SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÒNG GD VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI KHẢO SÁT HSG GIỎI
NĂM HỌC 2023-2024

ĐỀ SỐ 11

MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút(Không tính thời gian giao đề)

PHẦN I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6 điểm)

Câu 1: Cho ba số thực a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+4c^2+1=2(a+b+2c-1)$. Giá trị của biểu thức: $P=a^{2022}+(b-2)^{2023}+(2c-1)^{2024}$ là :

A. 2023. **B.** 0 **C.** 2022. **D.** 2133.

Câu 2: Rút gọn biểu thức $A=(x+5)^2+(3-x)(10+2x)+x^2-6x+9$ ta được kết quả là:

A. $A=4$. **B.** $A=-16$. **C.** $A=16$. **D.** $A=-19$.

Câu 3: Kết quả của phép chia $\left[(x-y)^5-(x-y)^4+(x-y)^3-(x-y)^2\right]:(y-x)^2$ là

A. $(x-y)^3-(x-y)+1$. **B.** $-(x-y)^3+(x-y)+1$.

C. $(x-y)^3+(x-y)+1$. **D.** $(x-y)^3-(x-y)^2+(x-y)-1$.

Câu 4: Xác định đa thức $f(x)=2x^3-ax^2+2x+b$, biết đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $x-1$ và $x+2$.

A. $f(x)=3x^3-10x^2-7x+5$ **B.** $f(x)=3x^3+10x^2-7x-6$

C. $f(x)=3x^3+10x^2-7x+16$ **D.** $f(x)=2x^3+8x^2+2x-12$

Câu 5: Biểu thức $A=2x^2+3x-4$ có giá trị nhỏ nhất là :

A. $A=4$. **B.** $A=-4$. **C.** $A=\dfrac{-41}{8}$. **D.** $A=-19$.

Câu 6: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C=2x^2+y^2-4x+2xy+1$ là.

A. 2023 **B.** -2022 **C.** 1020098 **D.** -3

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị của x thoả mãn $x^3-5x^2+5-x=0$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 8: Giá trị của a để đa thức $x^{2023}-3x-a$ chia hết cho đa thức $x-1$ là

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 9: Giá trị của a, b sao cho đa thức $f(x)=ax^3+bx^2+10x-4$ chia hết cho đa thức $g(x)=x^2+x-2$ là:

A. $a=4;b=-2$. **B.** $a=-4;b=-2$.

C. $a=-4;b=2$. **D.** $a=4;b=2$.

Câu 10: Hình thang $ABCD$ $(AB\,//\,CD)$; $\hat{A}=3\hat{D}$, $\hat{B}-\hat{C}=30^\circ$. Khi đó tổng $\hat{A}+\hat{B}$ bằng:

A. 180° **B.** 210° **C.** 240° **D.** 270°

Câu 11. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\hat{A}=\hat{D}=90^\circ$; $\hat{C}=45^\circ$; $AB=2$ cm; $CD=4$ cm. Diện tích của hình thang vuông $ABCD$ là:

A. 3 cm^2 **B.** 8 cm^2 **C.** 4 cm^2 **D.** 6 cm^2

Câu 12: Gieo một con xúc xắc 40 lần thu được kết quả ở bảng dưới đây:

Mặt	1 chấm	2 chấm	3 chấm	4 chấm	5 chấm	6 chấm
Số lần xuất hiện	4	6	7	9	8	6

Hỏi xác suất thực nghiệm để gieo được mặt xuất hiện có số chấm là số lẻ là:

A. $\frac{6}{15}$. **B.** $\frac{4}{15}$. **C.** $\frac{19}{40}$. **D.** $\frac{2}{15}$.

PHẦN II. PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)

Câu I. (2 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử $A = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

b) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Hãy tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{a^{2022}}{b^{2022}} + \frac{b^{2022}}{c^{2022}} + \frac{c^{2022}}{a^{2022}}$$

Câu II. (3 điểm)

a) Tìm nghiệm của đa thức sau. $f(x) = (x^2 - 3x + 3)(x^2 - 2x + 3) - 2x^2$.

b) Cho các số a, b khác 0 thoả mãn $a^2 + b^4 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^4} = 4$. Tìm hai số a; b

Câu III. (2 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 2xy + 2y^2 = 4y$.

b) Cho số nguyên dương n và các số $A = \underbrace{44\ldots4}_{2n}$ và $B = \underbrace{88\ldots8}_{n}$. Chứng minh rằng: $A + 2B + 4$ là số chính phương.

Câu IV. (6 điểm) Cho tam giác ABC vuông cân tại B, M là điểm bất kì trên cạnh BC. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C dựng hình vuông $ABCD$ và hình vuông $AMHN$

a) Chứng minh rằng $BM = ND$ và 3 điểm $N; D; C$ thẳng hàng.

b) Qua M dựng đường thẳng d song song với AB, d cắt AH ở E, AH cắt DC ở F. Tứ giác MENF là hình gì ?

c) Cho $AB = a$, xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC để diện tích tam giác MFC lớn nhất?

Câu IV. (1 điểm) Cho $x > 0; y > 0$ và $x + y \geq 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức. $P = 2x^2 + y^2 + \frac{28}{x} + \frac{1}{y} + 2022$

-------------------------------------- **HẾT** --------------------------------------

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN

PHẦN I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6 điểm)

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.D	4.D	5C	6.D	7.C	8.A	9.B	10.C
11.D	12.C								

Câu 1: Cho ba số thực a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+4c^2+1=2(a+b+2c-1)$.

Tính giá trị của biểu thức: $P=a^{2022}+(b-2)^{2023}+(2c-1)^{2024}$.

A. 2023. **B.** 0 **C.** 2022. **D.** 2133.

Lời giải

Với ba số thực a,b,c thỏa mãn:

$a^2+b^2+4c^2+1=2(a+b+2c-1)$

$a^2+b^2+4c^2+1-2a-2b-4c+2=0$

$(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(4c^2-4c+1)=0$

$(a-1)^2+(b-1)^2+(2c-1)^2=0$

Mà $(a-1)^2\ge 0$; $(b-1)^2\ge 0$; $(2c-1)^2\ge 0$ với mọi a,b,c

Nên $a-1=0$; $b-1=0$; $2c-1=0$

Suy ra $a=1$; $b=1$; $c=\dfrac{1}{2}$

Thay $a=1$; $b=1$; $c=\dfrac{1}{2}$ vào biểu thức P ta có:

$$P=a^{2022}+(b-2)^{2023}+(2c-1)^{2024}=1^{2022}+(1-2)^{2023}+\left(2.\frac{1}{2}-1\right)^{2024}=1+(-1)+0=0.$$

Vậy $P=0$ với a,b,c thỏa mãn đề bài

Đáp án cần chọn là. **B.**

Câu 2: Rút gọn biểu thức $A=(x+5)^2+(3-x)(10+2x)+x^2-6x+9$ ta được kết quả là:

A. $A=4$. **B.** $A=-16$. **C.** $A=16$. **D.** $A=-19$.

Lời giải

$A=(x+5)^2+(3-x)(10+2x)+x^2-6x+9$

$=(x+5)^2+2(3-x)(5+x)+(3-x)^2$

$=(x+5+3-x)^2=(8)^2=16$

Đáp án cần chọn là. C.

Câu 3: Kết quả của phép chia $\left[(x-y)^5-(x-y)^4+(x-y)^3-(x-y)^2\right]:(y-x)^2$ là

A. $(x-y)^2-(x-y)+1$.

B. $-(x-y)^2+(x-y)+1$.

C. $(x-y)^2+(x-y)+1$.

D. $(x-y)^3-(x-y)^2+(x-y)-1$.

Lời giải

Ta có: $(x-y)^2=\left[-(y-x)\right]^2$

$\left[(x-y)^5-(x-y)^4+(x-y)^3-(x-y)^2\right]:(y-x)^2$

$=(x-y)^5:(x-y)^2-(x-y)^4:(x-y)^2+(x-y)^3:(x-y)^2-(x-y)^2:(x-y)^2$

$=(x-y)^3-(x-y)^2+(x-y)-1$.

Đáp án cần chọn là. D.

Câu 4: Xác định đa thức $f(x)=2x^3-ax^2+2x+b$, biết đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $x-1$ và $x+2$.

A. $f(x)=3x^3-10x^2-7x+5$

B. $f(x)=3x^3+10x^2-7x-6$

C. $f(x)=3x^3+10x^2-7x+16$

D. $f(x)=2x^3+8x^2+2x-12$

Lời giải

$f(x)$ chia hết cho $x-1$ nên $f(1)=0$

$\Rightarrow 2-a+2+b=0\Rightarrow a-b=4\Rightarrow a=4+b$, (1)

+ $f(x)$ chia hết cho $x+2$ nên $f(-2)=0$

$\Rightarrow -16-4a-4+b=0\Rightarrow 4a-b=-20$ (2)

Thay $a=4+b$ vào (2) ta được

$4(4+b)-b=-20\Leftrightarrow 16+4b-b=-20$

$\Leftrightarrow 3b=-36\Leftrightarrow b=-12$

Với $b=-12\Rightarrow a=4+(-12)=-8$

Vậy $f(x)=2x^3+8x^2+2x-12$

Đáp án cần chọn là. D.

Câu 5: Biểu thức $A=2x^2+3x-4$ có giá trị nhỏ nhất là :

A. $A=4$. **B.** $A=-4$. **C.** $A=\frac{-41}{8}$. **D.** $A=-19$.

Lời giải

Ta có: $A=2x^2+3x-4=2\left(x^2+2x.\frac{3}{4}+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{8}-4=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{41}{8}\geq-\frac{41}{8}$

Dấu "$=$" xảy ra khi $x+\frac{3}{4}=0$. Suy ra $x=\frac{-3}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{-41}{8}$ đạt được khi $x=\frac{-3}{4}$

Đáp án cần chọn là. C.

Câu 6: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C=2x^2+y^2-4x+2xy+1$ là.

.**A.** 2023 **B.** -2022 **C.** 1020098 **D.** -3

Lời giải

Ta có:

$C=2x^2+y^2-4x+2xy+1$

$=(x^2-4x+4)+(y^2+2xy+x^2)-3$

$=(x-2)^2+(x+y)^2-3\geq-3$

Dấu "$=$" xảy ra khi $x-2=0$; $x=-y$

Suy ra $x=2$ và $y=-2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của H bằng -3 khi $x=2$ và $y=-2$.

Đáp án cần chọn là. **D.**

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị của x thoả mãn $x^3-5x^2+5-x=0$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

$x^3-5x^2+5-x=0$

$x^2(x-5)-(x-5)=0$

$(x^2-1)(x-5)=0$

$(x-1)(x+1)(x-5)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\x+1=0\\x-5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\x=5\end{array}\right.$.

Vậy có ba giá trị của x thoả mãn đề bài

Đáp án cần chọn là. C.

Câu 8: Giá trị của a để đa thức $x^{2023} - 3x - a$ chia hết cho đa thức $x - 1$ là

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $x^{2023} - 3x - a$

$=(x^{2023} - 1) - 3(x - 1) - a - 2$

$=(x - 1)f(x) - 3(x - 1) - a - 2$

Để $x^{2023} - 3x - a$ chia hết cho đa thức $x - 1$ thì: $-a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$

Đáp án cần chọn là. A.

Câu 9: Giá trị của a, b sao cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$ là:

A. $a = 4; b = -2$. **B.** $a = -4; b = -2$.
C. $a = -4; b = 2$. **D.** $a = 4; b = 2$.

Lời giải

Đa thức $g(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$

$\Rightarrow g(x)$ có hai nghiệm là 1 và -2

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = a + b + 6 = 0 \\ f(-2) = -8a + 4b - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -6 \\ -2a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \end{cases}$$

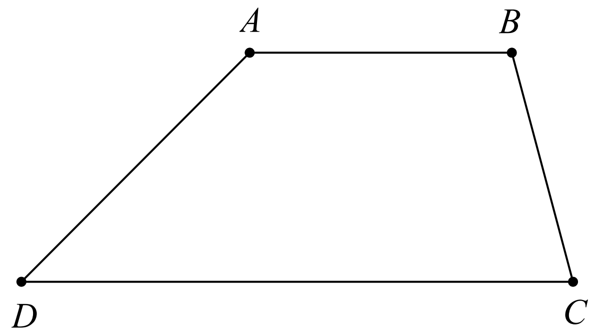
Vậy với $\begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \end{cases}$ thì đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$.

Đáp án cần chọn là. **B.**

Câu 10: Hình thang $ABCD$ $(AB \parallel CD)$; $\hat{A} = 3\hat{D}$, $\hat{B} - \hat{C} = 30^\circ$. Khi đó tổng $\hat{A} + \hat{B}$ bằng:

A. 180° **B.** 210° **C.** 240° **D.** 270°

Lời giải



Ta có: $\hat{A} = 3\hat{D}$

mà $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía, $AB \,//\, CD$)

$\Rightarrow \hat{A} = 135^\circ$

Lại có: $\hat{B} - \hat{C} = 30^\circ$

mà $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía, $AB \,//\, CD$)

$\Rightarrow \hat{B} = 105^\circ$

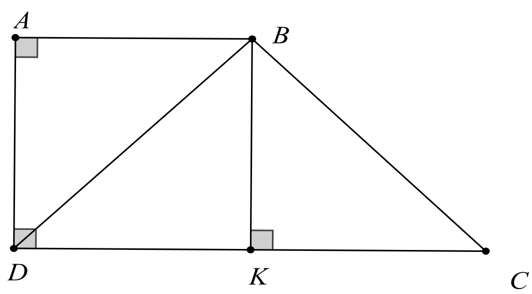
Vậy $\hat{A} + \hat{B} = 135^\circ + 105^\circ = 240^\circ$.

Đáp án cần chọn là. C.

Câu 11. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$; $\hat{C} = 45^\circ$; $AB = 2$ cm; $CD = 4$ cm. Diện tích của hình thang vuông $ABCD$ là:

A. 3 cm^2 **B.** 8 cm^2 **C.** 4 cm^2 **D.** 6 cm^2

Lời giải



Kẻ $BK \perp DC$

Xét ΔABD và ΔKDB có :

$\widehat{ABD} = \widehat{BDK}$ (hai góc so le trong do $AB \,//\,$ DK)

BD là cạnh chung

$\widehat{ADB} = \widehat{DBK}$ (hai góc so le trong do AD // BK)

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta KDB$ (g.c.g)

$\Rightarrow AB = DK$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $AB = 2$ cm $\Rightarrow DK = AB = 2$ cm

$\Rightarrow KC = CD - DK = 4 - 2 = 2$ cm

Xét ΔBKC vuông tại K có: $\widehat{C} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{KBC} = 45^\circ$

$\Rightarrow \Delta BKC$ vuông cân tại $K \Rightarrow KB = KC = 2$ cm

$AB = 2$ cm; $CD = 4$ cm.

Diện tích của hình thang vuông $ABCD$ là: $\dfrac{2 \cdot (2+4)}{2} = 6\left(\text{cm}^2\right)$

Đáp án cần chọn là. **D.**

Câu 12: Gieo một con xúc xắc 40 lần thu được kết quả ở bảng dưới đây:

Mặt	1 chấm	2 chấm	3 chấm	4 chấm	5 chấm	6 chấm
Số lần xuất hiện	4	6	7	9	8	6

Hỏi xác suất thực nghiệm để gieo được mặt xuất hiện có số chấm là số lẻ là:

A. $\dfrac{6}{15}$. **B.** $\dfrac{4}{15}$. **C.** $\dfrac{19}{40}$. **D.** $\dfrac{2}{15}$.

Lời giải

Số lần mặt xuất hiện có số chấm là số lẻ là: 4 + 7 + 8 = 19

Xác suất thực nghiệm để gieo được mặt xuất hiện có số chấm là số lẻ là: $\dfrac{19}{40}$

Đáp án cần chọn là. **C.**

PHẦN II. PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu I. (2 điểm) a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử $A = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. b) Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{a^{2022}}{b^{2022}} + \dfrac{b^{2022}}{c^{2022}} + \dfrac{c^{2022}}{a^{2022}}$		
	a $A = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$	

	$=x^3+y^3+3xy(x+y)+z^3-3xy(x+y)-3xyz$ $=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)$ $=(x+y+z)\left[(x+y)^2-(x+y)z+z^2\right]-3xy(x+y+z)$ $=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$.		
	b)Ta có: $a^3+b^3+c^3=3abc \Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0$ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3-3abc-3a^2b-3ab^2=0$ $(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)=0$ $(a+b+c)\left[(a+b)^2-(a+b)c+c^2\right]-3ab(a+b+c)=0$ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$ Vì $a,b,c>0$ => $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ $\begin{cases}a-b=0\\b-c=0\\c-a=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=b\\b=c\\c=a\end{cases} \Rightarrow a=b=c$ Vậy $A=\frac{a^{2022}}{b^{2022}}+\frac{b^{2022}}{c^{2022}}+\frac{c^{2022}}{a^{2022}}=1+1+1=3$		
Câu II. (3 điểm) a) Tìm nghiệm của đa thức sau. $f(x)=(x^2-3x+3)(x^2-2x+3)-2x^2$. b) Tìm hai số a; b thỏa mãn các đẳng thức sau: $a^2+8b^2=12$ và $a^3+2ab^2+12b=0$			
	Nghiệm của đa thức là nghiệm của phương trình : $f(x)=(x^2-3x+3)(x^2-2x+3)-2x^2=0$ $(x^2-3x+3)(x^2-2x+3)=x^2$ (1) Đặt $x^2-3x+3=y \Rightarrow x^2-2x+3=y+x$. Phương trình (1) trở thành: $y(y+x)=2x^2$ $y^2+yx-2x^2=0$ $(y-x)(y+2x)=0$		

Do đó $y-x=0$ hoặc $y+2x=0$.

+ Với $y-x=0$, thay phép đặt vào ta được: $x^2-3x+3-x=0$

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

Suy ra $x-1=0$ hoặc $x-3=0$.

Do đó $x=1$ hoặc $x=3$.

+ Với $y+2x=0$, thay phép đặt vào ta được: $x^2-3x+3+2x=0$

$x^2-x+3=0$

$x^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4}+\frac{11}{4}=0$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}=0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{1;3\}$.

b) Ta có $a^2+b^4+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^4}=4$

$a^2-2+\frac{1}{a^2}+b^4-2+\frac{1}{b^4}=0$

$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+\left(b^2-\frac{1}{b^2}\right)^2=0$

Mà $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\ge 0$; $\left(b^2-\frac{1}{b^2}\right)^2\ge 0$ với mọi a, b

Nên dấu "$=$" xảy ra khi: $a-\frac{1}{a}=0$ (1) và $b^2-\frac{1}{b^2}=0$ (2)

Giải (1):

$a-\frac{1}{a}=0$

$a^2-1=0$

$a^2=1$

Suy ra $a=1$ hoặc $a=-1$ (thỏa mãn $a\ne 0$)

Giải (2):

$b^2-\frac{1}{b^2}=0$

$b^4-1=0$

$(b^2-1)(b^2+1)=0$

Suy ra $b^2-1=0$ hoặc $b^2+1=0$ (vô nghiệm do $b^2+1\geq 0$ với mọi b)

Suy ra $b=1$ hoặc $b=-1$ (thỏa mãn $b\neq 0$)

Câu III. (2. điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-2xy+2y^2=4y$.

b) Cho số nguyên dương n và các số $A=\underbrace{44\ldots4}_{2n}$ và $B=\underbrace{88\ldots8}_{n}$. Chứng minh rằng: $A+2B+4$ là số chính phương.

a) Ta có $x^2-2xy+2y^2=4y$

$x^2-2xy+y^2+y^2-4y+4=4$

$(x-y)^2+(y-2)^2=0^2+2^2$

TH1: $\begin{cases}(y-2)^2=0\\(x-y)^2=2^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2\\ \left[\begin{array}{l}x-2=2\\x-2=-2\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2\\ \left[\begin{array}{l}x=4\\x=0\end{array}\right.\end{cases}$

TH2: $\begin{cases}(y-2)^2=2^2\\(x-y)^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y-2=2\\y-2=-2\end{array}\right.\\ x=y\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=4\\x=y=0\end{array}\right.$

Vậy (x; y) là: $(4;2),(0;2),(4;4),(0;0)$

b) Đặt $a=\underbrace{11\ldots1}_{n}$ thì $a\in\mathbf{N}$

Ta có $A=\underbrace{44\ldots4}_{2n}=4\left(\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{11\ldots1}_{n}\right)=4\left(a.10^n+a\right)=4a.10^n+4a$

$A=4a.\left(\underbrace{99\ldots9}_{n}+1\right)+4a=4a.\left(9.\underbrace{11\ldots1}_{n}+1\right)+4a=4a.(9.a+1)+4a=36a^2+8a$

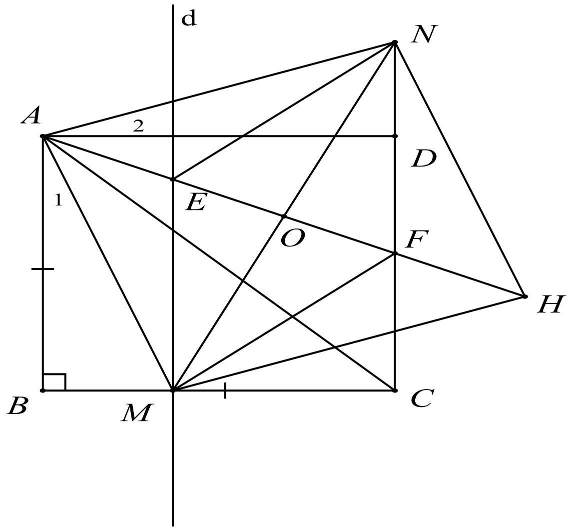
Ta cũng có $B=\underbrace{88\ldots8}_{n}=8.\underbrace{11\ldots1}_{n}=8a$ nên $2B=16a$

Do đó: $A+2B+4=36a^2+24a+4=(6a+2)^2$

Vì $a\in\mathbf{N}$ nên $6a+2$ là số tự nhiên

Vậy $A=(6a+2)^2$ là một số chính phương (đpcm)

Câu IV. (6 điểm)

<table>
<tr><td colspan="3">Cho tam giác ABC vuông cân tại B, M là điểm bất kì trên cạnh BC. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C dựng hình vuông $ABCD$ và hình vuông $AMHN$
a) Chứng minh rằng $BM = ND$ và 3 điểm $N;D;C$ thẳng hàng.
b) Qua M dựng đường thẳng d song song với AB, d cắt AH ở E, AH cắt DC ở F. Tứ giác MENF là hình gì ?
c) Cho $AB = a$, xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC để diện tích tam giác MFC lớn nhất?</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>a) Có $ABCD$ là hình vuông (gt)
$\Rightarrow \begin{cases} AB = BC = CD = DA \\ \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = \widehat{BAD} = 90^\circ \end{cases}$ (định nghĩa)

+ Có $AMHN$ là hình vuông (giải thiết)
$\Rightarrow \begin{cases} AM = MH = HN = AN \\ \widehat{AMH} = \widehat{MHN} = \widehat{ANH} = \widehat{NAM} = 90^\circ \end{cases}$ (định nghĩa)

+ Có $\widehat{A}_1 + \widehat{MAD} = \widehat{BAD} = 90^\circ$ mà $\widehat{A}_2 + \widehat{MAD} = \widehat{MAN} = 90^\circ$.
$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.

+ Xét ΔABM và ΔADN :
$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$</td><td></td></tr>
</table>

	$AB = AD$ (chứng minh trên) $AM = AN$ $\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ADN(cgc)$ $\Rightarrow BM = DN$ (2 cạnh tương ứng) $\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ADN}$ (2 góc tương ứng) + Có $\widehat{ABM} = \widehat{ADN}$ mà $\widehat{ABM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ADN} = 90^\circ$. $\Rightarrow \widehat{ADN} + \widehat{ADC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ $\Rightarrow \widehat{NDC} = 180^\circ \Rightarrow N, D, C$ thẳng hàng.	
	b) Có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB // CD$, $AD // BC$ (tính chất hình vuông) Có $ME // AB$ mà $AB // CD$ (chứng minh trên) $\Rightarrow ME // CD$ (từ vuông góc đến song song) Hay $ME // NF$ (vì N, D, F, C thẳng hàng) Có $AMHN$ là hình vuông $\Rightarrow AH \perp MN$ hay $MN \perp \mathrm{EF}$ Gọi O là giao điểm của EF và MN Có $AM = AN$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A Mà AD là đường cao ($AH \perp MN$) $\Rightarrow AD$ đồng thời là trung tuyến. $\Rightarrow O$ là trung điểm của $MN \Rightarrow OM = ON$ Có $ME // NF \Rightarrow \widehat{OME} = \widehat{ONF}$ (2 góc so le trong) Xét ΔMOE và $\Delta \mathrm{ONF}$ có : $\widehat{OME} = \widehat{ONF}$ (chứng minh trên) $OM = ON$	

$\widehat{MOE} = \widehat{NOF}$ (2 góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta MOE = \Delta NOF (g.c.g)$

$\Rightarrow ME = NF$ (2 cạnh tương ứng)

Tứ giác MENF có $ME = NF$, $ME // NF$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow MENF$ là hình bình hành(dấu hiệu nhận biết hình bình hành)

Mà $MN \perp$ EF (chứng minh trên)

$\Rightarrow MENF$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết hình thoi

c) Tìm vị trí của M trên BC để S_{CMF} lớn nhất

Vì $MENF$ là hình thoi (theo câu b) nên $FM = FN$.

Mà $DN = BM$ (theo câu a) $\Rightarrow CM + MF + FC = CM + FN + FC$

$\Rightarrow CM + MF + FC = (CM + DN) + (FD + FC) = a + a = 2a$

$\Rightarrow CM + \sqrt{CM^2 + CF^2} + FC = 2a$

$\Rightarrow 2a = (CM + CF) + \sqrt{CM^2 + CF^2}$

$\Rightarrow 2a \geq 2\sqrt{CM.CF} + \sqrt{2CM.CF} = (2+\sqrt{2})\sqrt{CM.CF}$

$\Rightarrow \dfrac{2a}{2+\sqrt{2}} \geq \sqrt{CM.CF} \Leftrightarrow (\dfrac{2a}{2+\sqrt{2}})^2 \geq CM.CF \Rightarrow S_{CMF} \leq \dfrac{2a^2}{(2+\sqrt{2})^2}$

Dấu '=' xảy ra khi $CM = CF = \dfrac{2a}{2+\sqrt{2}}$

Vậy giá trị lớn nhất của S_{CMF} là $\dfrac{2a^2}{(2+\sqrt{2})^2}$ khi $CM = \dfrac{2a}{2+\sqrt{2}}$.

Câu IV. (1 điểm)

Cho $x > 0; y > 0$ và $x + y \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức. $P = 2x^2 + y^2 + \dfrac{28}{x} + \dfrac{1}{y} + 2022$

Ta có:

	$P = 2\left(x^2 - 4x + 4\right) + \left(y^2 - 2y + 1\right) + \left(\frac{28}{x} + 7x\right) + \left(\frac{1}{y} + y\right) + (x + y) + 2013$ $P = 2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + \left(\frac{28}{x} + 7x\right) + \left(\frac{1}{y} + y\right) + (x + y) + 2013$ Ta có $2(x - 2)^2 \geq 0$; $(y - 1)^2 \geq 0$; $x + y > 3$ Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các số dương ta c $\frac{28}{x} + 7x \geq 2\sqrt{28.7} = 28;\ \frac{1}{y} + y \geq 2$ $P = 2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + \left(\frac{28}{x} + 7x\right) + \left(\frac{1}{y} + y\right) + (x + y) + 2013$ $\geq 28 + 2 + 3 + 2013 \geq 2046$ Dấu "$=$" xảy ra khi $x - 2 = 0$; $y - 1 = 0$; $\frac{28}{x} = 7x$; $\frac{1}{y} = y$; $x + y = 3$ Suy ra $x = 2$ và $y = 1$ Vậy giá trị nhỏ nhất của $P_{\min} = 2046$ khi $x = 2; y = 1$.	

--------------------------------------- **HẾT** ---------------------------------------

Chú ý:

- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.

- Các trường hợp khác tổ chấm thống nhất phương án chấm.