

Thời gian: 150 phút (Không tính thời gian giao đề)

**PHẦN 1: PHẦN TRẮC NGHIỆM (6,0 điểm)**

- Câu 1.** Cho  $a+b=2$  và  $a^2+b^2=20$ . Giá trị của  $a^3+b^3$  là  
**A.** 56.                      **B.** 40.                      **C.** -40.                      **D.** 54.
- Câu 2.** Tính  $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$  được kết quả là  
**A.**  $a^3+b^3+c^3-abc$       **B.**  $a^3+b^3+c^3-3abc$       **C.**  $a^3+b^3+c^3+3abc$       **D.**  $a^3+b^3+c^3+abc$
- Câu 3.** Số giá trị nguyên của  $a$  để đa thức  $2x^a y^7 - 3x^4 y^8$  chia hết cho đơn thức  $7xy^a$  là  
**A.** 3.                      **B.** 7.                      **C.** 6.                      **D.** 5.
- Câu 4.** Khi đa thức  $20x^2 y^2 - 5x^2 y + 15x^2 y^3$  chia hết cho đơn thức  $5x^n y$  thì bậc lớn nhất của đa thức thương là  
**A.** 3.                      **B.** 4.                      **C.** 2.                      **D.** 5.
- Câu 5.** Hệ số  $a$  để đa thức  $2x^2 + ax + 1$  chia cho  $x - 3$  dư 4 là  
**A.** -5.                      **B.** 5.                      **C.**  $\frac{14}{3}$                       **D.** -4.
- Câu 6.** Cho đa thức  $f(x)$  bậc 4 với hệ số bậc cao nhất là 1 và thỏa mãn  $f(1)=10$ ;  $f(2)=20$ ;  $f(3)=30$ . Giá trị của biểu thức  $\frac{f(12)+f(-8)}{10} + 39$  là  
**A.** 2023.                      **B.** 1980.                      **C.** 2019.                      **D.** 1984.
- Câu 7.** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $x^2 + 8x + 8$  là  
**A.** 3.                      **B.** -8.                      **C.** 4.                      **D.** 7.
- Câu 8.** Hiệu hai bình phương của hai số chẵn liên tiếp thì luôn chia hết cho  
**A.** 8.                      **B.** 9.                      **C.** 4.                      **D.** 11.
- Câu 9.** Cho  $x, y, z$  thỏa mãn  $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 10x + 6y + 34 = 0$ .  
Kết quả của biểu thức  $A = x + y - z$  là  
**A.** -16.                      **B.** 34.                      **C.** 8.                      **D.** 0.
- Câu 10.** Hình thang cân  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) có  $\widehat{C} = 60^\circ$ ,  $DB$  là tia phân giác của góc  $D$ . Khi chu vi hình thang bằng 20 cm thì độ dài cạnh  $AB$  là  
**A.** 20 cm.                      **B.** 12 cm.                      **C.** 8 cm.                      **D.** 4 cm.
- Câu 11.** Cho hình thang ( $AB \parallel CD$ ). Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo. Qua  $O$  kẻ đường thẳng song song với hai đáy cắt  $BC$  tại  $I$ , cắt  $AD$  tại  $J$ . Khi đó ta có:

$$\frac{2}{OI} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$

A.

$$\frac{2}{IJ} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$

B.

$$\frac{1}{OI} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{CD}$$

C.

$$\frac{2}{IJ} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{CD}$$

D.

**Câu 12.** Lớp 8B kiểm tra vấn đáp môn Lịch sử & Địa lý bằng hình thức bốc thăm. Nội dung đề gồm các câu hỏi trả lời theo các mức độ: Nhận biết, Thông hiểu, Vận dụng và Vận dụng cao. Biết rằng mỗi lá thăm ghi một câu hỏi. Học sinh thực hiện bốc thăm ngẫu nhiên một lần và trả lời câu hỏi. Kết quả mức độ các câu hỏi được bốc được thống kê trong bảng sau:

Mức độ câu hỏi	Nhận biết	Thông hiểu	Vận dụng	Vận dụng cao
Số lần được bốc	20	15	10	5

Tính xác suất thực nghiệm của biến cố “Bốc thăm được câu hỏi mức độ Vận dụng hoặc Vận dụng cao”.

$$\frac{3}{10}$$

A.

$$\frac{1}{5}$$

B.

$$\frac{1}{10}$$

C.

$$\frac{2}{25}$$

D.

## PHẦN 2: PHẦN TỰ LUẬN (14,0 điểm)

**Bài 1:** (2,0 điểm)

1. Phân tích các đa thức thành nhân tử

a)  $x^2 + 2xy + 7x + 7y + y^2 + 10$

b)  $(x+2)(x+4)^2(x+8) - 63x^2$

2. Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3}$  với  $x \neq -1$  và  $x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức  $A$ .

b) Tìm giá trị của  $x$  để  $A < 0$ .

**Bài 2:** (2,0 điểm)

1. Xác định đa thức  $P(x)$  biết  $P(x)$  chia cho đa thức  $x+1$  dư 4 và  $P(x)$  chia cho đa thức  $x+2$  thì dư 6, còn khi  $P(x)$  chia cho đa thức  $x^2+3x+2$  thì được thương là  $x+3$  và còn dư.

2. Tìm  $a, b, c$  biết:  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$  và  $a^8 + b^8 + c^8 = 3$ .

**Bài 3:** (3,0 điểm)

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:  $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$ .

2. Chứng minh rằng nếu  $a, b, c, d$  là các số nguyên dương đôi một khác nhau sao cho biểu thức  $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a}$  là một số nguyên thì tích  $abcd$  là số chính phương.

**Bài 4:** (6,0 điểm)

Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ , biết hai đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Lấy điểm  $I$  thuộc cạnh  $AB$ , điểm  $M$  thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $\angle IOM = 90^\circ$  ( $I$  và  $M$  không trùng với các đỉnh của hình vuông). Gọi  $N$  là giao điểm của  $AM$  và  $CD$ ,  $K$  là giao điểm của  $OM$  và  $BN$ .

a) Chứng minh  $\triangle BIO = \triangle CMO$  và tính diện tích tứ giác  $BIOM$  theo  $a$ .

b) Chứng minh  $\angle KMN = \angle CO$ .

c) Chứng minh  $\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$ .

**Bài 5:** (1,0 điểm)

Cho  $x, y, z$  là các số dương thỏa mãn  $x+y+z=1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$$

----- HẾT -----

Họ tên học sinh:.....; Số báo danh:.....

### HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN

#### PHẦN I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6 điểm)

#### BẢNG ĐÁP ÁN

1A	2B	3B	4B	5A	6A
7B	8C	9A	10D	11B	12A

**Câu 1.** Cho  $a+b=2$  và  $a^2+b^2=20$ . Giá trị của biểu thức  $a^3+b^3$  là

- A.** 56                                      **B.** 40                                      **C.** -40                                      **D.** 54

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$$\Rightarrow ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}{2} = \frac{2^2 - 20}{2} = -8$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=2^3-3(-8).2=56$$

Vậy  $a^3+b^3=56$  khi  $a+b=2$  và  $a^2+b^2=20$ .

**Câu 2.** Tính  $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$  được kết quả là

- A.**  $a^3+b^3+c^3-abc$                       **B.**  $a^3+b^3+c^3-3abc$                       **C.**  $a^3+b^3+c^3+3abc$                       **D.**  $a^3+b^3+c^3+abc$

**Lời giải**

**Chọn B**

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$$

**Câu 3.** Số giá trị nguyên của  $a$  để đa thức  $2x^a y^7 - 3x^4 y^8$  chia hết cho đơn thức  $7xy^a$  là

- A.** 3                                      **B.** 7                                      **C.** 6                                      **D.** 5

**Lời giải**

**Chọn B**

Đa thức  $2x^a y^7 - 3x^4 y^8$  chia hết cho đơn thức  $7xy^a$  thì  $2x^a y^7; 3x^4 y^8$  cùng chia hết cho  $7xy^a$  nên  $1 \leq a \leq 7$ .

Mà  $a$  nguyên nên  $a = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ .



Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $x^2 + 8x + 8$  là  $-8$

**Câu 8.** Hiệu hai bình phương của hai số chẵn liên tiếp thì luôn chia hết cho

- A. 8.                      B. 9.                      C. 4.                      D. 11.

Lời giải

**Chọn C**

$$(2n+2)^2 - (2n)^2 = 4(n+1)^2 - 4(n)^2 = 4[(n+1)^2 - (n)^2] : 4$$

**Câu 9.** Cho  $x, y, z$  thỏa mãn  $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 10x + 6y + 34 = 0$ .

Kết quả của biểu thức  $A = x + y - z$  là

- A.  $-16$ .                      B.  $34$ .                      C.  $8$ .                      D.  $0$ .

Lời giải

**Chọn A**

Ta có  $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 10x + 6y + 34 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) + (x^2 + 10x + 25) + (y^2 + 6y + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 + (x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 = 0, (x + 5)^2 = 0, (y + 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + z = 0, x = -5, y = -3$$

$$\Leftrightarrow x = -5; y = -3; z = 8$$

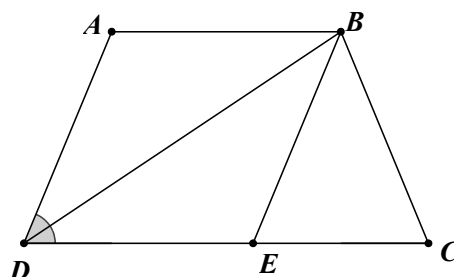
Vậy:  $A = x + y - z = -16$ .

**Câu 10.** Hình thang cân  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) có  $\widehat{C} = 60^\circ$ ,  $DB$  là tia phân giác của góc  $D$ . Khi chu vi hình thang bằng  $20$  cm thì độ dài cạnh  $AB$  là

- A.  $20$  cm.                      B.  $12$  cm.                      C.  $8$  cm.                      D.  $4$  cm.

Lời giải

**Chọn D**



Hình thang  $ABCD$  có  $AB \parallel CD$

$$\Rightarrow \hat{D} = \hat{E} = 60^\circ$$

$DB$  là tia phân giác của góc  $D$

$$\Rightarrow \hat{ADB} = \hat{BDC}$$

$\hat{ABD} = \hat{BDC}$  (hai góc so le trong)

Suy ra:  $\hat{ADB} = \hat{ABD}$

$\Rightarrow \Delta ABD$  cân tại  $A$

$$\Rightarrow AB = AD \quad (1)$$

Từ  $B$  kẻ đường thẳng song song với  $AD$  cắt  $CD$  tại  $E$ .

Hình thang  $ABED$  có hai cạnh bên song song nên  $AB = ED$ ,  $AD = BE$  (2)

Mà  $\hat{BEC} = \hat{ADC}$  (đồng vị)

Suy ra:  $\hat{BEC} = \hat{ADC} = \hat{C} = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta BEC$  đều

$$\Rightarrow EC = BC \quad (3)$$

Ta có:  $AD = BC$  (tính chất hình thang cân) (4)

Từ (1), (2), (3) và (4)  $\Rightarrow AB = BC = AD = ED = EC$

$\Rightarrow$  Chu vi hình thang bằng:

$$AB + BC + CD + AD = AB + BC + EC + ED + AD = 5AB$$

$$\Rightarrow AB = BC = AD = 20 : 5 = 4 \text{ (cm)}$$

**Câu 11.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ). Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo. Qua  $O$  kẻ đường thẳng song song với hai đáy cắt  $BC$  tại  $I$ , cắt  $AD$  tại  $J$ . Khi đó ta có:

$$\frac{2}{OI} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$

$$\text{B. } \frac{2}{IJ} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$

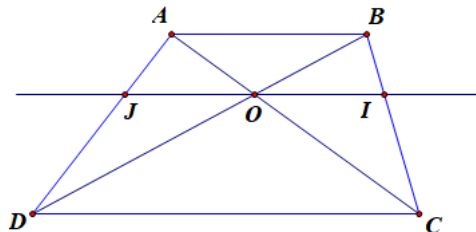
$$\text{C. } \frac{1}{OI} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{CD}$$

$$\text{D. } \frac{2}{IJ} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{CD}$$

A.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Xét } \Delta ABD \text{ có } OJ \parallel AB \Rightarrow \frac{OJ}{AB} = \frac{OD}{DB} \quad (1)$$

$$\text{Xét } \Delta DBC \text{ có } OI \parallel DC \Rightarrow \frac{OI}{CD} = \frac{OB}{BD} \quad (2)$$

$$\text{Xét } \Delta ABC \text{ có } OI \parallel AB \Rightarrow \frac{OI}{AB} = \frac{OC}{AC} \quad (3)$$

Xét  $\triangle ADC$  có  $OJ \parallel DC \Rightarrow \frac{OJ}{DC} = \frac{AO}{AC}$  (Hệ quả của định lý Ta lét) (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra:  $\frac{OJ}{AB} + \frac{OI}{CD} + \frac{OI}{AB} + \frac{OJ}{DC} = \frac{OD}{DB} + \frac{OB}{BD} + \frac{OC}{AC} + \frac{AO}{AC}$

$$\Rightarrow \frac{IJ}{AB} + \frac{IJ}{DC} = \frac{BD}{BD} + \frac{AC}{AC} = 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{IJ} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$

**Câu 12.** Lớp  $8B$  kiểm tra vấn đáp môn Lịch sử & Địa lý bằng hình thức bốc thăm. Nội dung đề gồm các câu hỏi trải theo các mức độ: Nhận biết, Thông hiểu, Vận dụng và Vận dụng cao. Biết rằng mỗi lá thăm ghi một câu hỏi. Học sinh thực hiện bốc thăm ngẫu nhiên một lần và trả lời câu hỏi. Kết quả mức độ các câu hỏi được bốc được thống kê trong bảng sau:

Mức độ câu hỏi	Nhận biết	Thông hiểu	Vận dụng	Vận dụng cao
Số lần được bốc	20	15	10	5

Tính xác suất thực nghiệm của biến cố “Bốc thăm được câu hỏi mức độ Vận dụng hoặc Vận dụng cao”.

**A.**  $\frac{3}{10}$ .

**B.**  $\frac{1}{5}$ .

**C.**  $\frac{1}{10}$ .

**D.**  $\frac{2}{25}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Số học sinh đã tham gia bốc thăm là:  $20 + 15 + 10 + 5 = 50$  (học sinh).

Biến cố “Bốc thăm được câu hỏi mức độ Vận dụng hoặc Vận dụng cao” có số các kết quả thuận lợi là:  $10 + 5 = 15$ .

Xác suất thực nghiệm của biến cố “Bốc thăm được câu hỏi mức độ Vận dụng hoặc Vận dụng cao” là:

$$\frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

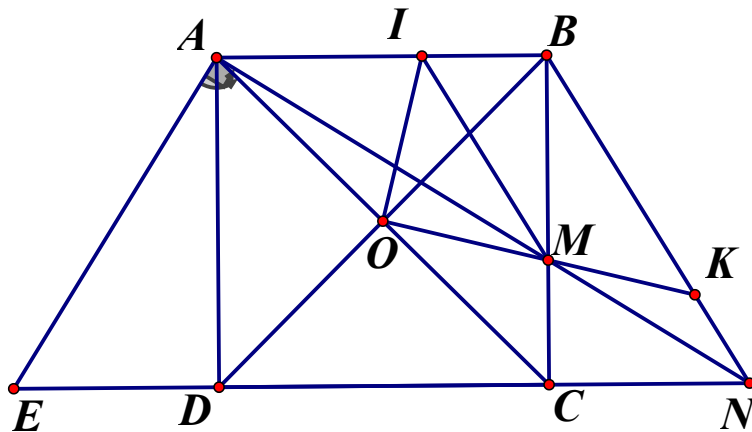
**PHẦN II. PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)**

Câu	Nội dung	Điểm
1.1. Phân tích các đa thức thành nhân tử		
a)	$x^2 + 2xy + 7x + 7y + y^2 + 10$	
b)	$(x+2)(x+4)^2(x+8) - 63x^2$	
<b>a</b>	$x^2 + 2xy + 7x + 7y + y^2 + 10 = (x+y)^2 + 7(x+y) + 10 = 0$ $= (x+y)^2 + 2(x+y) + 5(x+y) + 10 = 0$ $= (x+y+2)(x+y+5)$	0,5
<b>b</b>	$(x+2)(x+4)^2(x+8) - 63x^2 = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 8x + 16) - 63x^2$ $= (x^2 + 9x + 16 + x)(x^2 + 9x + 16 - x) - 63x^2$ $= (x^2 + 9x + 16)^2 - 64x^2 = (x^2 + 9x + 16 - 8x)(x^2 + 9x + 16 + 8x)$ $= (x^2 + x + 16)(x^2 + 17x + 16)$ $= (x^2 + x + 16)(x+1)(x+16)$	0,5
1.2. Cho biểu thức $A = \left( \frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3}$ với $x \neq -1$ và $x \neq 1$		
a)	Rút gọn biểu thức $A$ .	
b)	Tìm giá trị của $x$ để $A < 0$ .	
<b>a</b>	<p>Với <math>x \neq -1</math> và <math>x \neq 1</math> thì:</p> $A = \frac{(1+x+x^2-x) : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)}}{(1+x^2) : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)}}$ $= (1+x^2) : \frac{1}{(1-x)}$ $= (1+x^2)(1-x)$ <p>Vậy với <math>x \neq -1</math> và <math>x \neq 1</math> thì <math>A = (1+x^2)(1-x)</math></p>	0,5
<b>b</b>	<p><math>A &lt; 0</math> khi và chỉ khi <math>(1+x^2)(1-x) &lt; 0</math> (1)</p> <p>Vì <math>1+x^2 &gt; 0</math> với mọi <math>x</math> nên (1) xảy ra khi và chỉ khi <math>1-x &lt; 0 \Leftrightarrow x &gt; 1</math></p> <p>Kết hợp với <math>x \neq -1</math> và <math>x \neq 1</math> vậy <math>x &gt; 1</math> thì <math>A &lt; 0</math></p>	0,5
2.1. Xác định đa thức $P(x)$ biết $P(x)$ chia cho đa thức $x+1$ dư 4 và $P(x)$ chia cho đa thức $x+2$ thì dư 6, còn khi $P(x)$ chia cho đa thức $x^2+3x+2$ thì được thương là $x+3$ và còn dư.		
	<p>Do đa thức <math>x^2+3x+2</math> có bậc 2 nên đa thức dư có dạng <math>ax+b</math> (<math>a</math> và <math>b \in \mathbb{R}</math>)</p> $P(x) = (x^2+3x+2)(x+3) + ax+b$	0,25
	<p>Theo định lí Bozu <math>P(x)</math> chia cho <math>x+1</math> dư 4 <math>\Leftrightarrow -a+b=4</math> (1)</p> <p><math>P(x)</math> chia cho <math>x+2</math> thì dư 6 <math>\Leftrightarrow -2a+b=6</math> (2)</p>	0,25



	Từ (1) $\Leftrightarrow b = 4 + a$ . Thay vào (2) ta được $-2a + 4 + a = 6 \Leftrightarrow a = -2$ $a = -2$ ta được $b = 2$ Thay	0,25
	$P(x) = (x^2 + 3x + 2)(x + 3) - 2x + 2 \Leftrightarrow P(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$ $P(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$ Vậy đa thức	0,25
2.2. Tìm $a, b, c$ biết: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ và $a^8 + b^8 + c^8 = 3$ .		
	Biến đổi $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ về $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$	0,25
	Lập luận suy ra $a = b = c$	0,25
	Thay vào $a = b = c$ vào $a^8 + b^8 + c^8 = 3$ ta có	0,25
	$3a^8 = 3 \Leftrightarrow a^8 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$ Vậy $a = b = c = 1$ và $a = b = c = -1$ .	0,25
3.1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$ .		
	Ta có $2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) + \frac{7}{8} = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0$ Suy ra $x^3 < y^3$ (1) * Giả sử $y^3 < (x + 2)^3$ $\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 3x + 2 < x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ $\Leftrightarrow 4x^2 + 9x + 6 > 0$ $\Leftrightarrow \left(4x^2 + 9x + \frac{81}{16}\right) + \frac{15}{16} > 0$ $\Leftrightarrow \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0$ (luôn đúng) Suy ra điều giả sử là đúng. Vậy $y^3 < (x + 2)^3$ (2)	0,75
	* Từ (1) và (2) suy ra $x^3 < y^3 < (x + 2)^3$ mà $x, y$ là số nguyên nên $y^3 = (x + 1)^3$ Hay $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x + 1)^3$ $\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ $\Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$ + Xét $x = 1 \Rightarrow y = 2$ + Xét $x = -1 \Rightarrow y = 0$ Vậy các cặp $(x; y)$ nguyên thỏa mãn là $(1; 2); (-1; 0)$ .	0,75
3.2. Chứng minh rằng nếu $a, b, c, d$ là các số nguyên dương đôi một khác nhau sao cho biểu thức $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a}$ là một số nguyên thì tích $abcd$ là số chính phương.		

<p> <math display="block">\frac{x}{y+z} &lt; \frac{x}{y} \quad (1)</math> <math display="block">\frac{x}{y} &lt; \frac{x+z}{y+z} \quad (2)</math> </p> <p>           Nhận xét: Nếu <math>x, y, z &gt; 0</math> thì BĐT (1) là hiển nhiên còn BĐT (2) <math>\Leftrightarrow xy + xz &lt; xy + yz \Leftrightarrow xy &lt; xz \Leftrightarrow x &lt; z</math> (luôn đúng với mọi <math>x, y, z</math> dương)         </p>	0,5
<p>           Áp dụng BĐT (1) và (2) với các số nguyên dương <math>a, b, c, d</math> ta có:         </p> $\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c+d}{a+b+c+d};$ $\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c} < \frac{b+a+d}{a+b+c+d};$ $\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d} < \frac{c+a+b}{a+b+c+d};$ $\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a} < \frac{d+b+c}{a+b+c+d};$ <p style="text-align: right;"> <math>1 &lt; T = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a} &lt; 3</math> </p> <p>           Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được: <span style="float: right;">mà</span>  <math>T</math> là một số nguyên nên <math>T = 2</math>.         </p>	0,5
<p>           Khi đó :         </p> $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a+b} - 1\right) + \frac{b}{b+c} + \left(\frac{c}{c+d} - 1\right) + \frac{d}{d+a} = 0$ $(a-c) \left( \frac{b}{(b+c)(a+b)} - \frac{d}{(d+a)(c+d)} \right) = 0$ $\Leftrightarrow \frac{b}{(b+c)(a+b)} = \frac{d}{(d+a)(c+d)} \quad (a \neq c)$ <p>           Biến đổi và rút gọn ta được : <math>(b-d)(ac-bd) = 0</math>.            Lại có <math>b \neq d \Rightarrow ac = bd</math>            Vậy <math>abcd = (ac)^2</math> là một số chính phương.         </p>	0,5
<p>           4. Cho hình vuông <math>ABCD</math> có cạnh bằng <math>a</math>, biết hai đường chéo cắt nhau tại <math>O</math>. Lấy điểm <math>I</math> thuộc cạnh <math>AB</math>, điểm <math>M</math> thuộc cạnh <math>BC</math> sao cho <math>\angle IOM = 90^\circ</math> (<math>I</math> và <math>M</math> không trùng với các đỉnh của hình vuông). Gọi <math>N</math> là giao điểm của <math>AM</math> và <math>CD</math>, <math>K</math> là giao điểm của <math>OM</math> và <math>BN</math>.         </p> <p>a) Chứng minh <math>\triangle BIO = \triangle CMO</math> và tính diện tích tứ giác <math>BIOM</math> theo <math>a</math>.</p> <p>b) Chứng minh <math>\overline{BKM} = \overline{BCO}</math>.</p> <p>c) Chứng minh <math>\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}</math>.</p>	



**a**

$\widehat{BO} = \widehat{CO} (=45^\circ)$  (Tính chất đường chéo hình vuông)  
 $BO = CO$  (tính chất đường chéo hình vuông)  
 $\widehat{BOI} = \widehat{COM}$  (cùng phụ với  $\widehat{BOM}$ )  
 $\Rightarrow \Delta BIO = \Delta CMO$  (g.c.g)  
 $\Rightarrow S_{BIO} = S_{CMO}$  mà  $S_{BMOI} = S_{BOI} + S_{BMO}$   
 Do đó:  $S_{BMOI} = S_{CMO} + S_{BMO} = S_{BOC} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{4} a^2$

**b**

Ta có:  $\Delta BIO = \Delta CMO$  (cmt)  $\Rightarrow CM = BI \Rightarrow BM = AI$   
 Vì  $CN \parallel AB$  nên  $\frac{BM}{CM} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{IA}{IB} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow IM \parallel BN$   
 Ta có:  $OI = OM$  ( $\Delta BIO = \Delta CMO$ )  $\Rightarrow \Delta IOM$  cân tại O  $\Rightarrow \widehat{IMO} = \widehat{MIO} = 45^\circ$   
 Vì  $IM \parallel BN \Rightarrow \widehat{MKM} = \widehat{IMO} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{MKM} = \widehat{BCO}$

**c**

Qua A kẻ tia Ax vuông góc AN cắt CD tại E.  
 Chứng minh  $\Delta ADE = \Delta ABM$  (g.c.g)  $\Rightarrow AE = AM$   
 Ta có:  $\Delta ANE$  vuông tại A có  $AD \perp NE$   
 $S_{AEN} = \frac{AD \cdot NE}{2} = \frac{AN \cdot AE}{2} \Rightarrow AD \cdot NE = AN \cdot AE \Rightarrow (AD \cdot NE)^2 = (AN \cdot AE)^2$   
 Áp dụng định lý Pytago vào  $\Delta ANE$  ta có:  $AN^2 + AE^2 = NE^2$   
 $\Rightarrow AD^2 \cdot (AN^2 + AE^2) = AN^2 \cdot AE^2$   
 $\Rightarrow \frac{AN^2 + AE^2}{AN^2 \cdot AE^2} = \frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2}$   
 Mà  $AE = AM$  và  $CD = AD \Rightarrow \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

5. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn  $x + y + z = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  
 $P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$

<p>Ta có:</p> $P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} = (x+y+z) \left( \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \right)$ $= \left( \frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \right) + \left( \frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \right) + \left( \frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \right) + \frac{21}{16}$ <p>Theo BĐT Cô Si ta có: <math>\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \geq \frac{1}{4}</math> dấu “=” khi <math>y = 2x</math>;</p>	0,5
<p>Tương tự: <math>\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \geq \frac{1}{2}</math> dấu “=” khi <math>z = 4x</math>;</p> <p><math>\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \geq 1</math> dấu “=” khi <math>z = 2y</math>;</p> <p><math>\Rightarrow P \geq \frac{49}{16}</math>. Dấu “=” xảy ra khi <math>x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}</math></p> <p>Vậy: Min <math>P = \frac{49}{16}</math> với <math>x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}</math>.</p> <p>*Cách khác: HS có thể áp dụng trực tiếp BĐT Svac-xơ (Cô si dạng cộng mẫu) để đánh giá.</p>	0,5

----- **HẾT** -----

----- Tài liệu được chia sẻ bởi

Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>