biệt. Vậy biểu thức $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}$ không thể nhận giá trị nguyên.

b) Đa thức $f\left(x\right)$ khi chia cho $x+1$ thì dư 4 và khi chia cho x^2-4 thì dư $2x+3$. Tìm đa thức dư khi chia $f\left(x\right)$ cho $\left(x+1\right)\left(x^2-4\right)$.

- **Lời giải.** Do đa thức $f\left(x\right)$ khi chia cho $x+1$ thì dư 4 nên $f\left(x\right)=\left(x+1\right)g\left(x\right)+4$, từ đó ta được $f\left(-1\right)=4$. Do khi chia cho x^2-4 thì dư $2x+3$ nên

$f\left(x\right)=\left(x^2-4\right)h\left(x\right)+2x+3$, từ đó ta suy ra được $f\left(-2\right)=-1$ và $f\left(2\right)=7$.

Giả sử $f\left(x\right)$ chia cho $\left(x+1\right)\left(x^2-4\right)$ có dư là ax^2+bx+c.

Khi đó $f\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x^2-4\right)p\left(x\right)+ax^2+bx+c$.

Do $f\left(-1\right)=4$, $f\left(-2\right)=-1$ và $f\left(2\right)=7$ nên ta được

$$\begin{cases} a-b+c=4 \\ 4a-2b+c=-1 \\ 4a+2b+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=4 \\ 4a-2b+c=-1 \\ 4b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=6 \\ 4a+c=3 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=7 \end{cases}$$

Vậy dư khi chia $f(x)$ cho $(x+1)(x^2-4)$ là $-x^2+2x+7$.

Bài 3 (2.0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+4xy-5=0 \\ y^2-2y-x+2=0 \end{cases}$

- **Lời giải.** Từ phương trình thứ hai của hệ phương trình ta được $x=y^2-2y+2$.

Thế vào phương trình thứ nhất của hệ đã cho ta được

$$\left(y^2-2y+2\right)^2+4\left(y^2-2y+2\right)y-5=0$$
$$\Leftrightarrow y^4+4y^2+4-4y^3+4y^2-8y+4y^3-8y^2+8y-5=0 \Leftrightarrow y^4=1 \Leftrightarrow y=\pm 1$$

+ Với $y=1$ ta được $x=1^2-2.1+2=1$. Ta có nghiệm $(x;y)=(1;1)$

+ Với $y=-1$ ta được $x=(-1)^2-2.(-1)+2=5$. Ta có nghiệm $(x;y)=(5;-1)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là $(x;y)=(1;1),(5;-1)$.

b) Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn

$(a+b)(c+d)=2;(a+c)(b+d)=3;(a+d)(b+c)=4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2+d^2$.

- **Lời giải.** Biến đổi biểu thức P và kết hợp với giả thiết của bài toán ta có

$$P=a^2+b^2+c^2+d^2=(a+b+c+d)^2-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$
$$=(a+b+c+d)^2-(ac+ad+bc+bd)-(ab+ad+bc+cd)-(ab+ac+bd+cd)$$
$$=(a+b+c+d)^2-(a+b)(c+d)-(a+c)(b+d)-(a+d)(b+c)=(a+b+c+d)^2-9$$

Để ý rằng $\left[(a+d)+(b+c)\right]^2-4(a+d)(b+c)=\left[(a+d)-(b+c)\right]^2 \ge 0$.

Do đó suy ra $\left[(a+d)+(b+c)\right]^2 \ge 4(a+d)(b+c)=16$.

Từ đó ta được $P=a^2+b^2+c^2+d^2=(a+b+c+d)^2-9 \ge 16-9=7$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}(a+b)(c+d)=2\\(a+c)(b+d)=3\\(a+d)(b+c)=4\\a+d=b+c\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{3+\sqrt{2}}{2};b=\frac{1+\sqrt{2}}{2};c=\frac{3-\sqrt{2}}{2};d=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 7, đạt được tại $\frac{3+\sqrt{2}}{2};b=\frac{1+\sqrt{2}}{2};c=\frac{3-\sqrt{2}}{2};d=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

Bài 4 (3.0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O) có M là trung điểm của BC. Gọi BE và CF là các đường cao của tam giác ABC. Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở S. Gọi N và P lần lượt là giao điểm của BE với EF và AS với đường tròn (O) (P khác A). Chứng minh rằng:

a) Chứng minh MN vuông góc với BF.

- **Lời giải.**

b) Chứng minh $AB.CP=AC.BP$.

- **Lời giải.**

c) Chứng minh $CAM=BAP$.

- **Lời giải.**

Bài 5 (1.0 điểm).

Trong tất cả các điểm trên mặt phẳng đều được tô màu, mỗi điểm được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, tím. Chứng minh rằng luôn tìm được ít nhất một tam giác cân có ba đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà ba đỉnh của tam giác đó cùng màu hoặc đôi một khác màu.

- **Lời giải.** Xét ngũ giác đều ABCDE, ta nhận thấy cứ lấy ba đỉnh bất kì của một ngũ giác đều luôn tạo thành ba đỉnh của một tam giác cân. Do đó khi tô các đỉnh A, B, C, D, E bằng một trong ba màu xanh, đỏ, tím thì xẩy ra một trong ba trường hợp sau:

+ Trường hợp 1. Nếu cả năm đỉnh A, B, C, D, E cùng được tô bằng một màu, khi đó ta luôn tìm được một tam giác cân có ba đỉnh được tô bởi cùng một màu.

+ Trường hợp 2. Nếu năm đỉnh A, B, C, D, E cùng được tô bằng hai trong ba màu, khi đó theo nguyên lý Dirichlet thì ta luôn tìm được ba đỉnh được tổ bởi cùng một màu. Do đó ta luôn tìm được một tam giác cân có ba đỉnh được tô bởi cùng một màu.

+ Trường hợp 3. Nếu năm đỉnh A, B, C, D, E cùng được tô bằng một trong ba màu, khi đó ta luôn tìm được ba đỉnh được tô bằng cùng một màu hoặc ba đỉnh mà đôi một được tô bằng hai màu khác nhau. Do đó ta luôn tìm được một tam giác cân có ba đỉnh cùng màu hoặc đôi một khác màu.

Đề số 29

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH KHÁNH HÒA

Năm học 2018 – 2019

Câu 1.

a) Giải phương trình $x^2+2x+2=3x\sqrt{x+1}$.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ sao cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác cân.

Câu 2 .

a) Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta luôn có:

$$\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2\left(ab+ac+bc\right)$$

b) Cho x, y, z khác 0 thỏa mãn $x+y+z=\frac{1}{2};\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{xyz}=4;\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>0$.

Tính $Q=\left(y^{2017}+z^{2017}\right)\left(z^{2019}+x^{2019}\right)\left(x^{2021}+y^{2021}\right)$

Câu 3. Cho đường tròn (O) đường kính BC và H là một điểm nằm trên đoạn thẳng BO (điểm H không trùng với hai điểm B và O). Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với BC và cắt đường tròn (O) tại A và D. Gọi M là giao điểm của AC và BD. Qua M vẽ đường thẳng vuông góc với BC tại N.

a) Chứng minh rằng tứ giác MNBA nội tiếp đường tròn.

b) Tính giá trị $P=2.\left(\frac{BO}{AB}\right)^2-\frac{OH}{BH}$.

c) Từ B vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt hai đường thẳng AC và AN lần lượt tại K và E. Chứng minh rằng đường thẳng EC luôn đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AH khi H di động trên đoạn thẳng BO.

Câu 4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=abc$.

Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}+\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}-\sqrt{1+c^2}<1$.

Câu 5. Để tiết kiệm chi phí vận hành đồng thời du khách đi tham quan hết 18 danh lam, thắng cảnh trong tỉnh K, công ty du lịch lữ hành KH đã thiết lập các tuyến môt chiều như sau: Nếu đi từ tỉnh A đến B và từ B đến C thì sẽ không có tuyến từ A đến C. Hỏi có bao nhiêu cách thiết lập để đi hết 18 địa danh trên?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) Giải phương trình $x^2+2x+2=3x\sqrt{x+1}$.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ sao cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác cân.

Lời giải

a) Giải phương trình $x^2+2x+2=3x\sqrt{x+1}$.

Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge -1$. Biến đổi phương trình ta được

$$x^2+2x+2=3x\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x^2+2\left(x+1\right)-3x\sqrt{x+1}=0$$

Đặt $u=x;v=\sqrt{x+1}\left(v\ge 0\right)$. Khi đó phương trình trên được viết lại thành

$$u^2-3uv+2v^2=0\Leftrightarrow \left(u-v\right)\left(u-2v\right)=0$$

+ Với $u-v=0$ ta được $u=v$. Khi đó ta có phương trình

$$x=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-1=0 \\ x\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

+ Với $u-2v=0$ ta được $u=2v$. Khi đó ta có phương trình

$$x=2\sqrt{x+1}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-4x-4=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=2+\sqrt{2}$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là

$$S=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2};2+2\sqrt{2}\right\}$$

b) Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ sao cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác cân.

Ta xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** Tam giác được xét là tam giác đều.

Khi đó ta có $a=b=c>0$ và $a,b,c\in\left\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\right\}$. Do đó có tất cả 9 số có dạng $\overline{aaa}$ được thành lập.

- **Trường hợp 2.** Tam giác được xét là một tam giác không đều.

Khi đó do vai trò của ba cạnh a, b, c như nhau và tam giác được xét cân nên không mất tính tổng quát ta giả sử Xét $a = b \neq c$.

Theo bất đẳng thức tam giác ta có $a + b > c$ nên ta xét các khả năng sau:

+ Với $a = b = 1$. Khi đó do $c < 2$ và $c \neq 1$ nên không có giá trị nào của c thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $a = b = 2$. Khi đó do $c < 4$ và $c \neq 2$ nên ta có thể chọn $c = 1$ hoặc $c = 3$. Suy ra có 2 cách chọn c thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $a = b = 3$. Khi đó do $c < 6$ và $c \neq 3$ nên ta có thể chọn $c \in \{1;2;4;5\}$. Suy ra có 4 cách chọn c thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $a = b = 4$. Khi đó do $c < 8$ và $c \neq 4$ nên ta có thể chọn $c \in \{1;2;4;5;6;7\}$. Suy ra có 6 cách chọn c thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $a = b = 5$. Khi đó do $c < 10$ và $c \neq 5$ nên ta có thể chọn $c \in \{1;2;3;4;6;7;8;9\}$. Suy ra có 8 cách chọn c thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $a = b = 6$. Khi đó do $c < 12$ và $c \neq 6$ nên ta có thể chọn $c \in \{1;2;3;4;5;7;8;9\}$. Suy ra có 8 cách chọn c thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $a = b = 7$. Khi đó do $c < 14$ và $c \neq 7$ nên ta có thể chọn $c \in \{1;2;3;4;5;6;8;9\}$. Suy ra có 8 cách chọn c thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $a = b = 8$. Khi đó do $c < 16$ và $c \neq 8$ nên ta có thể chọn $c \in \{1;2;3;4;5;6;7;9\}$. Suy ra có 8 cách chọn c thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $a = b = 9$. Khi đó do $c < 18$ và $c \neq 9$ nên ta có thể chọn $c \in \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$. Suy ra có 8 cách chọn c thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy trường hợp này ta lập được 52 số có dạng $\overline{abc}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy có tất cả $9 + 3.52 = 9 + 156 = 165$ số thỏa mãn mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2.

a) Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta luôn có:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

b) Cho x, y, z khác 0 thỏa mãn $x+y+z=\frac{1}{2};\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{xyz}=4;\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>0$.

Tính $Q=\left(y^{2017}+z^{2017}\right)\left(z^{2019}+x^{2019}\right)\left(x^{2021}+y^{2021}\right)$

Lời giải

a) Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta luôn có:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

Ta có

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=(a+b+c)(a+b+c)\\&=a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2\\&=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\end{aligned}$$

b) Cho x, y, z khác 0 thỏa mãn $x+y+z=\frac{1}{2};\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{xyz}=4;\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>0$.

Tính $Q=\left(y^{2017}+z^{2017}\right)\left(z^{2019}+x^{2019}\right)\left(x^{2021}+y^{2021}\right)$

Từ giả thiết của bài toán ta có

$$x+y+z=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{1}{2xyz}\Leftrightarrow\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{2xyz}\Leftrightarrow\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{xz}=\frac{1}{xyz}$$

Do đó ta được $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{xz}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{xyz}=4$ hay

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=4\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$$

Từ đó kết hợp với $x+y+z=\frac{1}{2}$ ta được

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}\Leftrightarrow(xy+yz+xz)(x+y+z)=xyz\\&\Leftrightarrow x^2y+xy^2+y^2z+zy^2+z^2x+zx^2+3xyz=xyz\\&\Leftrightarrow\left(x^2y+xy^2\right)+\left(y^2z+xyz\right)+\left(z^2y+z^2x\right)+\left(zx^2+xyz\right)=0\\&\Leftrightarrow xy(x+y)+yz(x+y)+z^2(x+y)+zx(x+y)=0\\&\Leftrightarrow(x+y)\left(z^2+xy+yz+zx\right)=0\Leftrightarrow(x+y)(y+z)(z+x)=0\end{aligned}$$

Đến đây ta suy ra được $x=-y$ hoặc $y=-z$ hoặc $z=-y$.

Do vậy ta được $Q=\left(y^{2017}+z^{2017}\right)\left(z^{2019}+x^{2019}\right)\left(x^{2021}+y^{2021}\right)=0$.

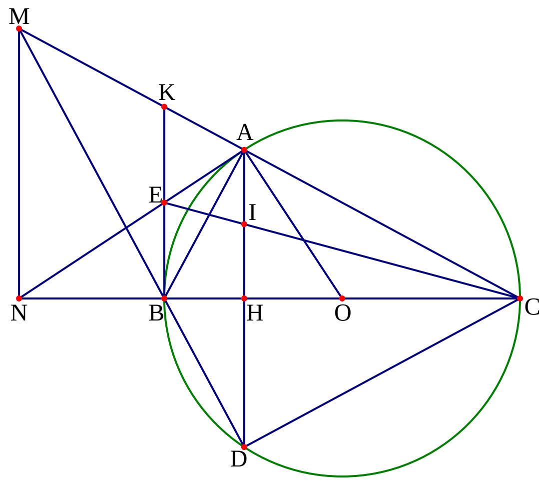
Câu 3. Cho đường tròn (O) đường kính BC và H là một điểm nằm trên đoạn thẳng BO (điểm H không trùng với hai điểm B và O). Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt đường tròn (O) tại A và D. Gọi M là giao điểm của AC và BD. Qua M vẽ đường thẳng vuông góc với BC tại N.

a) Chứng minh rằng tứ giác MNBA nội tiếp đường tròn.

b) Tính giá trị $P = 2.\left(\frac{BO}{AB}\right)^2 - \frac{OH}{BH}$.

c) Từ B vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O), cắt hai đường thẳng AC và AN lần lượt tại K và E. Chứng minh rằng đường thẳng EC luôn đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AH khi H di động trên đoạn thẳng BO.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác MNBA nội tiếp đường tròn.

Ta có $BAM = BAC = 90^0$ và $MNB = 90^0$ nên $BAM + MNB = 180^0$. Do đó tứ giác MNBA nội tiếp đường tròn đường kính MB.

b) Tính giá trị $P = 2.\left(\frac{BO}{AB}\right)^2 - \frac{OH}{BH}$.

Do tam giác ABC vuông tại A nên áp dụng hệ thức lượng ta có $BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{AB^2}{2BO}$ nên suy ra

$$\frac{OH}{BH} = \frac{2BO.OH}{AB^2} = \frac{2BO.(BO - BH)}{AB^2} = \frac{2BO^2 - BH.BC}{AB^2} = \frac{2BO^2 - AB^2}{AB^2} = 2.\left(\frac{BO}{AB}\right)^2 - 1.$$

Hay ta được $P = 2\left(\frac{BO}{AB}\right)^2 - \frac{OH}{BH} = 1$. Vậy giá trị của P là 1.

c) Chứng minh đường thẳng EC luôn đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AH khi H di động trên đoạn thẳng BO.

Tứ giác MNBA nội tiếp đường tròn. Do vậy ta có $NMB = NAB$ và tam giác OAC cân tại O nên $BCA = OAC$. Do đó ta được $NAB = OAC$ hay

$OAC + BAO = NAB + BAO$ nên $BAC = NAO$. Từ đó dẫn đến OA vuông góc với AN hay AN là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $EA = EB$ và $EAB = EBA$. Trong tam giác vuông KAB ta chứng minh được AE là đường trung tuyến $EA = EB = EK$ nên tam giác AEK cân tại E, suy ra $BKA = EAK$. Ta có AH và BK cùng vuông góc với BC nên AH và BC vuông góc với nhau. Do vậy theo định lý Thales ta có $\frac{CI}{CE} = \frac{AI}{KE}$. Lại có HI song song với BE nên thao định lí Thales ta có $\frac{CI}{CE} = \frac{HI}{BE}$. Do đó suy ra $\frac{AI}{KE} = \frac{HI}{BE}$. Mà $KE = EB$ nên $AI = IH$ nên từ đó suy ra I là trung điểm của AH. Vậy ta có điều phải chứng minh .

Câu 4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = abc$.

Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} + \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} - \sqrt{1+c^2} < 1$.

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được $a + b + c = abc \Leftrightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = 1$.

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$. Khi đó giả thiết được viết lại thành $xy + xz + yz = 1$.

Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh ta có

$$\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} + \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} - \sqrt{1+c^2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{a^2}+1} + \sqrt{\frac{1}{b^2}+1} - c\sqrt{\frac{1}{c^2}+1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} < 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2} + \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2} - 1\right)\left(\sqrt{1+y^2} - 1\right) - \sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2} + \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2} - 1\right)\left(\sqrt{1+y^2} - 1\right) + \frac{\sqrt{1+z^2} - z\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}{z} > 0$$

Để ý rằng

$$\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} = \sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2} = \sqrt{(1-xy)^2 + (x+y)^2}$$
$$= \sqrt{(xz+yz)^2 + (x+y)^2} = \sqrt{(z^2+1)(x+y)^2} = (x+y)\sqrt{1+z^2}$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-z(x+y)\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-(xz+yz)\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-(1-xy)\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{xy\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

Bất đẳng thức cuối cùng trên luôn đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 5. Để tiết kiệm chi phí vận hành đồng thời du khách đi tham quan hết 18 danh lam, thắng cảnh trong tỉnh K, công ty du lịch lữ hành KH đã thiết lập các tuyến một chiều như sau: Nếu đi từ tỉnh A đến B và từ B đến C thì sẽ không có tuyến từ A đến C. Hỏi có bao nhiêu cách thiết lập để đi hết 18 địa danh trên?

Lời giải

Gọi A là địa điểm có nhiều tuyến đường nhất (gồm cả đường xuất phát từ A và đi đến A). Các địa điểm còn lại ta chia thành 3 loại như sau.

+ Loại 1. Các đường xuất phát từ A có $n(1)=m$ tuyến đường.

+ Loại 2. Các tuyến đi đến A có $n(2)=n$ tuyến đường.

+ Loại 3. Không có tuyến đi và đến A có $n(3)=p$ tuyến đường.

Do $m+n+p=17$ và số tuyến liên quan đến A có $m+n$ tuyến, số tuyến không liên quan đến A không vượt quá $m+n$.

Gọi S là số cách thiết lập đi hết 18 địa danh. Khi đó $S=m+n+p(m+n)+mn$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$m+n+p(m+n)+mn=mn+(p+1)m+n(p+1)\le\frac{(m+n+p+1)^2}{3}=108$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m=p=6;n=5$.

Vậy có tối đa 108 cách thiết lập đi hết 18 địa danh trên

Đề số 30

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH HÀ TĨNH

Năm học 2018 – 2019

Câu 1 (1.5 điểm).

Cho x, y, z là các số hữu tỉ thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Chứng minh rằng $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ là số hữu tỉ

Câu 2 (2.5 điểm).

a) Giải phương trình $4x^2-3x-2=\sqrt{x+2}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy-x-y=-5 \\ \frac{1}{x^2-2x}+\frac{1}{y^2-2y}=\frac{2}{3} \end{cases}$

Câu 3 (2.5 điểm).

a) Cho phương trình $x^2+2mx-1-2m=0$. Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm $x_1; x_2$ với mọi m. Tìm các giá trị m để $P=\frac{2x_1x_2+1}{x_1^2-2mx_2+1-2m}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}+\sqrt{\frac{yz}{yz+x}}+\sqrt{\frac{xz}{xz+y}}\le\frac{3}{2}$$

Câu 4 (2.5 điểm).

Cho đường tròn tâm (O) và dây cung AB cố định không phải đường kính. Điểm C khác A, B di động trên AB. Đường tròn tâm P đi qua C và tiếp xúc với (O) tại A, đường tròn tâm Q đi qua C và tiếp xúc với (O) tại B. Các đường tròn (P) và (Q) cắt nhau tại điểm thứ hai là M. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại I

a) Chứng minh rằng MC là phân giác của AMB và các điểm A, M, O, B, I cùng thuộc đường tròn

b) Chứng minh rằng khi điểm C thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Câu 5 (1.0 điểm).

Cho $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n < ...\left(n \in N^*\right)$ là các số nguyên dương và không có hai số nào liên tiếp . Đặt $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Chứng minh rằng luôn tồn tại ít nhất một số chính phương b thỏa mãn $S_n \le b \le S_{n+1}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1 (1.5 điểm).

Cho x, y, z là các số hữu tỉ thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Chứng minh rằng $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ là số hữu tỉ.

Lời giải

Từ giả thiết đã cho ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow xz + yz = xy \Leftrightarrow 2xy - 2xz - 2yz = 0$. Do đó ta có

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz} = \sqrt{\left(x + y - z\right)^2} = \left|x + y - z\right|$$

Do x, y, z là các số hữa tỉ nên $\left|x + y - z\right|$ là số hữa tỉ. Vậy ta có điều cần chứng minh

Câu 2 (2.5 điểm).

a) Giải phương trình $4x^2 - 3x - 2 = \sqrt{x + 2}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy - x - y = -5 \\ \frac{1}{x^2 - 2x} + \frac{1}{y^2 - 2y} = \frac{2}{3} \end{cases}$

Lời giải

a) Giải phương trình $4x^2 - 3x - 2 = \sqrt{x + 2}$.

Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge -2$. Biến đổi tương đương phương trình đã cho ta được

$$16x^2 - 12x - 8 = 4\sqrt{x + 2} \Leftrightarrow 16x^2 - 8x + 1 = 4\left(x + 2\right) + 4\sqrt{x + 2} + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(4x - 1\right)^2 = \left(2\sqrt{x + 2} + 1\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - 1 = 2\sqrt{x + 2} + 1 \\ 4x - 1 = -2\sqrt{x + 2} - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x + 2} = 2x - 1 \\ \sqrt{x + 2} = -2x \end{array}\right.$$

+ Trường hợp 1. Với $\sqrt{x + 2} = 2x - 1$ ta được

$$\sqrt{x+2}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-5x-1=0 \\ x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{41}}{8}$$

+ Trường hợp 2. Với $\sqrt{x+2}=-2x$ ta được

$$\sqrt{x+2}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-x-2=0 \\ -2\le x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{33}}{8}$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm là $S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{33}}{8};\dfrac{5+\sqrt{41}}{8}\right\}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy-x-y=-5 \\ \dfrac{1}{x^2-2x}+\dfrac{1}{y^2-2y}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x^2-2x\ne 0; y^2-2y\ne 0$. Biến đổi phương trình thứ nhất ta được $xy-x-y=-5 \Leftrightarrow xy-x-y+1=-4 \Leftrightarrow (x-1)(y-1)=-4$.

Phương trình thứ hai của hệ được viết lại thành $\dfrac{1}{(x-1)^2-1}+\dfrac{1}{(y-1)^2-1}=\dfrac{2}{3}$.

Đặt $a=x-1; b=y-1$. Khi đó hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} ab=-4 \\ \dfrac{1}{a^2-1}+\dfrac{1}{b^2-1}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ trên ta được

$$\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-2}{a^2b^2-a^2-b^2+1}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-2}{17-a^2-b^2}=\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2)-6=34-2(a^2+b^2) \Leftrightarrow a^2+b^2=8 \Leftrightarrow (a+b)^2-2ab=8$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2=8+2ab=8+2(-4)=0 \Leftrightarrow b=-a \Leftrightarrow 2a^2=8 \Leftrightarrow a=\pm 2$$

+ Với $a=-2; b=2$ ta được $(x;y)=(-1;3)$.

+ Với $a=2; b=-2$ ta được $(x;y)=(3;-1)$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được các nghiệm là $(x;y)=(-1;3),(3;-1)$.

Câu 3 (2.5 điểm).

a) Cho phương trình $x^2+2mx-1-2m=0$. Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm $x_1;x_2$ với mọi m. Tìm các giá trị m để $P=\dfrac{2x_1x_2+1}{x_1^2-2mx_2+1-2m}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}+\sqrt{\frac{yz}{yz+x}}+\sqrt{\frac{xz}{xz+y}} \le \frac{3}{2}$$

Lời giải

a) Cho phương trình $x^2+2mx-1-2m=0$. Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm $x_1; x_2$ với mọi m. Tìm m để $P=\frac{2x_1x_2+1}{x_1^2-2mx_2+1-2m}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Từ phương trình ta có $\Delta'=m^2+2m+1=(m+1)^2 \ge 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm với mọi m. Như vậy theo hệ thức Vi – et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-2m \\ x_1x_2=-2m-1 \end{cases}$.

Biến đổi biểu thức P và sử dụng hệ thức Vi – et ta được

$$P=\frac{2x_1x_2+1}{x_1^2+(x_1+x_2)x_2+1-2m}=\frac{2x_1x_2+1}{(x_1+x_2)^2-x_1x_2-2m}$$
$$=\frac{-4m-1}{4m^2+2}=\frac{-4m-1}{4m^2+2}+1-1=\frac{(2m-1)^2}{4m^2+2}-1 \ge -1$$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $m=\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -1, đạt được tại $m=\frac{1}{2}$.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}+\sqrt{\frac{yz}{yz+x}}+\sqrt{\frac{xz}{xz+y}} \le \frac{3}{2}$$

Để ý rằng $x+y+z=1$ và áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có đánh giá

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}=\sqrt{\frac{xy}{xy+z(x+y+z)}}=\sqrt{\frac{xy}{(z+x)(y+z)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}\right)$$

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta cũng được

$$\sqrt{\frac{yz}{yz+x}} \le \frac{1}{2}.\left(\frac{y}{x+y}+\frac{z}{z+x}\right); \sqrt{\frac{xz}{xz+y}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{z}{y+z}+\frac{x}{x+y}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức cùng chiều trên ta được.

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}+\sqrt{\frac{yz}{yz+x}}+\sqrt{\frac{xz}{xz+y}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z}+\frac{y}{x+y}+\frac{z}{x+z}+\frac{z}{y+z}+\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{x+z}+\frac{z}{x+z}\right)+\left(\frac{y}{x+y}+\frac{x}{x+y}\right)+\left(\frac{z}{y+z}+\frac{y}{y+z}\right)\right]=\frac{1}{2}.3=\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

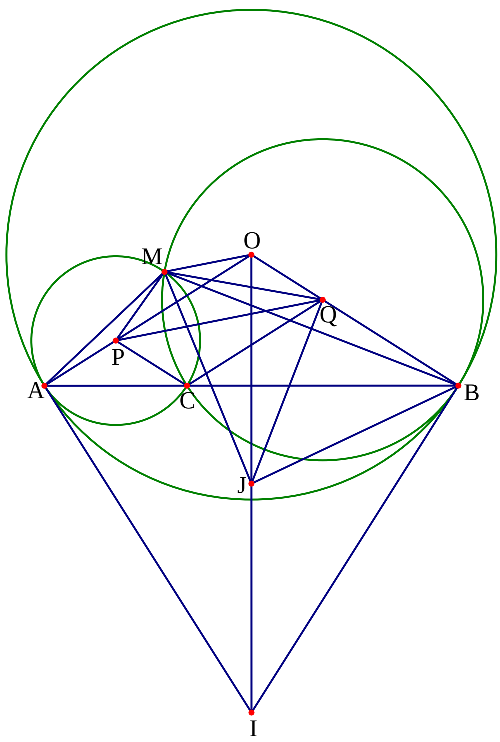
Câu 4 (2.5 điểm). Cho đường tròn tâm (O) và dây cung AB cố định không phải đường kính. Điểm C khác A, B di động trên AB. Đường tròn tâm P đi qua C và tiếp xúc với (O) tại A, đường tròn tâm Q đi qua C và tiếp xúc với (O) tại B. Các đường tròn (P) và (Q) cắt nhau tại điểm thứ hai là M. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại I

a) Chứng minh rằng MC là phân giác của AMB và các điểm A, M, O, B, I cùng thuộc đường tròn

b) Chứng minh rằng khi điểm C thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải

a) Chứng minh MC là phân giác của AMB và các điểm A, M, O, B, I cùng thuộc đường tròn



+ Do IA là tiếp tiến chung của hai đường tròn (O) và (P) nên ba điểm P, A, O thẳng hàng. Do IB là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (Q) nên ba điểm O, B, Q thẳng hàng. Trong đường tròn (P) có $AMC = BAI$ và trong đường tròn (Q) có $BMC = ABI$. Mà tam giác AIB cân tại I nên $BAI = ABI$. Do đó ta được $AMC = BMC$ hay MC là phân giác của góc AMB.

+ Ta có $\widehat{AIB}+\widehat{ABI}+\widehat{BAI}=180^0$. Mà lại có $\widehat{BAI}+\widehat{ABI}=\widehat{AMC}+\widehat{CMB}=\widehat{AMB}$ nên ta suy ra được $\widehat{AIB}+\widehat{AMB}=180^0$. Do đó tứ giác AMBI nội tiếp đường tròn. Mặt khác dễ thấy tứ giác AOIB nội tiếp đường tròn nên suy ra các điểm A, M, O, B, I cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh khi điểm C thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Gọi J là trung điểm của OI. Ta có tam giác AMP cân tại P nên $\widehat{MPO}=\widehat{PAM}+\widehat{PMA}=2\widehat{PAM}=2\widehat{OAM}$. Tương tự thì tam giác BMQ cân tại Q nên $\widehat{MQO}=2\widehat{OBM}$. Mà ta có $\widehat{OAM}=\widehat{OBM}$ nên suy ra $\widehat{MPO}=\widehat{MQO}$, do đó tứ giác PMOQ nội tiếp đường tròn. Do đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ chính là đường tròn ngoại tiếp tứ giác PMOQ nên các điểm A, M, O, B, Q cùng thuộc đường tròn đường kính OI, suy ra $JM=JB$ và $QM=QB$ nên hai tam giác JMQ và JOQ bằng nhau. Đến đây ta suy ra được tứ giác JMOQ nội tiếp đường tròn. Do vậy các điểm P, M, O, Q, J cùng thuộc một đường tròn. Ta có O và I cố định nên suy ra Q cố định, do đó đường trung trực của OJ cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác luôn thuộc đường trung trực OJ cố định.

Câu 5 (1.0 điểm).

Cho $a_1<a_2<a_3<...<a_n<...\left(n\in N^*\right)$ là các số nguyên dương và không có hai số nào liên tiếp . Đặt $S_n=a_1+a_2+......+a_n$. Chứng minh rằng luôn tồn tại ít nhất một số chính phương b thỏa mãn $S_n\le b\le S_{n+1}$.

Lời giải

Do $S_n=a_1+a_2+......+a_n$ nên suy ra $S_{n+1}=a_1+a_2+......+a_n+a_{n+1}=S_n+a_{n+1}$.

Ta có

$$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}\ge 1\Leftrightarrow S_{n+1}\ge\left(\sqrt{S_n}+1\right)^2\Leftrightarrow S_n+a_{n+1}\ge S_n+2\sqrt{S_n}+1\Leftrightarrow a_{n+1}\ge 2\sqrt{S_n}+1.$$

Vì dãy số không có hai số nguyên liên tiếp nên $a_{n+1}\ge a_n+2;a_n\ge a_{n-1}+2;\ ...\ ;a_2\ge a_1+2$. Do đó ta được $a_{n+1}\ge a_{n-1}+2.2;\ ...\ ;a_{n+1}\ge a_1+n.2$. Từ đó suy ra

$$n.a_{n+1} \ge a_1 + a_2 + ... + a_n + 2\left(1 + 2 + 3 + ... + n\right)$$

$$\Leftrightarrow na_{n+1} - n(n+1) \ge S_n \Leftrightarrow 2\sqrt{na_{n+1} - n(n+1)} + 1 \ge 2\sqrt{S_n} + 1$$

Ta sẽ chứng minh $a_{n+1} \ge 2\sqrt{na_{n+1} - n\left(n+1\right) + 1}$. Thật vậy, ta có

$$a_{n+1} \ge 2\sqrt{na_{n+1} - n\left(n+1\right) + 1} \Leftrightarrow a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} + 1 \ge 4na_{n-1} - 4n\left(n+1\right) \Leftrightarrow \left(a_{n+1} - 2n - 1\right)^2 \ge 0$$

Như vậy ta được $\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} \ge 1$ nên tồn tại số nguyên k để $\sqrt{S_n} \le k \le \sqrt{S_{n+1}}$.

Do vậy $S_n \le k^2 \le S_{n+1}$. Chọn $b = k^2$ thì ta được $S_n \le b \le S_{n+1}$. Vậy bài toán được chứng minh hoàn tất.

Đề số 31

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH BẾN TRE

Năm học 2018 – 2019

Câu 1. Cho biểu thức $P=\dfrac{a\sqrt{b}+\sqrt{a}-b\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}}$ với a và b là hai số thực dương

a) Rút gọn biểu thức $P:\dfrac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a+b\right)}$.

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $a=2019+2\sqrt{2018}$ và $b=2020+2\sqrt{2019}$

Câu 2.

a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng p^2-1 chia hết cho 24.

b) Cho phương trình $x^2-2mx-m-4=0$ với m là tham số. Tìm các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa $\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}$ đạt giá trị lớn nhất

Câu 3.

a) Giải phương trình $\sqrt{x^3+1}=x^2-3x-1$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+4y^2=2\\ \left(x-2y\right)\left(1-2xy\right)=4\end{cases}$

Câu 4.

a) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^3-xy+2=x+y$.

b) Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a+b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$T=\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$$

Câu 5. Cho nửa đường tròn $\left(O;R\right)$ có đường kính AB. Vẽ đường thẳng d là tiếp tuyến của $\left(O\right)$ tại B. Trên cung AB lấy điểm M tùy ý (M khác A, B), tia AM cắt đường thẳng d tại N. Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng AM, tia CO cắt đường thẳng d tại D

a) Chứng minh tứ giác $OBNC$ nội tiếp đường tròn.

b) Gọi E là hình chiếu của N trên đoạn AD. Chứng minh rằng N, O, E thẳng hàng và $\frac{NE.AD}{ND} = 2R$.

c) Chứng minh rằng $CA.CN = CO.CD$

d) Xác định vị trí của điểm M để $2AM + AN$ đạt giá trị lớn nhất

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho biểu thức $P = \frac{a\sqrt{b} + \sqrt{a} - b\sqrt{a} - \sqrt{b}}{1 + \sqrt{ab}}$ với a và b là hai số thực dương

a) Rút gọn biểu thức $P : \frac{1}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(a + b\right)}$.

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $a = 2019 + 2\sqrt{2018}$ và $b = 2020 + 2\sqrt{2019}$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức $P : \frac{1}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(a + b\right)}$.

Điều kiện xác định của biểu thức P là $a > 0, b > 0$. Khi đó ta có

$$P = \frac{\sqrt{ab}.\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) + \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)}{1 + \sqrt{ab}} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(1 + \sqrt{ab}\right)}{1 + \sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Từ đó ta được

$$P : \frac{1}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(a + b\right)} = P.\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(a + b\right) = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(a + b\right)$$
$$= \left(a - b\right)\left(a + b\right) = a^2 - b^2$$

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $a = 2019 + 2\sqrt{2018}$ và $b = 2020 + 2\sqrt{2019}$.

Với $a > 0, b > 0$ ta được $P = \sqrt{a} - \sqrt{b}$. Mặt khác ta lại có

$$\begin{cases} a = 2019 + 2\sqrt{2018} \\ b = 2020 + 2\sqrt{2019} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \left(\sqrt{2018} + 1\right)^2 \\ b = \left(\sqrt{2019} + 1\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{2018} + 1 \\ \sqrt{b} = \sqrt{2019} + 1 \end{cases}$$

Do đó suy ra $P = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{2018} + 1 - \left(\sqrt{2019} + 1\right) = \sqrt{2018} - \sqrt{2019}$.

Câu 2.

a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng p^2-1 chia hết cho 24.

b) Cho phương trình $x^2-2mx-m-4=0$ với m là tham số. Tìm các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa $\frac{1}{x_1^2+x_2^2}$ đạt giá trị lớn nhất

Lời giải

a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng p^2-1 chia hết cho 24.

Ta có $p^2-1=(p-1)(p+1)$. Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên ta được $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2$ với k là số tự nhiên khác 0.

+ Nếu $p=3k+1 \Rightarrow (p+1)(p-1)=(3k+2).3k$ chia hết cho 3

+ Nếu $p=3k+2 \Rightarrow (p+1)(p-1)=(3k+3)(3k+1)$ chia hết cho 3

Vậy p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 3

Mặt khác vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ. Suy ra $p+1$ và $p-1$ là hai số chẵn liên tiếp

Đặt $p-1=2n$ nên $p+1=2n+2$, ta có $(p+1)(p-1)=2n(2n+2)=4n(n+1)$

Do $n(n+1)$ chia hết cho 2 nên $4n(n+1)$ chia hết cho 8. Do đó $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 8.

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau ta được $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24.

b) Cho phương trình $x^2-2mx-m-4=0$ với m là tham số. Tìm các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa $\frac{1}{x_1^2+x_2^2}$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $\Delta' = m^2+m+4=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$ với mọi m nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$.

Khi đó theo hệ thức Vi – et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=-m-4 \end{cases}$

Theo đề bài ta có

$$\frac{1}{x_1^2+x_2^2}=\frac{1}{(x_1+x_2)-2x_1x_2}=\frac{1}{4m^2+2m+8}=\frac{1}{2.\left(\sqrt{2}m+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\frac{31}{4}}\le\frac{1}{\frac{31}{4}}=\frac{4}{31}$$

Ta có $4m^2+2m+8=2\left(2m^2+2.\sqrt{2}m.\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{4}+8=2\left(\sqrt{2}m+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\frac{31}{4}\ge\frac{31}{4}$.

Suy ra $\frac{1}{4m^2+2m+8}=\frac{1}{2\left(\sqrt{2}m+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\frac{31}{4}}\le\frac{4}{31}$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khia $\sqrt{2}m+\frac{1}{2\sqrt{2}}=0\Leftrightarrow m=-\frac{1}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $\frac{1}{x_1^2+x_2^2}$ là $\frac{4}{31}$, đạt được tại $m=-\frac{1}{4}$.

Câu 3.

a) Giải phương trình $\sqrt{x^3+1}=x^2-3x-1$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+4y^2=2\\(x-2y)(1-2xy)=4\end{cases}$

Lời giải

a) Giải phương trình $\sqrt{x^3+1}=x^2-3x-1$.

Điều kiện xác nghiệm cỉa phương trình đã cho là

$$\begin{cases}x^3+1\ge 0\\x^2-3x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\\left[\begin{array}{l}x\ge\frac{3+\sqrt{13}}{2}\\x\le\frac{3-\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\frac{3+\sqrt{13}}{2}\\x\le\frac{3-\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\frac{3+\sqrt{13}}{2}\\-1\le x\le\frac{3-\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$$

Khi đó biến đổi tương đương phương trình ta được

$$\sqrt{x^3+1}=x^2-3x-1\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}=x^2-x+1-2(x+1)$$

Đặt $a=\sqrt{x+1};b=\sqrt{x^2-x+1}\,(a\ge 0;b>0)$. Khi đó ta có phương trình

$b^2-2a^2=ab\Leftrightarrow 2a^2+ab-b^2=0\Leftrightarrow(a+b)(2a-b)=0$

Do $a \ge 0; b > 0$ nên $a + b > 0$, suy ra từ phương trình trên ta được $2a = b$. Do đó ta có

$$2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow 4x + 4 = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{5+\sqrt{37}}{2}$ và $x = \frac{5-\sqrt{37}}{2}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 2 \\ (x-2y)(1-2xy) = 4 \end{cases}$

Biến đổi tương đương hệ phương trình đã cho ta được

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 2 \\ (x-2y)(1-2xy) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = 2(1-2xy) \\ (x-2y)(1-2xy) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2 = 2.(1-2xy) \\ (x-2y).(1-2xy) = 4 \end{cases}$$

Đặt $a = x - 2y; b = 1 - 2xy$. Khi đó hệ phương trình trên trở thành

$$\begin{cases} a^2 = 2b \\ ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a^2}{2} \\ a.\frac{a^2}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

Từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 1 - 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2y \\ 1 - 2(2+2y)y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2y \\ 4y^2 + 4y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = \left(1; \frac{-1}{2}\right)$.

Câu 4.

a) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^3 - xy + 2 = x + y$.

b) Cho hai số thực dương a, b thỏa $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{4}{a} + \frac{1}{b}$$

Lời giải

a) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^3 - xy + 2 = x + y$.

Biến đổi phương trình ta được

$$x^3 - xy + 2 = x + y \Leftrightarrow x^3 - xy - x - y = 2$$
$$\Leftrightarrow x\left(x^2 - 1\right) - y\left(x + 1\right) = -2 \Leftrightarrow \left(x + 1\right)\left(x^2 - x - y\right) = -2$$

Do x, y là các số nguyên nên $x + 1$ và $x^2 - x - y$ là các số nguyên. Từ đó ta xét các trường hợp sau.

+ Trường hợp 1. Với $\begin{cases} x + 1 = -2 \\ x^2 - x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 11 \end{cases}$.

+ Trường hợp 2. Với $\begin{cases} x + 1 = 2 \\ x^2 - x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

+ Trường hợp 3. Với $\begin{cases} x + 1 = 1 \\ x^2 - x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$.

+ Trường hợp 4. Với $\begin{cases} x + 1 = -1 \\ x^2 - x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên $\left(x; y\right) = \left(-3; 11\right), \left(1; 1\right), \left(0; 2\right), \left(-2; 4\right)$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{4}{a} + \frac{1}{b}$.

Do $a + b = 1$ nên áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$T = \frac{4}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4\left(a + b\right)}{a} + \frac{a + b}{b} = 5 + \frac{4b}{a} + \frac{a}{b} \ge 5 + 2\sqrt{\frac{4b}{a}.\frac{a}{b}} = 5 + 4 = 9$$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{4b}{a} = \frac{a}{b} \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4b^2 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}; b = \frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 9, đạt được tại $a = \frac{2}{3}; b = \frac{1}{3}$.

Câu 5. Cho nửa đường tròn $\left(O; R\right)$ có đường kính AB. Vẽ đường thẳng d là tiếp tuyến của $\left(O\right)$ tại B. Trên cung AB lấy điểm M tùy ý (M khác A, B), tia AM cắt đường thẳng d tại N. Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng AM, tia CO cắt đường thẳng d tại D

a) Chứng minh tứ giác OBNC nội tiếp đường tròn.

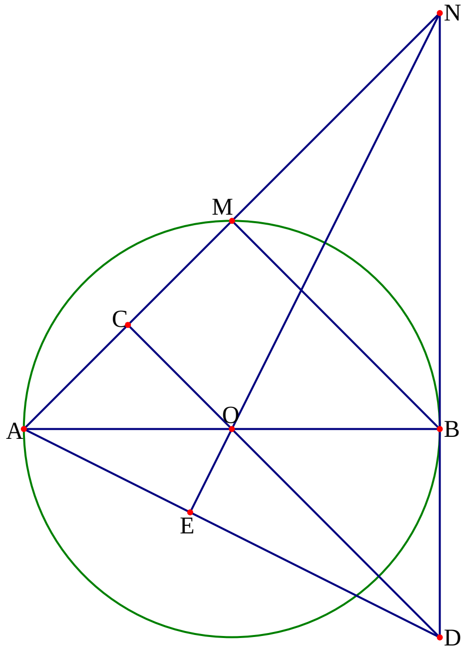
b) Gọi E là hình chiếu của N trên đoạn AD. Chứng minh rằng N, O, E thẳng hàng và $\frac{NE.AD}{ND} = 2R$.

c) Chứng minh rằng $CA.CN = CO.CD$

d) Xác định vị trí của điểm M để $2AM + AN$ đạt giá trị lớn nhất

Lời giải

a) Chứng minh tứ giác $OBNC$ nội tiếp đường tròn.



Ta có C là trung điểm của đoạn AM nên OC vuông góc với AM tại C hay $OCM = 90^0$. Lại có AB vuông góc với AB vuông góc với BN tại B nên $OBN = 90^0$. Trong tứ giác OBNC có $OCN + OBN = 180^0$ nên tứ giác OBNC nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh ba điểm N, O, E thẳng hàng và $\dfrac{NE.AD}{ND} = 2R$.

+ Tam giác AND có AB và DO là các đường cao nên O là trực tâm của tam giác. Lại có NE cũng là đường cao của tam giác AND nên suy ra NE đi qua O hay ba điểm N, O, E thẳng hàng.

+ Ta có $S_{AND} = \dfrac{1}{2}AB.ND = \dfrac{1}{2}NE.AD$ nên $AB.ND = NE.AD$ suy ra

$$AB = \frac{NE.AD}{ND} = 2R$$

c) Chứng minh rằng $CA.CN = CO.CD$.

Ta có $CAO = MBN$. Mà do BM song song với CD nên suy ra $NBM = CDN$. Do đó ta được $CAO = CDN$. Hai tam giác CAO và CDN có $CAO = CDN$ và $ACO = NCD = 90^0$ nên hai tam giác đồng dạng với nhau. Do đó suy ra $\dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CO}{CN}$ hay $CA.CN = CD.CO$

d) Xác định vị trí của điểm M để $2AM + AN$ đạt giá trị lớn nhất

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác ABN vuông tại B ta có

$AM.AN = AB^2 = (2R)^2 = 4R^2$. Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$2AM + AN \ge 2\sqrt{2.AM.AN} = 2\sqrt{8R^2} = 4\sqrt{2}R$$

Vậy $Min_{2AM+AN} = 4\sqrt{2}$, xẩy ra tại $AM = \frac{AN}{2}$ hay M là điểm chính giữa cung AB.

Đề số 32

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH BÌNH DƯƠNG

Năm học 2018 – 2019

Câu 1.

a) Giải phương trình $7+2\sqrt{x}-x=\left(2+\sqrt{x}\right)\sqrt{7-x}$.

b) Cho các số thực x, y thỏa mãn $\left(x+\sqrt{2018+x^2}\right)\left(y+\sqrt{2018+y^2}\right)=2018$. Tính giá trị của biểu thức $Q=x^{2019}+y^{2019}+2018\left(x+y\right)+2020$

Câu 2.

Gọi $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2-2\left(m-1\right)x+2m-6=0$. Tìm tất cả các giá trị của m nguyên dương để $A=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$ có giá trị nguyên

Câu 3

a) Tính giá trị biểu thức

$$P=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+......+\frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}$$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^2+y^2=3\left(x+y\right)$.

Câu 4.

Cho đường tròn $\left(O\right)$ bán kính R và điểm M nằm ngoài $\left(O\right)$. Kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn $\left(O\right)$ (A, B là các tiếp điểm). Trên đoạn AB lấy điểm C (C khác với A và B). Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MA, MC. Đường thẳng KA cắt $\left(O\right)$ tại điểm thứ hai là D.

a) Chứng minh rằng $KO^2-KM^2=R^2$.

b) Chứng minh rằng tứ giác BCDM là tứ giác nội tiếp đường tròn.

c) Gọi E là giao điểm thứ hai của MD với $\left(O\right)$ và N là trung điểm của KE. Đường thẳng KE cắt $\left(O\right)$ tại điểm thứ hai là F. Chứng minh rằng bốn điểm I, A, N, F cùng thuộc một đường tròn.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) Giải phương trình $7+2\sqrt{x}-x=\left(2+\sqrt{x}\right)\sqrt{7-x}$.

b) Cho các số thực x,y thỏa mãn $\left(x+\sqrt{2018+x^2}\right)\left(y+\sqrt{2018+y^2}\right)=2018$. Tính giá trị của biểu thức $Q=x^{2019}+y^{2019}+2018\left(x+y\right)+2020$.

Lời giải

a) Giải phương trình $7+2\sqrt{x}-x=\left(2+\sqrt{x}\right)\sqrt{7-x}$.

Điều kiện xác định của phương trình là $0\le x\le 7$. Biến đổi phương trình đã cho ta được $7+2\sqrt{x}-x=\left(2+\sqrt{x}\right)\sqrt{7-x}\Leftrightarrow 7-x+2\sqrt{x}=\left(2+\sqrt{x}\right)\sqrt{7-x}$

Đặt $\sqrt{x}=a;\sqrt{7-x}=b\left(a\ge 0;b\ge 0\right)$, suy ra $\sqrt{x}=a;7-x=b^2$. Khi đó phương trình trên được viết lại thành

$$b^2+2a=\left(2+a\right)b\Leftrightarrow b^2-2b+2a-ab=0\Leftrightarrow b\left(b-2\right)+a\left(2-b\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left(2-b\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\b=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=\sqrt{7-x}\\\sqrt{7-x}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{7}{2}\\x=3\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{3;\dfrac{7}{2}\right\}$.

b) Cho các số thực x, y thỏa mãn $\left(x+\sqrt{2018+x^2}\right)\left(y+\sqrt{2018+y^2}\right)=2018$. Tính giá trị của biểu thức $Q=x^{2019}+y^{2019}+2018\left(x+y\right)+2020$.

Biến đổi giả thiết của bài toán ta có

$$\left(x+\sqrt{2018+x^2}\right)\left(y+\sqrt{2018+y^2}\right)=2018\Leftrightarrow x+\sqrt{2018+x^2}=\frac{2018}{y+\sqrt{2018+y^2}}$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{2018+x^2}=\frac{2018\left(\sqrt{2018+y^2}-y\right)}{2018+y^2-y^2}\Leftrightarrow x+\sqrt{2018+x^2}=\sqrt{2018+y^2}-y$$

Biến đổi tương tự ta có $\sqrt{2018+x^2}-x=\sqrt{2018+y^2}+y$.

Kết hợp hai kết quả trên ta được

$$\sqrt{2018+x^2}=\sqrt{2018+y^2}\Leftrightarrow 2018+x^2=2018+y^2\Leftrightarrow x^2=y^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\x=-y\end{array}\right.$$

+ Trường hợp 1. Với $x=y$, khi đó từ giả thiết của bài toán ta được

$$x+\sqrt{2018+x^2}=\sqrt{2018+x^2}-x\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow x=y=0$$

Từ đó suy ra $Q=x^{2019}+y^{2019}+2018(x+y)+2020=2020$.

+ Trường hợp 2. Với $x=-y$, khi đó từ giả thiết của bài toán ta được

$$Q=x^{2019}+y^{2019}+2018\left(x+y\right)+2020=2020$$

Vậy ta luôn có $Q=2020$.

Câu 2. Gọi $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2-2\left(m-1\right)x+2m-6=0$. Tìm tất cả các giá trị của m nguyên dương để $A=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$ có giá trị nguyên.

Lời giải

Từ phương trình ta có $\Delta'=\left(m-1\right)^2-2m+6=m^2-4m+7=\left(m-2\right)^2+3>0$. Suy ra phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

Áp dụng định lý Vi – et ta có $x_1+x_2=2\left(m-1\right);x_1x_2=2m-6$. Theo đề bài ta có

$$A=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2=\frac{x_1^4+x_2^4}{\left(x_1x_2\right)^2}=\frac{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1^2x_2^2}{\left(x_1x_2\right)^2}=\frac{\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]^2-2\left(x_1x_2\right)^2}{\left(x_1x_2\right)^2}$$

Do đó để tồn tai biểu thức A ta cần $x_1x_2\neq 0$ hay $m\neq 3$. Từ đó ta được

$$A=\frac{\left[4\left(m-1\right)^2-2\left(2m-6\right)\right]^2-2\left(2m-6\right)^2}{\left(2m-6\right)^2}-2=\frac{\left(4m^2-8m+4-4m+12\right)^2}{\left(2m-6\right)^2}-2$$

$$=\left(\frac{4m^2-12m+16}{2m-6}\right)^2-2=\left(\frac{2m^2-6m+8}{m-3}\right)^2-2$$

Do A nhận giá trị nguyên nên

$$\left[\left(\frac{2m^2-6m+8}{m-3}\right)^2-2\right]\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{2m^2-6m+8}{m-3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left(2m^2-6m+8\right)\vdots\left(m-3\right)$$

Ta có $2m^2-6m+8=2m(m-3)+8$ mà $2m\left(m-3\right)\vdots\left(m-3\right)$ với mọi m khác 3.

Khi đó ta được $\left(2m^2-6m+8\right)\vdots\left(m-3\right)$

Hay $\left(2m^2-6m+8\right)\vdots\left(m-3\right)\Leftrightarrow 8\vdots\left(m-3\right)$ nên

$\left(m-3\right)\in U\left(8\right)\Leftrightarrow\left(m-3\right)\in\left\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm8\right\}$

Ta có bảng giá trị

$x-3$	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
x	-5	-1	1	2	4	5	7	11

Kết hợp với $m \neq 3$ ta có các giá trị thỏa mãn bài toán là $m \in \{-5;-1;1;2;4;5;7;11\}$

Câu 3.

a) Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}$$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^2+y^2=3(x+y)$.

Lời giải

a) Tính giá trị biểu thức $P = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}$.

Trước hết ta chứng minh đẳng thức $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ với mọi số nguyên dương n. Thật vậy ta có biến đổi sau

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2.n-n^2(n+1)} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n^3+2n^2+n-n^3-n^2}$$
$$= \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Áo dụng đẳng thức trên cho các số tự nhiên $n=1;2;3;...;2024$ ta được.

$$P = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2024}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2025}} = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}$$

Vậy ta được $P = \frac{44}{45}$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^2+y^2=3(x+y)$.

Áo dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $x^2+y^2 \geq 2xy \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$.

Do đó suy ra $x^2+y^2 \geq \frac{x^2+y^2}{2} + xy \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$.

Từ đó ta được $x^2+y^2 = 3(x+y) \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow 6(x+y) \geq (x+y)^2 \Rightarrow 6 \geq x+y$.

Mà x và y là các số nguyên dương nên suy ra $x+y\in\{2;3;4;5;6\}$. Đến đây ta xét các trường hợp sau.

+ Trường hợp 1. Khi $x+y=2$, ta được $x=y=1$. Thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.

+ Trường hợp 2. Khi $x+y=3$, ta được $x=1;y=2$ hoặc $x=2;y=1$. Thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.

+ Trường hợp 3. Khi $x+y=4$, ta được $x=1;y=3$ hoặc $x=2;y=2$ hoặc $x=3;y=1$. Thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.

+ Trường hợp 4. Khi $x+y=5$, ta được $x=1;y=4$ hoặc $x=2;y=3$ hoặc $x=3;y=2$ hoặc $x=4;y=1$. Thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.

+ Trường hợp 5. Khi $x+y=6$, ta được $x=1;y=5$ hoặc $x=2;y=4$ hoặc $x=3;y=3$ hoặc $x=4;y=2$ hoặc $x=5;y=1$. Thay vào phương trình ta thấy $x=3;y=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy cặp số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y)=(3;3)$.

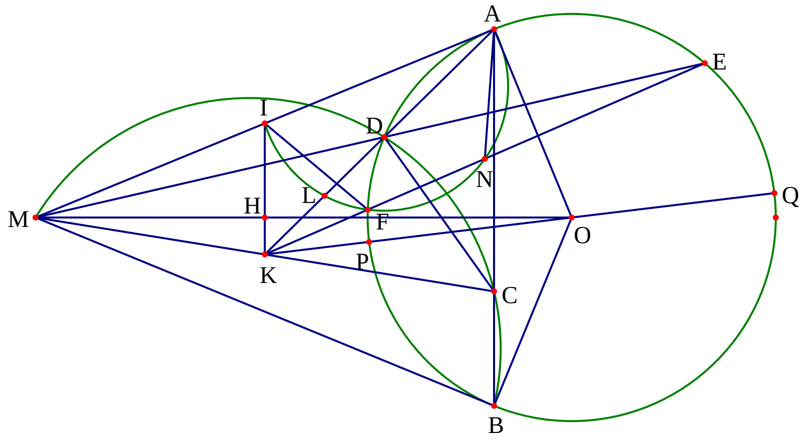
Câu 4. Cho đường tròn (O) bán kính R và một điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm). Trên đoạn thẳng AB lấy điểm C (C khác A, C khác B). Gọi I và K lần lượt là trung điểm của MA và MC. Đường thẳng KA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D.

a) Chứng minh rằng $KO^2-KM^2=R^2$.

b) Chứng minh rằng tứ giác BCDM là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng MD với đường tròn (O) và N là trung điểm KE đường thẳng KE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng bốn điểm I, A, N, F cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải



a) Chứng minh $KO^2 - KM^2 = R^2$.

Ta có $IM = IA$ và $KM = KC$ nên IK là đường trung bình tam giác AMC, do đó IK song song với AC. Lại có $MA = MB$ (tính chất tiếp tuyến cắt nhau tại M) và $OA = OB = R$ nên OM là trung trực của AB. Do đó ta được OM vuông góc với AB nên KI vuông góc với OM. Gọi giao điểm của IK và OM là H.

Áp dụng định lý Pitygo cho các tam giác vuông $MHI; KHO; MHK; OHI$ ta có

$$\begin{cases} MI^2 = MH^2 + HI^2 \\ KO^2 = KH^2 + HO^2 \\ MK^2 = MH^2 + HK^2 \\ OI^2 = IH^2 + HO^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MI^2 + KO^2 = MH^2 + HI^2 + KH^2 + HO^2 \\ MK^2 + IO^2 = MH^2 + HI^2 + KH^2 + HO^2 \end{cases}$$

Do $IM = IA$ nên từ đó ta suy ra được

$$MI^2 + KO^2 = MK^2 + IO^2 \Rightarrow KO^2 - KM^2 = IO^2 - MI^2 = IO^2 - IA^2 = OA^2 = R^2$$

Vậy ta được $KO^2 - KM^2 = R^2$

b) Chứng minh tứ giác BCDM là tứ giác nội tiếp.

Đường thẳng KO cắt đường tròn (O) tại Q và P. Ta có $KC = KM$ nên $KO^2 - KM^2 = R^2$ hay $KO^2 - KC^2 = R^2$. Từ đó ta có $KC^2 = KO^2 - OP^2 = (KO + OP)(KO - OP) = KQ.KP$. Do tứ giác ADPQ nội tiếp đường tròn nên ta có $KQ.KP = KD.KA$ nên $KC^2 = KD.KA$. Từ đó dẫn đến hai tam giác CKD và AKD đồng dạng nên $DCK = KAC = DBM$. Vậy tứ giác MDCB nội tiếp đường tròn.

c) Chứng minh bốn điểm I, A, N, F cùng nằm trên một đường tròn.

Gọi L là trung điểm của KD ta có tam giác MKD và tam giác AKM đồng dạng với nhau nên suy ra $AEM = MAK = EMK$. Do đó AE song song với KM. Mặt khác ta có $KF.KE = KD.KA$ hay ta được $KF.KN = KL.KA$ nên tứ giác $ANFL$ nội tiếp đường tròn. Điều này dẫn đến $LAF = LNF = MEK = FMK$ (vì $KF.KE = KD.KA = KC^2 = KM^2$). Từ đó suy ra được $KAF = KMF$ nên tứ giác MKFA nội tiếp đường tròn. Do đó ta được $AFN = AMK = AIN$. Dẫn đến tứ giác IANF nội tiếp đường tròn.

Đề số 33

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH ĐỒNG NAI

Năm học 2018 – 2019

Câu 1.

1) Giải phương trình $x^4 - 22x^2 + 25 = 0$.

2) Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{a}{\sqrt{a}+2} + \dfrac{a+\sqrt{a}}{a+3\sqrt{a}+2}\right).\dfrac{4-a}{\sqrt{a}}$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các số thực dương a sao cho P đạt giá trị lớn nhất.

Câu 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ 3x^2 + 2xy - 3y^2 = 30 \end{cases} \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$.

Câu 3. Tìm các tham số thực m để phương trình $x^2 - (m+1)x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $P = \dfrac{x_1 + x_2 - 1}{(x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2 + 3}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4

a) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $2x^2 - 4y^2 - 2xy - 3x - 3 = 0$.

b) Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3}{ab(a^2+b^2)} + \frac{b^3+c^3}{bc(b^2+c^2)} + \frac{c^3+a^3}{ac(c^2+a^2)} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Câu 5. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $M(50;100)$ và $N(100;0)$. Tìm số các điểm nguyên nằm bên trong tam giác OMN (Một điểm được gọi là điểm nguyên nếu hoành độ và tung độ của điểm đó đều là các số nguyên)

Câu 6. Cho đường tròn (O) và đường kính AB cố định. Biết điểm C thuộc đường tròn (O) với C khác A và B. Vẽ đường kính CD của đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt hai đường thẳng AC và AD lần lượt tại hai điểm E và F.

a) Chứng minh tứ giác ECDF nội tiếp đường tròn.

b) Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BF. Chứng minh OE vuông góc với AH.

c) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng OE và AH. Chứng minh điểm K thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác ECDF.

d) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ECDF. Chứng minh I luôn thuộc đường thẳng cố định và đường tròn (I) luôn đi qua hai điểm cố định khi C di động trên (O) thỏa mãn điều kiện đã cho.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

1) Giải phương trình $x^4 - 22x^2 + 25 = 0$.

2) Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{a}{\sqrt{a}+2} + \dfrac{a+\sqrt{a}}{a+3\sqrt{a}+2}\right).\dfrac{4-a}{\sqrt{a}}$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các số thực dương a sao cho P đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

1) Giải phương trình $x^4 - 22x^2 + 25 = 0$.

Đặt $x^2 = t\left(t \ge 0\right)$, khi đó phương trình trên trở thành: $t^2 - 22t + 25 = 0$.

Ta có $\Delta' = 11^2 - 25 = 96 > 0$. Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$$t_1 = 11 + 4\sqrt{6} > 0; t_2 = 11 - 4\sqrt{6} > 0$$

Từ đó ta được $\left[\begin{array}{l} x^2 = 11+4\sqrt{6} \\ x^2 = 11-4\sqrt{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 \\ x^2 = \left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \\ x = \pm\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là:

$$S = \left\{-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right); \sqrt{3}-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}-\sqrt{3}; 2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right\}$$

2) Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{a}{\sqrt{a}+2} + \dfrac{a+\sqrt{a}}{a+3\sqrt{a}+2}\right).\dfrac{4-a}{\sqrt{a}}$.

a) Rút gọn biểu thức P.

Điều kiện xác định của biểu thức P là $a > 0$. Khi đó ta có

$$P=\left(\frac{a}{\sqrt{a}+2}+\frac{a+\sqrt{a}}{a+3\sqrt{a}+2}\right).\frac{4-a}{\sqrt{a}}=\left[\frac{a}{\sqrt{a}+2}+\frac{\sqrt{a}.\left(\sqrt{a}+1\right)}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}\right].\frac{4-a}{\sqrt{a}}$$

$$=\left(\frac{a}{\sqrt{a}+2}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}\right).\frac{4-a}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}+2}.\frac{\left(2-\sqrt{a}\right)\left(2+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}.\left(\sqrt{a}+1\right)\left(2-\sqrt{a}\right)}{\sqrt{a}}$$

$$=\left(\sqrt{a}+1\right)\left(2-\sqrt{a}\right)=-a+\sqrt{a}+2$$

b) Tìm các số thực dương a sao cho P đạt giá trị lớn nhất.

Với $a>0$ ta được $P=-a+\sqrt{a}+2$. Khi đó ta có $P=-a+\sqrt{a}+2=-\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\le\frac{9}{4}$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\sqrt{a}-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow\sqrt{a}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$. Thỏa mãn điều kiện xác định. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{9}{4}$ khi $a=\frac{1}{4}$.

Câu 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-xy=6\\3x^2+2xy-3y^2=30\end{cases}\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải

+ Xét $x=0$, ta thấy không phải là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

+ Xét $x\ne0$, khi đó ta có phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^2-xy=6\Leftrightarrow x-y=\frac{6}{x}\Rightarrow x-\frac{6}{x}=y$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được

$$3x^2+2x\left(x-\frac{6}{x}\right)-3\left(x-\frac{6}{x}\right)^2=30\Leftrightarrow3x^2+2x^2-12-3x^2+36-\frac{108}{x^4}-30=0$$

$$\Leftrightarrow2x^4-6x^2-108=0\Leftrightarrow\left(x^2-9\right)\left(x^2+6\right)=0\Leftrightarrow x^2-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-3\end{array}\right.$$

Từ đó ta được các nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\left(x;y\right)=\left(3;1\right),\left(-3;-1\right)$.

Câu 3. Tìm các tham số thực m để phương trình $x^2-\left(m+1\right)x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $P=\frac{x_1+x_2-1}{\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1x_2+3}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Từ phương trình ta có $\Delta=(m+1)^2-8m=m^2-6m-1$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta>0$ hay ta được $m>3+\sqrt{10}$ hoặc $m<3-\sqrt{10}$.

Áp dụng định lý Vi – et ta có $x_1+x_2=m+1; x_1x_2=2m$. Theo đề bài ta có

$$P=\frac{x_1+x_2-1}{(x_1+x_2)^2-3x_1x_2+3}=\frac{(m+1)-1}{(m+1)^2-3.2m+3}=\frac{m}{m^2-4m+4}=\frac{m}{(m-2)^2}$$

Khi đó ta có $P+\frac{1}{8}=\frac{m}{(m-2)^2}+\frac{1}{8}=\frac{8m+m^2-4m+4}{8(m-2)^2}=\frac{(m+2)^2}{8(m-2)^2}\ge 0$.

Từ đó ta được $P+\frac{1}{8}\ge 0\Leftrightarrow P\ge\frac{-1}{8}$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi

$m+2=0\Leftrightarrow m=-2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{1}{8}$ đạt được tại $m=-2$.

Câu 4.

a) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $2x^2-4y^2-2xy-3x-3=0$.

b) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3}{ab(a^2+b^2)}+\frac{b^3+c^3}{bc(b^2+c^2)}+\frac{c^3+a^3}{ac(c^2+a^2)}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Lời giải

a) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $2x^2-4y^2-2xy-3x-3=0$.

Biến đổi phương trình đã cho ta được

$$\begin{aligned}&2x^2-4y^2-2xy-3x-3=0\\ \Leftrightarrow\ &(2x^2-4xy-2x)+(2xy-4y^2-2y)-(x-2y-1)=4\\ \Leftrightarrow\ &2x(x-2y-1)+2y(x-2y-1)-(x-2y-1)=4\Leftrightarrow(x-2y-1)(2x+2y-1)=4\end{aligned}$$

Do x, y là các số nguyên nên $(x-2y-1),(2x+2y-1)$ là các số nguyên.

Lại do $2x+2y-1$ là số nguyên lẻ nên ta có các trường hợp sau đây.

+ Trường hợp 1. Với $\begin{cases}2x+2y-1=-1\\x-2y-1=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2y=0\\x-2y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$. Thỏa mãn.

+ Trường hợp 2. Với $\begin{cases} 2x+2y-1=1 \\ x-2y-1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=2 \\ x-2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{3} \\ y=\dfrac{-4}{3} \end{cases}$. Không thỏa mãn.

Vậy nghiệm nguyên của phương trình đã cho là $(x;y)=(1;-1)$.

b) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3}{ab\left(a^2+b^2\right)}+\frac{b^3+c^3}{bc\left(b^2+c^2\right)}+\frac{c^3+a^3}{ac\left(c^2+a^2\right)}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Do a, b là các số thực dương nên ta có

$$\frac{a^3+b^3}{ab(a^2+b^2)}\ge\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\Leftrightarrow\frac{2(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)}{2ab\left(a^2+b^2\right)}\ge\frac{a+b}{2ab}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(a^2+ab+b^2\right)+b^2\ge 0\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng nên ta được $\dfrac{a^3+b^3}{ab(a^2+b^2)}\ge\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có $\dfrac{c^3+b^3}{cb\left(c^2+b^2\right)}\ge\dfrac{1}{2c}+\dfrac{1}{2b};\dfrac{c^3+a^3}{ca\left(c^2+a^2\right)}\ge\dfrac{1}{2c}+\dfrac{1}{2a}$.

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức cùng chiều trên ta có

$$\frac{a^3+b^3}{ab\left(a^2+b^2\right)}+\frac{b^3+c^3}{bc\left(b^2+c^2\right)}+\frac{c^3+a^3}{ac\left(c^2+a^2\right)}\ge\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 5. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $M(50;100)$ và $N(100;0)$. Tìm số các điểm nguyên nằm bên trong tam giác OMN (Một điểm được gọi là điểm nguyên nếu hoành độ và tung độ của điểm đó đều là các số nguyên).

Lời giải

Gọi phương trình đường thẳng OM là $(OM): y=ax+b$. Vì đường thẳng d đi qua các điểm M và O nên ta có $\begin{cases} b=0 \\ 50a+b=100 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$.

Do đó đường thẳng OM có phương trình là $(OM): y=2x$

Phương trình đường thẳng ON là $(ON): y = 0$ và phương trình đường thẳng MN là $(MN): y = -2x + 200$. Những điểm $(x_0; y_0)$ nằm trong tam giác OMN phải thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} y_0 > 0 \\ y_0 < 2x_0 \\ y_0 < -2x_0 + 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 > 0 \\ 2x_0 > 0 \\ -2x_0 + 200 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 > 0 \\ x_0 > 0 \\ x_0 < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 > 0 \\ 0 < x_0 < 100 \end{cases}$$

Do tọa độ nguyên nên các hoành độ điểm thỏa mãn đề bài là $x_0 = 1; 2; 3......; 98; 99$

Lại có $\left[\begin{array}{l} 2x_0 \le -2x_0 + 200 \\ 2x_0 > -2x_0 + 200 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 \le 50 \\ x_0 > 50 \end{array}\right.$.

Nếu $x_0 \le 50$ thì ta có

+ Nếu $x_0 = 1$ ta có $y_0 < 2x_0 \Rightarrow y_0 < 2$ nên có 1 điểm nguyên.

+ Nếu $x_0 = 2$ ta có $y_0 < 2x_0 \Rightarrow y_0 < 4$ nên có 3 điểm nguyên.

....

+ Nếu $x_0 = 50$ ta có $y_0 < 2x_0 \Rightarrow y_0 < 100$ nên có 99 điểm nguyên.

Nếu $x_0 > 50$ thì ta có

+ Nếu $x_0 = 51$ ta có $y_0 < -2x_0 + 100 \Rightarrow y_0 < 98$ nên có 97 điểm nguyên.

....

+ Nếu $x_0 = 99$ ta có $y_0 < -2x_0 + 200 \Rightarrow y_0 < 2$ nên có 1 điểm nguyên.

Vậy tổng số điểm nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$2(1 + 3 + 5 + ... + 97) + 99 = 2.\frac{49.(2.1 + 48.2)}{2} + 99 = 4901$$

Câu 6. Cho đường tròn (O) và đường kính AB cố định. Biết điểm C thuộc đường tròn (O) với C khác A và B. Vẽ đường kính CD của đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt hai đường thẳng AC và AD lần lượt tại hai điểm E và F.

a) Chứng minh tứ giác ECDF nội tiếp đường tròn.

b) Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BF. Chứng minh OE vuông góc với AH.

c) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng OE và AH. Chứng minh điểm K thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác ECDF.

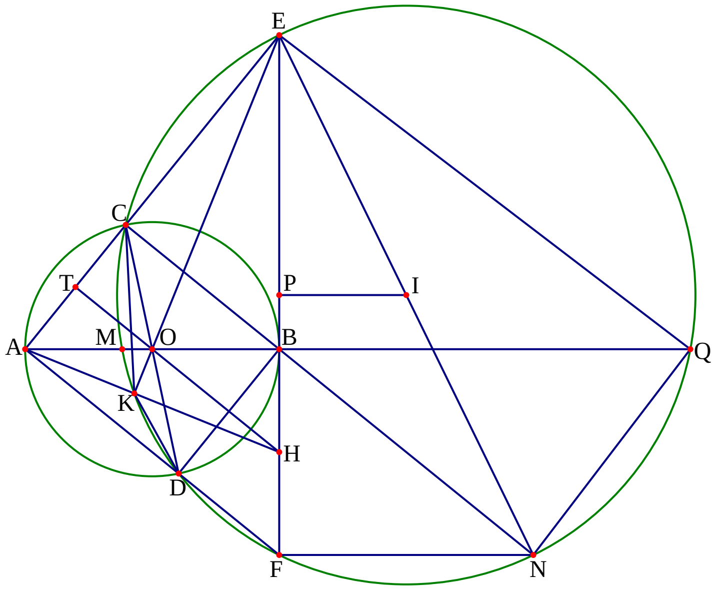
d) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ECDF. Chứng minh I luôn thuộc đường thẳng cố định và đường tròn (I) luôn đi qua hai điểm cố định khi C di động trên (O) thỏa mãn điều kiện đã cho.

Lời giải

a) Chứng minh tứ giác ECDF nội tiếp đường tròn.

Do AB và CD là đường kính của đường tròn (O) nên tứ giác ACBD là hình chữ nhật. Tam giác AEF vuông tại A có AB là đường cao nên ta có $ACD = BAE = AFE$ nên suy ra tứ giác CDFE nội tiếp đường tròn.

b) Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BF. Chứng minh OE vuông góc với AH.



+ Lời giải 1. Trong tam giác ABF có H là trung điểm của đoạn thẳng BF và O là trung điểm của AB nên OH là đường trung bình, suy ra HO song song với AF, từ đó dẫn đến HO vuông góc với AC. Trong tam giác AEH có AB và HT là các đường có nên O là trực tâm của tam giác AEH. Từ đó suy ra OE vuông góc với AH.

+ Lời giải 2. Gọi K là giao điểm EO và AH. Ta có $EAF = 90^0$. Hai tam giác ABF và ABE đều vuông tại E nên ta có $\sin BAF = \frac{BF}{AF} = \frac{2HF}{FA}$ và $\sin AEB = \frac{AB}{AE} = \frac{2AO}{FA}$. Mặt khác ta lại có $BAF = AEB$ nên suy ra $\frac{HF}{FA} = \frac{AO}{FA}$. Kết hợp với $AFH = EAO$ suy ra hai tam giác AFH và AEO đồng dạng với nhau nên ta được $FAH = EAO$. Đến đây ta suy ra được $FAH + EAK = AEO + EAK = 90^0$ nên $AEK = 90^0$ hay OE vuông góc với AH.

c) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng OE và AH. Chứng minh điểm K thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác ECDF.

Ta có tam giác OBD cân tại O nên $ODB = OBD$. Tam giác BDF vuông tại D có H là trung điểm cạnh huyền HH nên suy ra $DH = BH$. Do đó tam giác BHD cân tại H nên $BDH = DBH$. Vậy $ODH = ODB + BDH = OBD + DBH = OBH = 90^0 = OKH$. Do đó tứ giác OKDH nội tiếp đường tròn. Suy ra $KDO = KHO$ và $CEK = KHO$ nên ta được $CEK = KDO$ hay $CDK = CEK$ do đó tứ giác tứ giác ECKD nội tiếp đường tròn. Vậy K thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác ECDF.

d) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ECDF. Chứng minh I luôn thuộc đường thẳng cố định và đường tròn (I) luôn đi qua hai điểm cố định khi C di động trên (O) thỏa mãn điều kiện đã cho.

+ Gọi N là giao điểm của CB và KH. Vì các góc $ECN = EKN = 90^0$ nên EN là đường kính của (I) và I là trung điểm của EN. Gọi P là hình chiếu của I lên EF. Do NF vuông với EF nên IP song song với NF. Ta có IP là đường trung bình tam giác ENF nên suy ra $IP = \frac{FN}{2}$. Tứ giác AFNB có FN song song với Ab và FA song song với NB nên là hình bình hành, do vậy ta có $FN = AB$. Từ đó suy ta $IP = \frac{1}{2}AB = OB$. Mà OB cố định nên I luôn di động trên đường thẳng song song với EF và cách EF một khoảng không đổi OB. Giả sử đường thẳng AB cắt đường tròn (I) tại hai điểm M và Q.

+ Gọi R là bán kính đường tròn tâm O. Khi đó ta có $MOD = COQ$ và $MDO = CQO$ nên hai tam giác ODM và OQC đồng dạng với nhau, suy ra ta được $\frac{OD}{OQ} = \frac{OM}{OC}$ hay

$OM.OQ = OD.OC = R^2$. Ta cũng có $CAM = QAE$ và $ACM = AQE$ nên hai tam giác ACM và AQE đồng dạng, suy ra ta được $\frac{AC}{AQ} = \frac{AM}{AE}$ hay $AC.AE = AQ.AM$. Mà ta lại có $AC.AE = AB^2 = 4R^2$ nên suy ra $AQ.AM = 4R^2$. Đến đây ta có biến đổi

$$\begin{aligned} &AQ.AM = 4R^2 \Leftrightarrow \left(AO + OQ\right).\left(AO - OM\right) = 4R^2 \\ &\Leftrightarrow \left(R + OQ\right).\left(R - OM\right) = 4R^2 \Leftrightarrow R^2 - R.OM + R.OQ - OQ.OM = 4R^2 \\ &\Leftrightarrow R^2 + R\left(OQ - OM\right) - R^2 = 4R^2 \Rightarrow OQ - OM = 4R \end{aligned}$$

Do vậy ta luôn tính được OQ, OM theo R. Mà O cố định và R không đổi nên Q, M cố định. Vậy đường tròn $\left(I\right)$ luôn đi qua 2 điểm cố định M và Q khi C di động trên đường tròn $\left(O\right)$.