PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÀNH PHỐ TÂY NINH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn thi: TOÁN
Thời gian: 150 phút (*không kể thời gian phát đề*)

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang, thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay)

Câu 1: (4,0 điểm)

a) Chứng minh với mọi số nguyên dương n thì n^3+2n chia hết cho 3.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-xy+y^2-4=0$.

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A=\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-\sqrt{720}}}$

b) Cho hàm số $f(x)=\left(x^3+12x-33\right)^{2022}$. Tính $f(a)$ tại $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$.

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{x^2+8x+15}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+5}-6$

b) Cho $a\geq 4$. Chứng minh: $a^2+\dfrac{18}{\sqrt{a}}\geq 25$.

Câu 4: (4,0 điểm)

a) Cho ΔABC nhọn, hai đường cao BD và CE. Biết $S_{ADE}=\frac{3}{4}S_{ABC}$. Tính số đo góc A.

b) Cho hình vuông $ABCD$ có $AB=a$ (cố định, không đổi), M là một điểm di động trên đường chéo AC. Kẻ ME vuông góc với AB (E thuộc AB) và MF vuông góc với BC (F thuộc BC). Xác định vị trí của điểm M trên AC sao cho diện tích tam giác DEF nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 5: (4,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC vuông tại A có trung tuyến AM, $\angle ABM=15^0$ và diện tích tam giác ABC bằng $16\ cm^2$. Tính độ dài đoạn thẳng BM.

b) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi E, F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Gọi M là trung điểm của BC.

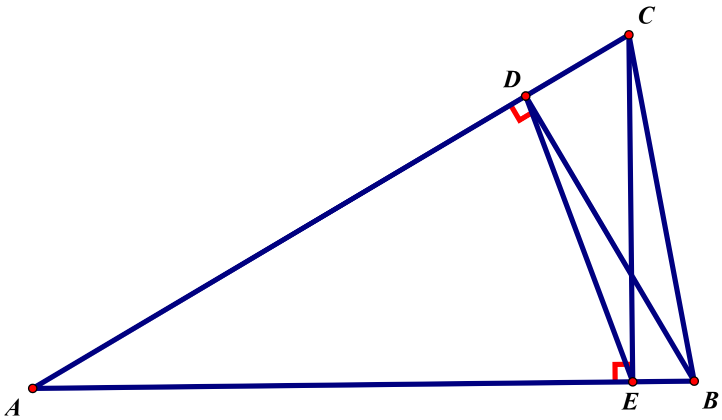
Chứng minh $EF\perp AM$ và $2S=\dfrac{AH^4}{HE.HF}$ (biết S là diện tích tam giác ABC).

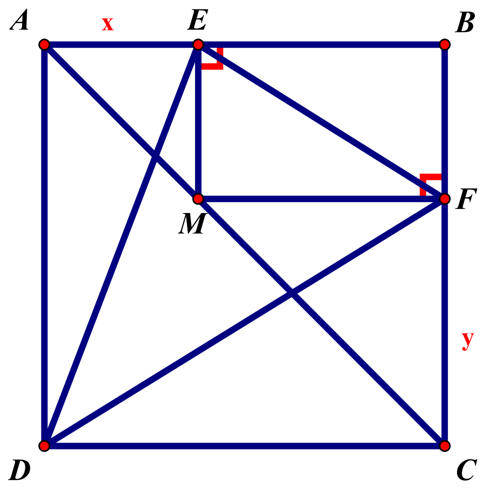
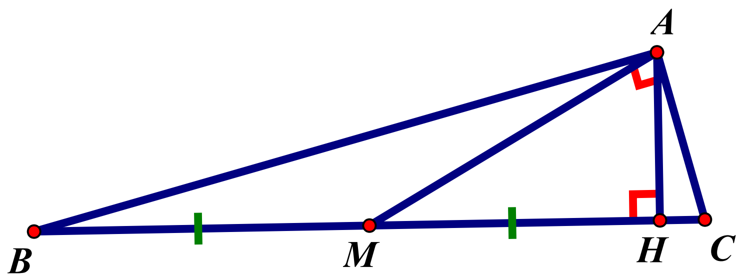
---------- Hết ----------

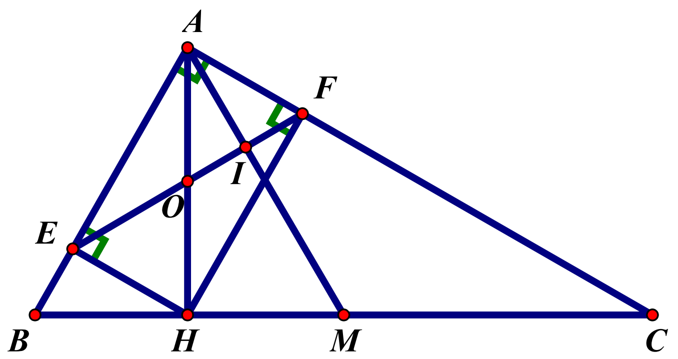
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN

	Nội dung cần đạt	Điểm
Câu 1: **(4,0 điểm)**	a) Chứng minh với mọi số nguyên dương n thì n^3+2n chia hết cho 3.	***2,0***
	Khi $n=1$ thì $1^3+2.1=3 \vdots 3$: đúng.	0,5
	Giả sử mệnh đề đúng với $n=k$, k nguyên dương tức là $k^3+2k \vdots 3$	0,5
	Khi $n=k+1$, ta có: $(k+1)^3+2(k+1)=k^3+2k+3(k^2+2k+1) \vdots 3$ (vì $k^3+2k \vdots 3$ và $3(k^2+2k+1) \vdots 3$)	0,75
	Vậy: n^3+2n chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n.	0,25
	b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-xy+y^2-4=0$.	***2,0***
	Ta có $x^2-xy+y^2-4=0$ $\Leftrightarrow 4x^2-4xy+4y^2=16$ $\Leftrightarrow (2x-y)^2+3y^2=16$ $\Leftrightarrow (2x-y)^2=16-3y^2$	0,5
	Vì $(2x-y)^2\ge 0$ nên $16-3y^2\ge 0 \Rightarrow y^2\le 5 \Rightarrow y^2\in\{0;1;4\}$	0,25
	Nếu $y^2=0$ thì $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.	0,25
	Nếu $y^2=1$ thì $(2x-y)^2\ge 13$ không là số chính phương nên loại $y^2=1$.	0,25
	Nếu $y^2=4$ thì $\Leftrightarrow y=\pm 2$.	0,25
	+ Khi $y=2$ thì $x=0$ hoặc $x=2$. + Khi $y=-2$ thì $x=0$ hoặc $x=-2$.	0,25
	Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x;y)\in\{(-2;0);(2;0);(0;2);$ $(2;2);(0;-2);(-2;-2)\}$.	0,25
	a) Rút gọn biểu thức $A=\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-\sqrt{720}}}$	***2,0***

	$A=\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{(\sqrt{20}-3)^2}}$	0,5
	$A=\sqrt{5}-\sqrt{6-\sqrt{20}}$	0,5
	$A=\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)$	0,5
	$A=1$	0,5
	b) Cho hàm số $f(x)=(x^3+12x-33)^{2022}$. Tính $f(a)$ tại $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$.	***2,0***
	Ta có: $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$ $\Leftrightarrow a^3=32+3\sqrt[3]{(16-8\sqrt{5})(16+8\sqrt{5})}\left(\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}\right)$	0,5
	$\Rightarrow a^3=32+3.(-4).a$	0,5
	$\Leftrightarrow a^3+12a-33=-1$	0,5
	Vậy: $f(a)=(a^3+12a-33)^{2022}=(-1)^{2022}=1$	0,5
Câu 3: (4,0 điểm)	a) Giải phương trình $\sqrt{x^2+8x+15}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+5}-6$	***2,0***
	ĐKXĐ: $x\geq -3$	0,25
	Ta có: $\sqrt{x^2+8x+15}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+5}-6$ $\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(x+5)}-3\sqrt{x+3}-2\sqrt{x+5}+6=0$	0,5
	$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+5}-3)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}=2\\ \sqrt{x+5}=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+3=4\\ x+5=9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=4\end{array}\right.$ (thỏa mãn ĐKXĐ)	0,5
	Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x_1=1$; $x_2=4$.	0,25
	b) Cho $a\geq 4$. Chứng minh: $a^2+\dfrac{18}{\sqrt{a}}\geq 25$.	***2,0***
	Ta có:	0,75

	$a^2+\frac{18}{\sqrt{a}}=\left(a^2+16\right)+\frac{18}{\sqrt{a}}-16\ge 8a+\frac{18}{\sqrt{a}}-16$ (vì $a^2+16\ge 2\sqrt{a^2.16}=8a$)	
	Mặt khác: $8a+\frac{18}{\sqrt{a}}=9\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{a}{8}\right)+\frac{55a}{8}\ge 9.3.\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{a}}.\frac{1}{\sqrt{a}}.\frac{a}{8}}+\frac{55}{8}.4=41$	0,75
	Suy ra: $8a+\frac{18}{\sqrt{a}}-16\ge 25$	0,25
	Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a=4$.	0,25
Câu 4: **(4,0 điểm)**	a) Cho ΔABC nhọn, hai đường cao BD và CE. Biết $S_{ADE}=\frac{3}{4}S_{ABC}$. Tính số đo góc A.	***2,0***
		
	Ta có: $\Delta ABD \backsim \Delta ACE\ (g.g)$ $\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$ hay $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$	0,5
	Nên $\Delta ADE \backsim \Delta ABC\ (c.g.c)$	0,5
	$\Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AD}{AB}\right)^2$	0,5
	$\Rightarrow \frac{3}{4}=\cos^2 A \quad \Rightarrow \cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Vậy: $\widehat{A}=30^0$	0,5
	b) Cho hình vuông $ABCD$ có $AB=a$ (cố định, không đổi), M là một điểm di động trên đường chéo AC. Kẻ ME vuông góc với AB (E thuộc AB) và MF vuông góc với BC (F thuộc BC). Xác định vị trí của điểm M trên	***2,0***

	AC sao cho diện tích tam giác DEF nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.	
		
	Đặt $AE = x, CF = y.$ Suy ra: $MF = CF = BE = y$. Suy ra: $x + y = a$.	0,5
	$S_{DEF} = S_{ABCD} - S_{DAE} - S_{DCF} - S_{BEF} = a^2 - \frac{ax}{2} - \frac{ay}{2} - \frac{xy}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{xy}{2}$	0,25
	Ta có: S_{DEF} nhỏ nhất $\Leftrightarrow xy$ lớn nhất	0,25
	$xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow \max(xy) = \frac{a^2}{4}$ khi $x = y = \frac{a}{2}$	0,5
	Lúc đó M là trung điểm của AC.	0,25
	$\min S_{DEF} = \frac{3a^2}{8}$.	0,25
Câu 5: (4,0 điểm)	a) Cho tam giác ABC vuông tại A có trung tuyến AM, $\widehat{ABM} = 15^0$ và diện tích tam giác ABC bằng $16\ cm^2$. Tính độ dài đoạn thẳng BM.	***2,0***
		
	Kẻ $AH \perp BC\ (H \in BC)$.	0,5

	Ta có: $\widehat{AMH} = 2.\widehat{ABM} = 30^0$	
	ΔAMH vuông tại H có $\widehat{AMH} = 30^0$ $\Rightarrow AH = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{4}BC$ (1)	0,25
	Ta có: $AH.BC = AB.AC$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $BC^2 = 4AB.AC$	0,25
	Suy ra: $AB.AC = BM^2 = 2S_{ABC} = 32$	0,25
	Suy ra: $BM = 4\sqrt{2}\,(cm)$	0,5
	b) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi E, F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến $AB,\ AC$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $EF \perp AM$ và $2S = \frac{AH^4}{HE.HF}$ (biết S là diện tích tam giác ABC).	***2,0***
		
	Gọi I là giao điểm của AM và EF. Ta có: $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^0\ (gt)$ Nên tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{OAF} = \widehat{OFA}$ (tính chất đường chéo) (1)	0,25
	ΔABC vuông tại A, có AM là đường trung tuyến $\Rightarrow AM = MC$ Nên ΔAMC cân tại M. $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MCA}$ (hai góc ở đáy tam giác cân) (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MAC} + \widehat{OFA} = \widehat{MCA} + \widehat{OAF} = 90^0$	0,5

	Suy ra: ΔIAF vuông tại I. Vậy: $EF \perp AM$ tại I.	
	Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông AHB, AHC Ta có: $AF.AC = AE.AB = AH^2$	0,25
	$\Rightarrow AH^4 = AF.AE.AC.AB = HE.HF.AB.AC$ (vì $HE = AF, HF = AE$) $\Rightarrow AB.AC = \dfrac{AH^4}{HE.HF}$ (3)	0,25
	Mà $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC$ (vì ΔABC vuông tại A) $\Rightarrow AB.AC = 2S_{ABC}$ (4)	0,25
	Từ (3) và (4) suy ra $2S_{ABC} = \dfrac{AH^4}{HE.HF}$.	0,25

Lưu ý: Mọi cách giải khác nếu đúng vẫn đạt điểm tối đa.

---------- Hết ----------