

PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

Trả lời:

Lời giải

Hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{c}{b}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{b}$.

Từ bảng biến thiên ta có:

$$\begin{cases} -\frac{c}{b} = 2 \\ \frac{a}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = -\frac{c}{2} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$f'(x) = \frac{ac-b}{(bx+c)^2}$$

Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ nên

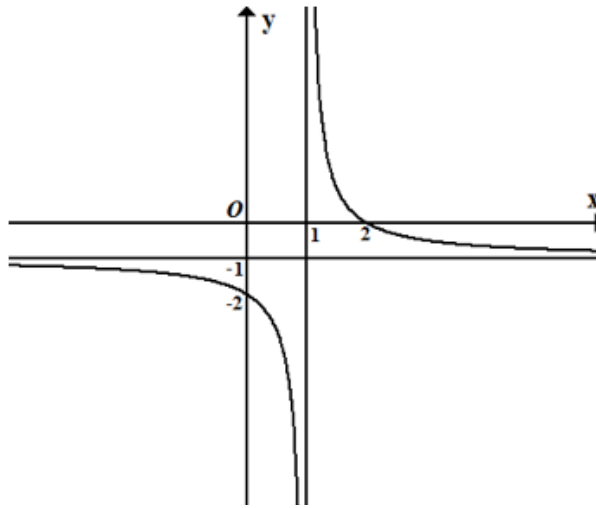
$$f'(x) = \frac{ac-b}{(bx+c)^2} > 0 \Leftrightarrow ac-b > 0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2), ta được:

$$-\frac{c^2}{2} + \frac{c}{2} > 0 \Leftrightarrow -c^2 + c > 0 \Leftrightarrow 0 < c < 1$$

Suy ra c là số dương và a, b là số âm.

Câu 2. (THPT Ba Đình 2019) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + 2b + 3c$?



Trả lời:

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta suy ra

⊛ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1$.

⊛ Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(2;0)$, $B(0;-2)$.

Từ biểu thức hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ (vì đồ thị hàm số là đồ thị hàm nhất biến nên $ac-b \neq 0$), ta suy ra

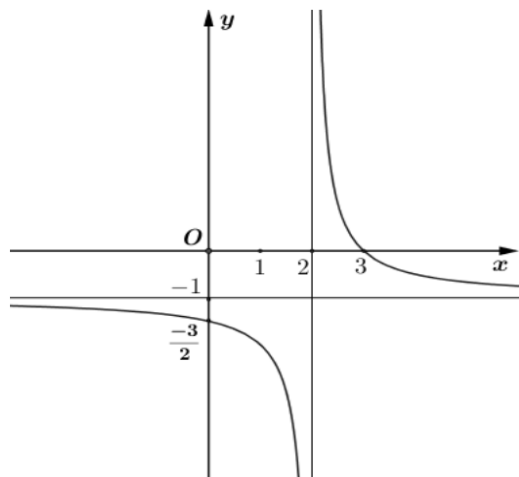
⊛ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-c$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=a$.

⊛ Đồ thị hàm số đi qua $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$, $B\left(0; \frac{b}{c}\right)$.

Đối chiếu lại, ta suy ra $c=-1$, $a=-1$, $b=2$.

Vậy $T = a + 2b + 3c = (-1) + 2 \cdot 2 + 3(-1) = 0$.

Câu 3. (SGD Điện Biên - 2019) Cho hàm số $y = \frac{ax+3}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính giá trị của $a-2c$.



Trả lời:

Lời giải

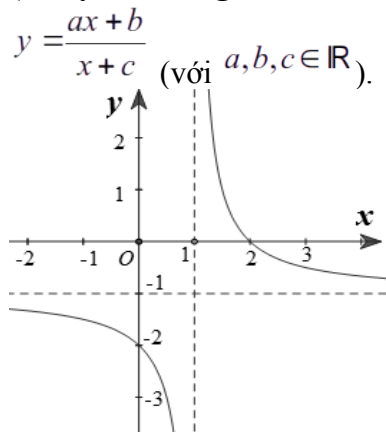
Đồ thị hàm số có TCN $y = -1 \Leftrightarrow \frac{a}{1} = -1 \Leftrightarrow a = -1$.
Mặt khác Đồ thị hàm số có TCD $x = 2$ nên $2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -2$.
 $\Rightarrow a - 2c = -1 - 2 \cdot (-2) = 3$.

Dựa vào đồ thị ta thấy các điểm $(3; 0)$ và $\left(0; -\frac{3}{2}\right)$ thuộc vào đồ thị hàm số đã cho nên ta được hệ

$$\begin{cases} 0 = \frac{a \cdot 3 + 3}{3 + c} \\ -\frac{3}{2} = \frac{a \cdot 0 + 3}{0 + c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 3 = 0 \\ -3c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = -2 \end{cases}$$

phương trình $\Rightarrow a - 2c = -1 - 2 \cdot (-2) = 3$.

Câu 4. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số



Khi đó tổng $a + b + c$ bằng

Trả lời:

Lời giải

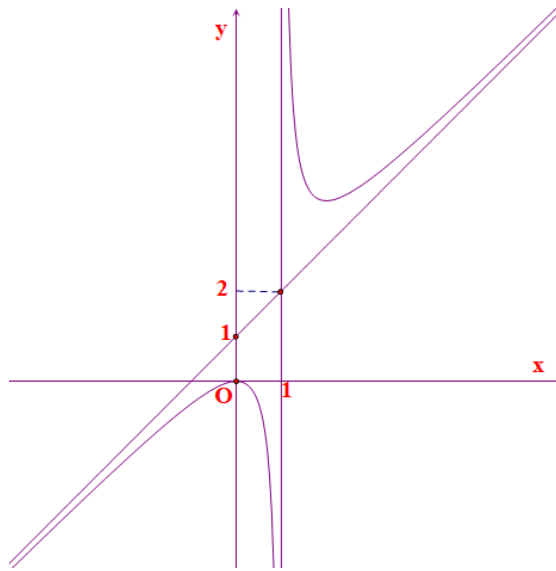
Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đường tiệm cận ngang $y = a$, đường tiệm cận đứng $x = -c$ và cắt Oy tại điểm $\left(0; \frac{b}{c}\right)$.

Từ đồ thị hàm số ta có đường tiệm cận ngang $y = -1$, đường tiệm cận đứng $x = 1$ và cắt Oy tại điểm $(0; -2)$.

$$\begin{cases} a = -1 \\ -c = 1 \\ \frac{b}{c} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = -1 \\ b = -2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra: $a + b + c = -1 - 1 + 2 = 0$. Vậy $a + b + c = -1 - 1 + 2 = 0$.

Câu 5. Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y = ax + b + \frac{1}{x+c}$



Khi đó tổng $a+b+c$ bằng

Trả lời:

Lời giải

Ta có $y=ax+b$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. Từ đồ thị ta suy ra được $y=x+1$ là tiệm cận xiên nên $a=1, b=1$

$x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nên $c=-1$

Vậy $a+b+c=3$

Câu 6.

(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$ và $c \neq 0$). Biết rằng đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(-1; 7)$ và giao điểm hai tiệm cận là $(-2; 3)$. Giá trị biểu

thức $\frac{2a+3b+4c+d}{7c}$ bằng

Trả lời:

Lời giải

+ Ta có đồ thị hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$, đường tiệm cận đứng là $x = -\frac{d}{c}$.

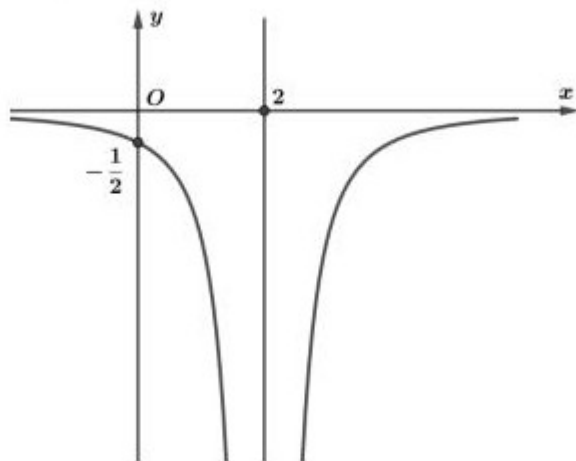
$$\begin{cases} \frac{a}{c} = 3 \\ -\frac{d}{c} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3c \\ d = 2c \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có:

+ Điểm $(-1; 7)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)$ nên $\frac{-a+b}{-c+d} = 7 \Leftrightarrow \frac{-3c+b}{-c+2c} = 7 \Leftrightarrow b = 10c$.

Vậy $\frac{2a+3b+4c+d}{7c} = \frac{2.(3c)+3.(10c)+4c+2c}{7c} = 6$.

Câu 7. (Sở Thái Nguyên 2022) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như trong hình vẽ sau:



Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;2)$. Giá trị $f(3)$ bằng

Trả lời:

Lời giải

$$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

Ta có:

Vì đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;2)$ suy ra $f(0) = 2 \Rightarrow \frac{b}{d} = 2 \Leftrightarrow b = 2d$ (1)

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có:
$$\begin{cases} f'(0) = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{d}{c} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{ad-bc}{d^2} = -\frac{1}{2} \\ d = -2c \end{cases} \quad (2)$$

Thay (1) vào (2): $\frac{ad-2dc}{d^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a-2c}{d} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}d + 2c = -\frac{1}{2}(-2c) + 2c = 3c$

Vậy,
$$f(3) = \frac{3a+b}{3c+d} = \frac{3 \cdot 3c - 4c}{3c - 2c} = \frac{5c}{c} = 5$$

Câu 8. Với giá trị thực nào của tham số m thì đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho MN ngắn nhất.

Trả lời:

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm
$$\frac{x+3}{x+1} = 2x+m \Leftrightarrow 2x^2 + (m+1)x + m-3 = 0 (*)$$

Đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta = m^2 - 6m + 25 > 0, \forall m$.

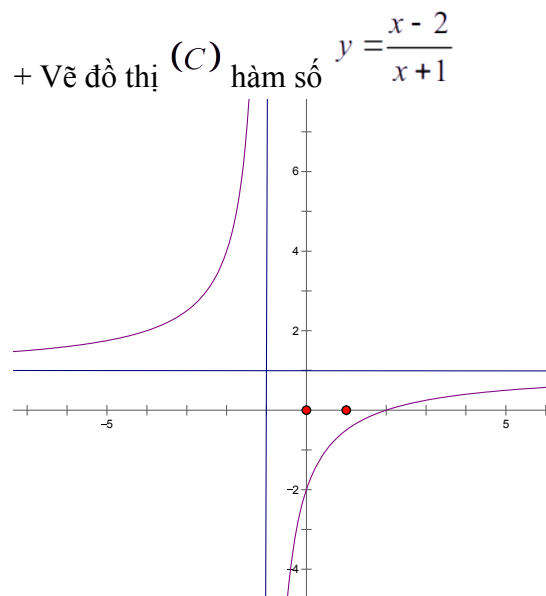
Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*), lần lượt là hoành độ của hai điểm M, N . Khi đó ta có: $M(x_1, 2x_1 + m), N(x_2, 2x_2 + m)$, $MN = (x_2 - x_1; 2(x_2 - x_1))$.

Suy ra $P = |MN|^2 = 5(x_2 - x_1)^2 = 5[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]$; với $x_1 + x_2 = -\frac{m+1}{2}, x_1x_2 = \frac{m-3}{2}$.

$P = \frac{5}{4}(m^2 - 6m + 25) = \frac{5}{4}[(m-3)^2 + 16] \geq 20, \forall m$. Do đó MN ngắn nhất khi và chỉ khi $P_{\min}$, mà $P_{\min} = 20$ khi $m = 3$.

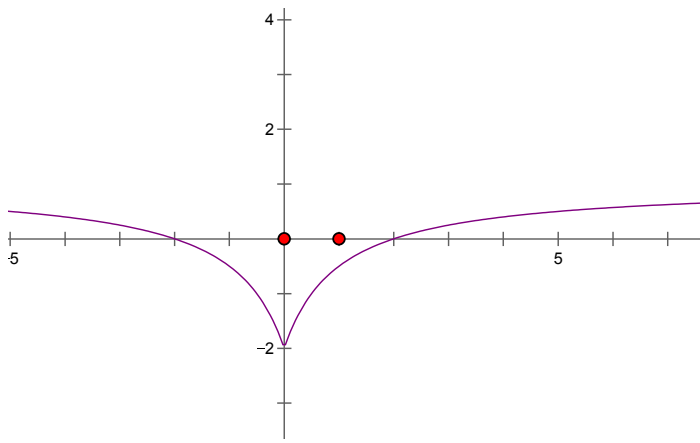
Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m sao cho phương trình $\frac{||x|-2|}{|x|+1} = m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.
Trả lời:

Lời giải



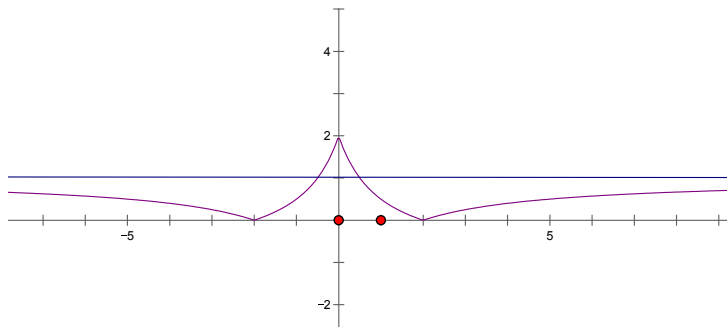
+ Đồ thị của hàm số $y = \frac{||x|-2|}{|x|+1}$ được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

-Giữ phần đồ thị (C) bên phải trục Oy (bỏ phần bên trái). Lấy đối xứng của nhánh đồ thị (C) của phần đồ thị khi $x \geq 0$ qua trục Oy , ta được đồ thị $(C'): y = \frac{||x|-2|}{|x|+1}$.



-Phần đồ thị (C') nằm dưới trục hoành, lấy đối xứng qua trục Ox ta được đồ thị của hàm số

$$y = \frac{|x| - 2}{|x| + 1}$$



$$\frac{|x| - 2}{|x| + 1} = m$$

là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{|x| - 2}{|x| + 1}$ và đường

Số nghiệm của phương trình

thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{|x| - 2}{|x| + 1}$ tại hai điểm

phân biệt khi $\begin{cases} m = 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$.

$$\frac{|x| - 2}{|x| + 1} = m$$

có đúng hai nghiệm thực phân biệt khi $\begin{cases} m = 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$.

Vậy phương trình

Câu 10. Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ tại hai điểm phân biệt A, B và $AB \leq 4$?

Trả lời:

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$\frac{2x - 1}{x + 1} = x + m \Leftrightarrow 2x - 1 = (x + m)(x + 1) \Leftrightarrow x^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0 \quad (1)$$

(vì $x = -1$ không là nghiệm của phương trình)

Hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt và

$$\text{khác } (-1) \Leftrightarrow \Delta = (m-1)^2 - 4(m+1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m < 3 - 2\sqrt{3} \end{cases} (*)$$

Gọi $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$. Theo định lý Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1 \cdot x_2 = m + 1 \end{cases}$.

$$AB \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} \leq 4 \Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)^2 \leq 16 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 8$$

$$\Leftrightarrow (1 - m)^2 - 4(m + 1) \leq 8 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 11 \leq 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{5} \leq m \leq 3 + 2\sqrt{5}, \text{ kết hợp điều kiện } (*) \text{ và } m \text{ nguyên dương nên có 1 giá trị } m \text{ thỏa mãn.}$$

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\frac{2|x| - 1}{|x| + 2} = m$ có 2 nghiệm phân biệt.
Trả lời:

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{2|x| - 1}{|x| + 2} = m \Leftrightarrow 2|x| - 1 = m(|x| + 2) \Leftrightarrow |x|(2 - m) = 2m + 1 \quad (1)$$

+ Xét $m = 2$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

+ Xét $m \neq 2$, phương trình (1) $\Leftrightarrow |x| = \frac{2m + 1}{2 - m}$. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi $\frac{2m + 1}{2 - m} > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 2$. Vậy $m \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

$$\text{Vì } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{0; 1\}$$

Câu 12. (Sở Ninh Bình 2020) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ của tham số m để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 3}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt?
Trả lời:

Lời giải

$$\text{Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng } y = x + m \text{ và đường cong } y = \frac{2x - 3}{x - 1}$$

$$x + m = \frac{2x - 3}{x - 1} \Leftrightarrow (x + m)(x - 1) = 2x - 3 \quad (x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + mx - x - m = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + (m - 3)x - m + 3 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Ta có } \Delta = (m - 3)^2 - 4(-m + 3) = m^2 - 6m + 9 + 4m - 12 = m^2 - 2m - 3$$

Để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 3}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1^2 + (m-3) \cdot 1 - m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 > 0 \\ 1 \neq 0 \text{ (lđ)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$$

Theo giả thiết: $-2020 \leq m \leq 2020$ và $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$ nên $\begin{cases} -2020 \leq m < -1 \\ 3 < m \leq 2020 \end{cases}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $-2020 \leq m < -1$, suy ra có $\frac{-2 - (-2020)}{1} + 1 = 2019$ giá trị nguyên m .

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $3 < m \leq 2020$, suy ra có $\frac{2020 - 4}{1} + 1 = 2017$ giá trị nguyên m .

Tóm lại có tất cả $2019 + 2017 = 4036$ giá trị nguyên của tham số m .

Câu 13. (Chuyên Nguyễn Du Đắk Lắk 2019) Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y = -x + m$.
Gọi S là tập các số thực m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$. Tổng các phần tử của S bằng

Trả lời:

Lời giải

Xét phương trình $\frac{x}{x-1} = -x + m$, (điều kiện $x \neq 1$).

Phương trình tương đương $x^2 - mx + m = 0$ (1).

Đồ thị (C) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$ điều kiện cần và đủ là $m < 0$ và $m > 4$.

Khi đó hai giao điểm là $A(x_1; -x_1 + m)$, $B(x_2; -x_2 + m)$.

Ta có $OA = \sqrt{m^2 - 2m}$; $OB = \sqrt{m^2 - 2m}$; $AB = \sqrt{2(m^2 - 4m)}$; $d(O, d) = \frac{|m|}{\sqrt{2}}$.

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(O, d) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2(m^2 - 4m)} = \frac{OA \cdot OB \cdot AB}{4R}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2(m^2 - 4m)} = \frac{(m^2 - 2m) \cdot \sqrt{2(m^2 - 4m)}}{4 \cdot 2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m = 4|m| \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (l)} \\ m = 6 \text{ (n)} \\ m = -2 \text{ (n)} \end{cases}$$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 4.

Câu 14. (Sở Cần Thơ 2019) Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x - m$, với m là tham số thực. Biết rằng đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho điểm $G(2; -2)$ là trọng tâm của tam giác OAB (O là gốc tọa độ). Giá trị của m bằng

Trả lời:

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ có $y' = \frac{-2}{(x+1)^2} < 0$, $\forall x \in D$ và đường thẳng $d: y = x - m$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ với mọi giá trị của tham số m .

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $\frac{x+3}{x+1} = x - m$
 $\Leftrightarrow x^2 - mx - m - 3 = 0 \quad (x \neq -1)$

Suy ra x_A, x_B là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - mx - m - 3 = 0$.

Theo định lý Viet, ta có $x_A + x_B = m$.

Mặt khác, $G(2; -2)$ là trọng tâm của tam giác OAB nên $x_A + x_B + x_O = 3x_G$
 $\Leftrightarrow x_A + x_B = 6$
 $\Leftrightarrow m = 6$.

Vậy $m = 6$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 15. (Sở Nam Định 2019) Cho hàm số $y = \frac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Biết rằng với mọi $m \neq 0$, đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y = 3x - 3m$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tích tất cả các giá trị của m tìm được để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD bằng

Trả lời:

Lời giải

Với $m \neq 0$, xét phương trình $\frac{3x-2m}{mx+1} = 3x - 3m \Leftrightarrow 3x^2 - 3mx - 1 = 0$. (*)

Gọi tọa độ các giao điểm của d với đồ thị hàm số đã cho là: $A(x_1; 3x_1 - 3m), B(x_2; 3x_2 - 3m)$.

Tọa độ các điểm C, D là $C(m; 0)$ và $D(0; -3m)$.

Gọi $h = d_{(O,d)}$ thì h là chiều cao của các tam giác OAB và OCD .

Theo giả thiết: $S_{\Delta OAB} = 2S_{\Delta OCD} \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{2} CD \cdot h \Leftrightarrow AB = 2CD \Leftrightarrow AB^2 = 4CD^2$
 $\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + [3(x_1 - x_2)]^2 = 4[m^2 + (-3m)^2]$
 $\Leftrightarrow 10(x_1 - x_2)^2 = 40m^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4m^2$
 $\Leftrightarrow m^2 + \frac{4}{3} = 4m^2 \Leftrightarrow m^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow m = \pm \frac{2}{3}$.

Vậy tích các giá trị của m là $-\frac{4}{9}$.

Câu 16. Giả sử $m = -\frac{b}{a}$, $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $(a, b) = 1$ là giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y - 2 = 0$, với O là gốc tọa độ. Tính $a + 2b$.
Trả lời:

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x-1} = -3x + m$, $x \neq 1$.
 $\Leftrightarrow 3x^2 - (m+1)x + m+1 = 0$ (*)

Để (C) cắt d tại hai điểm phân biệt thì (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1. Suy ra
 $\begin{cases} (m+1)^2 - 12(m+1) > 0 \\ 3 \cdot 1^2 - (m+1) \cdot 1 + (m+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 0 \\ m+1 > 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 11 \end{cases}$

Khi đó $A(x_1; -3x_1 + m)$, $B(x_2; -3x_2 + m)$, với x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình (*) đồng thời thỏa mãn $x_1 + x_2 = \frac{m+1}{3}$.

Gọi G là trọng tâm của ΔOAB , ta có $G\left(\frac{m+1}{9}; \frac{m-1}{3}\right)$.

Mà G $\in \Delta$ nên $\frac{m+1}{9} - 2 \cdot \frac{m-1}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{11}{5}$. Suy ra $\begin{cases} a = 11 \\ b = 5 \end{cases}$.
 Vậy $a + 2b = 21$.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{3x+2}{x+2}$, (C) và đường thẳng $d: y = ax + 2b - 4$. Đường thẳng d cắt (C) tại A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O, khi đó $T = a + b$ bằng
Trả lời:

Lời giải

Xét phương trình hoành độ: $\frac{3x+2}{x+2} = ax + 2b - 4$; $x \neq -2$.
 $\Leftrightarrow ax^2 + (2a + 2b - 7)x - 10 = 0$ (*).

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt
 $\begin{cases} a \neq 0 \\ (2a + 2b - 7)^2 - 4a(-10) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 4a^2 + 4ab - 14a + 7b^2 + 14b - 49 > 0 \end{cases}$

Gọi $A(x_1; ax_1 + 2b - 4)$; $B(x_2; ax_2 + 2b - 4)$

Do A, B đối xứng nhau qua gốc O nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 4b - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ b = 2 \end{cases}$

Theo Viét của phương trình (*) ta có $x_1 + x_2 = \frac{7 - 2a - 2b}{a}$.

$$\text{p } \frac{7-2a-2b}{a} = 0 \hat{=} 7-2a-2b=0 \text{ p } a = \frac{3}{2}.$$

$$\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

Thay vào điều kiện (2*) thấy thỏa mãn.

Vậy $a+b = \frac{7}{2}.$

- Câu 18.** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm ΔOAB thuộc đường thẳng $D: x-2y-2=0$, với O là gốc tọa độ.

Trả lời:

Lời giải

Hoành độ hai điểm A, B là nghiệm của phương trình $-3x + m = \frac{2x+1}{x-1}$
 $\hat{=} (-3x+m)(x-1) = 2x+1$ (vì $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình).
 $\hat{=} 3x^2 - (m+1)x + m+1 = 0 (*)$

Điều kiện: $\Delta > 0 \hat{=} (m+1)^2 - 4.3(m+1) > 0 \hat{=} (m+1)(m-11) > 0$ $\begin{cases} m < -1 \\ m > 11 \end{cases}$

Khi đó phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_A, x_B thỏa mãn $x_A + x_B = \frac{m+1}{3}$.

Gọi $A(x_A; -3x_A + m), B(x_B; -3x_B + m)$ thì trọng tâm của tam giác OAB là $G(\frac{x_A+x_B}{3}; \frac{-3(x_A+x_B)+2m}{3})$ hay $G(\frac{m+1}{9}; \frac{m-1}{3})$.

$$G \in D \Leftrightarrow \frac{m+1}{9} - 2 \cdot \frac{m-1}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{11}{5}.$$

- Câu 19. (Đại học Hồng Đức – Thanh Hóa 2019)** Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng

$y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $MN \leq 10$.

Trả lời:

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số: $x \neq -1$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-1}{x+1} = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (m-1)x + m+1 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N khi và chỉ khi phương trình $x^2 + (m-1)x + m+1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 3 > 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 - 2\sqrt{3} \\ m > 3 + 2\sqrt{3} \end{cases} (*)$$

Gọi $M(x_1; x_1 + m)$, $N(x_2; x_2 + m)$ là tọa độ giao điểm đường thẳng $y = x + m$ và đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$.

Theo bài cho $MN \leq 10 \Leftrightarrow \sqrt{2(x_2 - x_1)^2} \leq 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 50$

Áp dụng định lý Viét cho phương trình $x^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0$ ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1 \cdot x_2 = m + 1 \end{cases}$

Ta có $MN \leq 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 50 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 53 \leq 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{62} \leq m \leq 3 + \sqrt{62}$

Kết hợp với (*) thì $m \in (3 - \sqrt{62}; 3 - 2\sqrt{3}) \cup (3 + 2\sqrt{3}; 3 + \sqrt{62})$

Các số nguyên dương m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = \{7, 8, 9, 10\}$.

Câu 20. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Gọi $M(a; b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y = \frac{x - 2}{x}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: y = 2x + 6$ nhỏ nhất. Tính $(4a + 5)^2 + (2b - 7)^2$.
Trả lời:

Lời giải

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x - 2}{x}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d là: $\frac{x - 2}{x} = 2x + 6$
 $\Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \ (x \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Suy ra đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $M_1(-2; 2), M_2(-\frac{1}{2}; 5)$.

Ta có $d(M; d) \geq 0, \forall M \Rightarrow \min d(M; d) = 0$ khi $M \in d$.

Mà $M \in (C) \Rightarrow M = d \cap (C) \Rightarrow \begin{cases} M(-2; 2) \\ M(-\frac{1}{2}; 5) \end{cases}$

Với $M(-2; 2) \Rightarrow a = -2, b = 2 \Rightarrow (4a + 5)^2 + (2b - 7)^2 = 18$

Với $M(-\frac{1}{2}; 5) \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 5 \Rightarrow (4a + 5)^2 + (2b - 7)^2 = 18$

Câu 21. Trên đồ thị $(C): y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$ có bao nhiêu cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I(\frac{1}{2}; 1)$.
Trả lời:

Lời giải

Gọi $M(x; y), M'(x'; y')$ thuộc (C) và đối xứng nhau qua điểm $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Khi đó ta có hệ:
$$\begin{cases} x + x' = 1 \\ y + y' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 - x \\ y' = 2 - y \end{cases} \Rightarrow M'(1 - x; 2 - y)$$

Vì $M(x; y), M'(x'; y')$ thuộc (C) nên ta có
$$\begin{cases} y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2} \\ 2 - y = \frac{x^2 - x + 4}{-x - 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2} + \frac{x^2 - x + 4}{-x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ x \neq -1, x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -4 \\ x = 3 \Rightarrow y = 6 \end{cases}$$

Vậy trên (C) có đúng một cặp điểm: $M(-2, -4), M'(3; 6)$

Câu 22. Tìm được trên đồ thị $(C): y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$ hai điểm $M(a; b)$ và $N(c; d)$ có khoảng cách đến đường thẳng $3x + y + 6 = 0$ nhỏ nhất. Khi đó $a + b + c + d = ?$
Trả lời:

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; \frac{x_0^2 + 4x_0 + 5}{x_0 + 2}\right)$

Gọi (d) là khoảng cách từ M đến đường thẳng $3x + y + 6 = 0$

$$d = \frac{1}{\sqrt{10}} \left| \frac{4x_0^2 + 16x_0 + 17}{x_0 + 2} \right| = \frac{1}{\sqrt{10}} \left| 4(x_0 + 2) + \frac{1}{x_0 + 2} \right| \geq \frac{4}{\sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow 4|x_0 + 2| = \frac{1}{|x_0 + 2|} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{-3}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{5}{2} \\ x_0 = \frac{-5}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Đẳng thức xảy ra

Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán là $M_1\left(\frac{-3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ và $M_2\left(\frac{-5}{2}; \frac{5}{2}\right)$

Câu 23. (Toán Học Tuổi Trẻ 2019) Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{1 - x}$ cắt đường thẳng $y = x - m$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60° (với O là gốc tọa độ)?

Trả lời:

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm
$$\frac{x}{1 - x} = x - m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - mx + m = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Để có hai điểm phân biệt A, B thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\begin{cases} 1 - m + m^2 > 0 \\ m^2 - 4m > 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases}$$

Khi đó phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$$

Giả sử $A(x_1; x_1 - m), B(x_2; x_2 - m)$, suy ra: $\overrightarrow{OA}(x_1; x_1 - m), \overrightarrow{OB}(x_2; x_2 - m)$

Theo giả thiết góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60° suy ra:

$$\cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \cos 60^\circ \hat{=} \frac{|x_1 x_2 + (x_1 - m)(x_2 - m)|}{\sqrt{x_1^2 + (x_1 - m)^2} \sqrt{x_2^2 + (x_2 - m)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{=} \frac{|2x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2|}{\sqrt{x_1^2 x_2^2 + (x_1 x_2 - m x_2)^2 + x_1^2 (x_1 x_2 - m)^2 + (x_1 - m)(x_2 - m)}} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{=} \frac{|2m - m^2 + m^2|}{\sqrt{m^2 + (m - m x_2)^2 + (m - m x_1)^2 + (x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2)}} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{=} \frac{|2m|}{\sqrt{m^2 + (m - m x_2)^2 + (m - m x_1)^2 + (m - m^2 + m^2)}} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{=} \frac{2}{\sqrt{2 + (1 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{=} 2 + (1 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2 = 16$$

$$\hat{=} (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 12$$

$$\hat{=} m^2 - 4m - 12 = 0 \hat{=} \begin{cases} m = 6 \\ m = -2 \end{cases}$$

Câu 24. (THPT Lương Tài Số 2 2019) Biết rằng đường thẳng $y = 2x + 2m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của tham số m . Tìm hoành độ trung điểm của AB ?

Trả lời:

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\frac{x^2+3}{x+1}=2x+2m \Leftrightarrow x^2+2(1+m)x+2m-3=0 \quad (1), (x \neq -1).$$

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (1+m)^2 - (2m-3) > 0 \\ (-1)^2 + 2(1+m)(-1) + 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4 > 0, \forall m \\ -4 \neq 0 \end{cases}$$

Khi đó, gọi $A(x_1; 2x_1 + 2m), B(x_2; 2x_2 + 2m)$

Hoành độ trung điểm của AB là $x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{2+2m}{2} = -m-1$

$$y = \frac{x^2 + mx + m^2 - 2m - 4}{x - 2} \quad (1).$$

Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + m^2 - 2m - 4}{x - 2}$ (1).
Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $\Delta: 2x + y + 1 = 0$.

Trả lời:

Lời giải

Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 - 4x + 4 - m^2}{(x - 2)^2}$

Dấu của y' là dấu của $g(x) = x^2 - 4x + 4 - m^2$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \Delta' = 4 - 4 + m^2 = m^2 > 0 \\ 4 - 8 + 4 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0$$

Nghiệm của $g(x) = 0$ là $x_1 = 2 - m, x_2 = 2 + m$, suy ra hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(2 - m; 4 - m), B(2 + m; 4 + 3m)$

$$d(A, \Delta) = \frac{|9 - 3m|}{\sqrt{5}}, d(B, \Delta) = \frac{|9 + 5m|}{\sqrt{5}}$$

$$d(A, \Delta) = d(B, \Delta) \Leftrightarrow |9 - 3m| = |9 + 5m| \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3m = 9 + 5m \\ 9 - 3m = -9 - 5m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -9 \end{cases}$$

So với điều kiện $m \neq 0$ nhận $m = -9$.

Câu 26. Tìm m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x}$ tại hai điểm A, B sao cho trung điểm đoạn AB thuộc Oy .

Trả lời:

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $3x^2 + (1 - m)x - 1 = 0 \quad (x \neq 0)$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 với mọi m

Hoành độ trung điểm I của AB : $x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m - 1}{6}$

$$I \in Oy \Leftrightarrow x_I = 0 \Leftrightarrow \frac{m - 1}{6} = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

- Câu 27.** Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{6}$.
Trả lời:

Lời giải

Tọa độ A, B thỏa: $\frac{x^2 - 1}{x} = -x + m \Leftrightarrow 2x^2 - mx - 1 = 0, \quad (x \neq 0) \quad (1)$

Ta thấy (1) có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 khác 0 với mọi m .

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \Rightarrow AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 2(x_1 - x_2)^2$

Áp dụng định lý Viet cho phương trình (1) ta có được:

$$AB^2 = 2 \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \right] = \frac{m^2}{2} + 4 \quad AB = 6 \Leftrightarrow \frac{m^2}{2} + 4 = 6 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

- Câu 28.** (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $y = \frac{2x - m^2}{x + 1}$ có đồ thị (C_m) , trong đó m là tham số thực. Đường thẳng $d: y = m - x$ cắt (C_m) tại hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ với $x_A < x_B$; đường thẳng $d': y = 2 - m - x$ cắt (C_m) tại hai điểm $C(x_C; y_C), D(x_D; y_D)$ với $x_C < x_D$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $x_A \cdot x_D = -3$. Số phần tử của tập S là
Trả lời:

Lời giải

Hoành độ điểm A và B là nghiệm phương trình: $2x - m^2 = (x + 1)(m - x)$

$$\Leftrightarrow x^2 + (3 - m)x - m^2 - m = 0 \quad \text{suy ra} \quad x_A \cdot x_B = -m^2 - m; \quad x_A + x_B = m - 3$$

Hoành độ điểm C và D là nghiệm phương trình: $2x - m^2 = (x + 1)(2 - m - x)$

$$\Leftrightarrow x^2 + (m + 1)x - m^2 + m - 2 = 0 \quad \text{suy ra} \quad x_C \cdot x_D = -m^2 + m - 2; \quad x_C + x_D = -m - 1$$

Mặt khác x_A và x_D là nghiệm của phương trình: $x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -3 \\ x_D = 1 \end{cases}$. Suy ra

$$m^2 + 6m + 9 = 5m^2 - 2m + 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

Câu 29. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Có bao nhiêu m nguyên dương để hai đường cong $(C_1): y = \left| 2 + \frac{2}{x-10} \right|$ và $(C_2): y = \sqrt{4x-m}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương?

Trả lời:

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 10 \\ x \geq \frac{m}{4} \end{cases}$.

Xét trên $(0; +\infty) \setminus \{10\}$, phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là

$$\left| 2 + \frac{2}{x-10} \right| = \sqrt{4x-m} \Leftrightarrow m = 4x - \left(\frac{2x-18}{x-10} \right)^2$$

Đặt $g(x) = 4x - \left(\frac{2x-18}{x-10} \right)^2$ với $x \in (0; +\infty) \setminus \{10\}$.

Ta có: $g'(x) = 4 \left(1 + \frac{2x-18}{(x-10)^3} \right)$; $g''(x) = \frac{-4x+34}{(x-10)^4}$.

$g'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0	$\frac{17}{2}$	10	$+\infty$
$g''(x)$	+	0	-	-
$g'(x)$	4,072	$\nearrow$ $\searrow$	$ $	$+\infty \searrow 0$
				$-\infty$

Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất $\alpha \in \left(\frac{17}{2}; 10 \right)$. Lại có $g'(9,22) > 0$ nên $\alpha \in (9,22; 10)$. Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0; +\infty) \setminus \{10\}$:

x	0	9	α	10	$+\infty$
$g'(x)$	+	+	0	-	+
$g(x)$	$\frac{-81}{25}$	$\nearrow$ 36	$\nearrow$ $g(\alpha)$ $\searrow$	$ $ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$
				$-\infty$	

Từ đó suy ra phương trình $m = g(x)$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\frac{-81}{25} < m < g(\alpha)$.

Trên khoảng $(9, 22; 10)$ thì $\begin{cases} 4x < 40 \\ 3 < \left(\frac{2x-18}{x-10}\right)^2 \end{cases}$ nên $g(x) < 37 \Rightarrow g(\alpha) \in (36; 37)$.

Vậy những giá trị m nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1; 2; 3; ...; 36 hay có 36 giá trị của m cần tìm.

Câu 30. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = \frac{(x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m}{x - 3}$ (C) và đường thẳng (d): $y = 2x$ (m là tham số thực). Số giá trị nguyên của $m \in [-15; 15]$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt là
Trả lời:

Lời giải

Xét pt hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$\frac{(x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m}{x - 3} = 2x \Leftrightarrow (x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m = 2x^2 - 6x \quad (x \neq 3)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + m)^2 = 2x^2 - 3x + m \quad (x \neq 3) \quad (*)$$

Đặt: $x^2 - 2x + m = t$ ta được hệ: $\begin{cases} x^2 - 2x + m = t \\ t^2 = 2x^2 - 3x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - t + m = 0 \\ 2x^2 - t^2 - 3x + m = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x^2 - t^2 - x + t = 0 \Rightarrow (x - t)(x + t - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = x \\ t = 1 - x \end{cases}$$

Suy ra: $\begin{cases} x^2 - 2x + m = x \\ x^2 - 2x + m = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m = 0 \quad (1) \\ x^2 - x + m - 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$

YCBT $\Leftrightarrow (*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 3 $\Leftrightarrow (1), (2)$ đều phải có hai nghiệm pb khác 3 và các nghiệm của chúng không trùng nhau.

$$\begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ 3^3 - 3 \cdot 3 + m \neq 0 \\ 1 - 4(m - 1) > 0 \\ 3^2 - 3 + m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \\ m < \frac{5}{4} \\ m \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1,25 \\ m \neq 0 \\ m \neq -5 \end{cases} \quad (**)$$

(1), (2) đều có hai nghiệm pb khác 3 khi:

(1), (2) không có nghiệm trùng nhau $\Leftrightarrow$ Hệ: $\begin{cases} x^2 - 3x + m = 0 \\ x^2 - x + m - 1 = 0 \end{cases}$ Vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x^2 - 3x + m = 0 \end{cases} \text{ Vô nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x^2 - 3x + m = 0 \end{cases} \text{ Vô nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq \frac{5}{4} \quad (***)$$

Vậy số giá trị nguyên của $m \in [-15; 15]$ đồng thời thỏa mãn (**) và (***) là 15.

Câu 31. (THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng - 2021) Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{2x + 1}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $2021f(\sqrt{3x^2 - 18x + 28}) - m\sqrt{3x^2 - 18x + 28} \geq m + 4042$ nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[2; 4]$.

Trả lời:

Lời giải

♦ Đặt $u = \sqrt{3x^2 - 18x + 28} = \sqrt{3(x-3)^2 + 1} = \sqrt{3(x-2)(x-4) + 4}$ do đó ta có với $\forall x \in [2; 4]$ thì $u \in [1; 2]$.

♦ Biến đổi BPT ta được $2021f(u) - m \cdot u \geq m + 4042 \Leftrightarrow 2021[f(u) - 2] \geq m(u + 1)$.

♦ Ta có $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{2x + 1}$ nên $f(u) - 2 = \frac{u^2 + 5u + 2}{2u + 1} - 2 = \frac{u^2 + u}{2u + 1}$ do vậy bất phương trình được biến đổi tiếp $\frac{2021(u^2 + u)}{2u + 1} \geq m(u + 1) \Leftrightarrow m \leq \frac{2021u}{2u + 1}$.

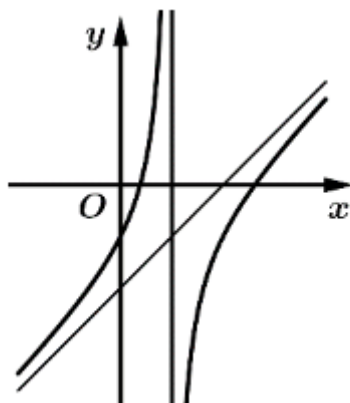
♦ Lúc này yêu cầu bài toán tương đương $m \leq \frac{2021u}{2u + 1}, \forall u \in [1; 2] \Leftrightarrow m \leq \min_{u \in [1; 2]} g(u)$.

♦ Xét hàm số $g(u) = \frac{2021u}{2u + 1}, u \in [1; 2]$ ta có $g'(u) = \frac{2021}{(2u + 1)^2} > 0, \forall u \in [1; 2]$ do vậy hàm số $g(u)$ tăng trên đoạn $[1; 2]$. Vì vậy $\min_{u \in [1; 2]} g(u) = \frac{2021u}{2u + 1} = g(1) = \frac{2021}{3}$.

♦ Kết hợp với m là các số nguyên dương ta được $m \in \{1; 2; 3; \dots; 673\}$.

Vậy tìm được 673 số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Câu 32.** Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + 1}{cx + d}$. Hỏi có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



Trả lời:

Lời giải

Đáp số: 2

Từ đồ thị hàm số đã cho ta thấy

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $\frac{1}{d} < 0 \Rightarrow d < 0$.

Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng $x = x_0 > 0$. Suy ra $\frac{-d}{c} > 0 \Rightarrow c > 0$.

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số dễ thấy hàm số không có cực trị và $ac > 0$.

Suy ra $a > 0$.

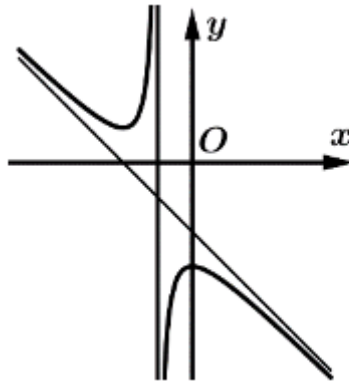
Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ dương.

Nên phương trình $ax^2 + bx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương.

Suy ra $x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow b < 0$.

Vậy có 2 số dương trong các số $a; b; c; d$.

- Câu 33.** Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



Trả lời:

Lời giải

Đáp số: 1

Từ đồ thị hàm số đã cho ta có

Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng $x = x_0 < 0$.

Suy ra $-d < 0 \Rightarrow d > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Nên $\frac{c}{d} < 0 \Rightarrow c < 0$.

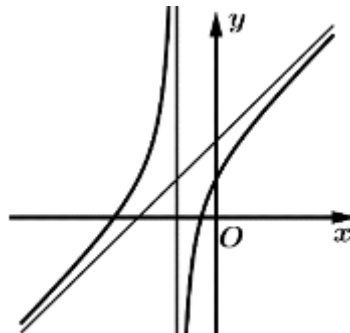
Dựa vào hình dạng đồ thị dễ thấy hàm số đã cho có 2 cực trị và $a < 0$.

Đồ thị hàm số có đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị có dạng $y = \frac{2ax + b}{d}$.

Mà đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $\frac{b}{d} < 0 \Rightarrow b < 0$.

Vậy có 1 số dương trong các số $a; b; c; d$.

Câu 34. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + 1}{cx + d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



Trả lời:

Lời giải

Đáp số: 4

Từ đồ thị hàm số đã cho ta thấy

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $\frac{1}{d} > 0 \Rightarrow d > 0$.

Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng $x = x_0 < 0$. Suy ra $\frac{-d}{c} < 0 \Rightarrow c > 0$.

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số dễ thấy hàm số không có cực trị và $ac > 0$. Suy ra $a > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ âm.

Nên phương trình $ax^2 + bx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương.

Suy ra $x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Vậy có 4 số dương trong các số $a; b; c; d$.