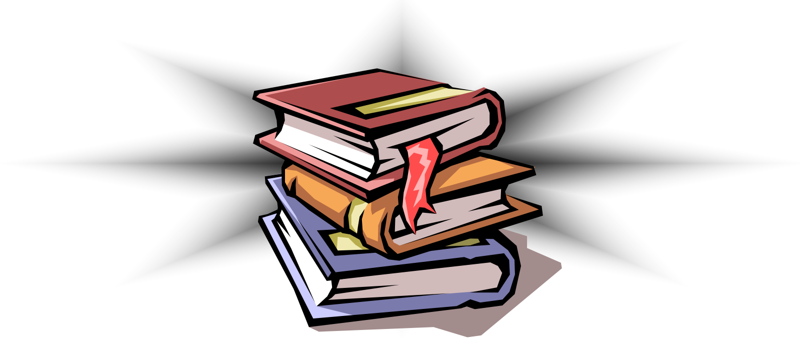
Tailieumontoan.com

Trịnh Bình sưu tầm tổng hợp



BỘ ĐỀ THI VÀO LỚP 10
MÔN TOÁN CHUYÊN BẮC NINH

Thanh Hóa, ngày 2 tháng 4 năm 2020

UBND TỈNH BẮC NINH

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 1

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

NĂM HỌC 2019 - 2020

Môn thi: Toán *(Dành cho thí sinh chuyên Toán, chuyên Tin)*

Thời gian làm bài: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{x^4-2x^3+3x^2-38x+5}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ khi $x=2+\sqrt{3}$.

b) Cho hai hàm số $y=x^2$ và $y=(m-1)x-1$ (với m là tham số) có đồ thị lần lượt là (P) và d. Tìm m để (P) cắt d tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ sao cho $y_1^3-y_2^3=18(x_1^3-x_2^3)$.

Câu 2. (2,5 điểm) a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2+2xy+4=2x+5y \\ 5x^2+7y-18=\sqrt{x^4+4} \end{cases}$.

b) Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\sqrt{x^2-6x+25}+\sqrt{y^2-6y+25}+\sqrt{z^2-6z+25}$.

Câu 3. (1,5 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $(xy+x+y)(x^2+y^2+1)=30$.

b) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $2\sqrt{12n^2+1}+2$ là số chính phương.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB<AC$. Các đường cao AD,BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DHEC$, trên cung nhỏ EC của đường tròn (O) lấy điểm I (khác điểm E) sao cho $IC>IE$. Đường thẳng DI cắt đường thẳng CE tại điểm N, đường thẳng EF cắt đường thẳng CI tại điểm M.

a) Chứng minh rằng $NI.ND=NE.NC$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với đường thẳng CH.

c) Đường thẳng HM cắt đường tròn (O) tại điểm K (khác điểm H), đường thẳng KN cắt đường tròn (O) tại điểm G (khác điểm K), đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại điểm T. Chứng minh rằng ba điểm H,T,G thẳng hàng.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho 2020 cái kẹo vào 1010 chiếc hộp sao cho không có hộp nào chứa nhiều hơn 1010 cái kẹo và mỗi hộp chứa ít nhất 1 cái kẹo. Chứng minh rằng có thể tìm thấy một số hộp mà tổng số kẹo trong các hộp đó bằng 1010 cái.

----------Hết----------

UBND TỈNH BẮC NINH

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 2

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

NĂM HỌC 2018 - 2019

Môn thi: Toán *(Dành cho thí sinh chuyên Toán, chuyên Tin)*

Thời gian làm bài: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức : $P=\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a-\sqrt{a^2+b^2}}-\dfrac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right):\dfrac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{b^2},|a|>|b|>0$

b) Cho phương trình: $x^2+ax+b=0$ với x là ẩn, a, b là tham số. Tìm a, b sao cho phương trình có nghiệm thỏa mãn $\begin{cases} x_1-x_2=5 \\ x_1^3-x_2^3=35 \end{cases}$

Câu 2

a) Giải phương trình: $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=x+3$

b) Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $0\le a,b,c\le 2, a+b+c=3$. Tìm GTLN và GTNN của $P=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$

Câu 3

a) Tìm cặp số nguyên x,y thỏa mãn $x^2-2y^2=1$

b) Chứng minh rằng nếu hiệu các lập phương của 2 số nguyên liên tiếp là bình phương của một số tự nhiên n thì n là tổng 2 số chính phương liên tiếp

Câu 4.

1) Từ A ngoài (O) vẽ 2 tiếp tuyến AB, AC (B, C là tiếp điểm). AO cắt BC tại H. Đường tròn đường kính CH cắt (O) tại điểm thứ hai là D. Gọi T là trung điểm BD

   a) Chứng minh ABHD là tứ giác nội tiếp

   b) Gọi E là giao điểm thứ 2 của đường tròn đường kính AB với AC, S là giao điểm của AO với BE. Chứng minh TS // HD

2) Cho (O_1), (O_2) cắt nhau tại hai điểm A, B. Gọi MN là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn với M, N lần lượt thuộc (O_1), (O_2). Qua A kẻ đường thẳng d song song với MN cắt (O_1), (O_2),BM, BN lần lượt tại C, D, F,G . Gọi E là giao điểm của CM và DN. Chứng minh EF = EG

Câu 5. Cho 20 số tự nhiên, mỗi số có ước nguyên tố không vượt quá 7. Chứng minh rằng luôn chọn được ra 2 số sao cho tích của chúng là 1 số chính phương.

----------Hết---------

Họ và tên ....Số báo danh ....

UBND TỈNH BẮC NINH

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 3

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

NĂM HỌC 2017 - 2018

Môn thi: Toán *(Dành cho thí sinh chuyên Toán, chuyên Tin)*

Thời gian làm bài: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1(2.5 điểm).

Cho biểu thức $P=\frac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ và $Q=\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2x-2}{\sqrt{x}+2}$ với $x\geq 0; x\neq 4$.

a) Rút gọn các biểu thức P và Q.

b) Tìm tất cả các giá trị x để $P=Q$

Câu 2(2.5 điểm).

a) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\frac{4a+6b+2017c}{4a-6b+2017c}$$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+2y=xy+4 \\ x^2-x+3-x\sqrt{6-x}=(y-3)\sqrt{y-3} \end{cases}$

Câu 3(1.5 điểm).

a) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c\leq 3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=\frac{a^2+6a+3}{a^2+a}+\frac{b^2+6b+3}{b^2+b}+\frac{c^2+6c+3}{c^2+c}$$

b) Cho tam giác vuông có số đo các cạnh là các số tự nhiên có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của số đo cạnh huyền ta được số đo một cạnh góc vuông. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó

Câu 4(3.0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $AB<AC$ nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại M. Kẻ đường cao BF của tam giác ABC(F thuộc AC). Từ F kẻ đường thẳng song song với MA cắt AB tại E. Gọi H là giao điểm củ CE và BF, D là giao điểm của AH và BC.

a) Chứng minh rằng $\mathrm{MA}^2=\mathrm{MB.MC}$ và $\frac{MC}{MB}=\frac{AC^2}{AB^2}$.

b) Chứng minh rằng AH vuông góc với BC tại D.

c) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh bốn điểm E, F, D, I cùng nằm trên một đường tròn.

d) Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với HI cắt AB và AC lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng H là trung điểm của PQ.

Câu 5(0.5 điểm). Cho $2n+1$ số nguyên, trong đó có đúng một số 0 và các số 1, 2, 3, ..., n mỗi số xuất hiện hai lần. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn sắp xếp được $2n+1$ số nguyên trên thành một dãy sao cho với mọi $m=1,2,3,...,n$ có đúng m số nằm giữa hai số m

UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ CHÍNH THỨC
Đề số 4

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2016 - 2017
Môn thi: Toán *(Cho mọi thí sinh)*
Thời gian làm bài: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1(1.5 điểm).

a) Giải phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$.

b) Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{3}\left(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{108}\right)$.

Câu 2(1.5 điểm). Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$, với m là tham số.

a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$.

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho x và y là các số nguyên.

Câu 3(2.5 điểm). Cho hàm số $y = 2x^2$.

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số.

b) Tìm m để đường thẳng $d: y = 2mx - 2$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ sao cho biểu thức $M = \left(x_1 + x_2\right)^4 - 17\left(x_1 + x_2\right)^2 x_1^2x_2^2 - 6\left(x_1 + x_2\right)x_1^3x_2^3 + 90$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4(3.0 điểm). Cho tam giác ABC lấy điểm D thay đổinằm trên cạnh BC (D không trùng với B và C). Trên tia AD lấy điểm P sao cho D nằm giữa A và P đồng thời $DA.DP = DB.DC$. Đường tròn (T) đi qua hai điểm A và D lần lượt cắt cạnh AB, AC tại F và E.

a) Chứng minh rằng tứ giác ABPC nội tiếp.

b) Chứng minh rằng hai tam giác DEF và PCB đồng dạng.

c) Chứng minh rằng $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} \le \dfrac{EF^2}{4AD^2}$ ($S_{ABC}; S_{DEF}$ lần lượt là diện tích của tam giác $ABC; DEF$).

Câu 5(1.5 điểm). a) Cho tứ giác ABCD có đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường thẳng CD. Chứng minh rằng nếu AD song song với BC thì đường tròn đường kính CD tiếp xúc với đường thẳng AB.

b) Trên một bảng vuông $4x4$ (gồm 16 ô vuông), ban đầu người ta ghi 9 số 1 và 7 số 0 một cách tùy ý (mỗi ô một số). Với mỗi phép biến đổi bảng, cho phép chọn một hàng hoặc một cột bất kì, trên hàng hoặc cột được chọn, đổi đồng thời các số 0 thành các số 1, các số 1 thành các số 0. Chứng minh rằng sau 2016 phép biến đổi như vậy, ta không thể đưa bảng ban đầu về bảng chỉ có các số 0.

UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 5

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2016 - 2017
Môn thi: Toán *(Chuyên Toán, Tin)*
Thời gian làm bài: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1(2.5 điểm).

a) Phân tích đa thức $P\left(x\right) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$ thành nhân tử.

b) Rút gọn biểu thức

$$Q = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4\left(x-1\right)}} + \sqrt{x + \sqrt{4\left(x-1\right)}}}{\sqrt{x^2 - 4\left(x-1\right)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \text{ với } x > 1 \text{ và } x \neq 2.$$

Câu 2(2.0 điểm).

a) Giải phương trình $2\left(2x-1\right) - 3\sqrt{5x-6} = \sqrt{3x-8}$.

b) Cho bốn số thực a, b, c, d khác 0 thỏa mãn các điều kiện a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 10cx - 11d = 0$ và c, d là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 10ax - 11b = 0$. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b + c + d$.

Câu 3(1.0 điểm).

Cho ba số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \dfrac{3a^4 + 3b^4 + c^3 + 2}{\left(a+b+c\right)^3}$.

Câu 4(3.0 điểm). Trên đường tròn $\left(C\right)$ tâm O, bán kính R vẽ dây cung $AB < 2R$. Từ A, B vẽ hai tiếp tuyến $Ax; By$ với đường tròn $\left(C\right)$. Lấy điểm M bất kì thuộc cung nhỏ AB (M không trùng với A và B). Gọi H, K, I lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ M xuống AB, Ax và By.

a) Chứng minh rằng $MH^2 = MK.MI$.

b) Gọi E là giao điểm của AM và KH, F là giao điểm của BM và HI. Chứng minh rằng đường thẳng EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác MEK và MFI.

c) Gọi D là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác MEK và MFI. Chứng minh rằng khi M di chuyển trên cung nhỏ AB thì đường thẳng DM luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5(1.5 điểm).

a) Tìm ba số nguyên tố a, b, c thỏa mãn các điều kiện $a < b < c$ và $\left(bc-1\right)$ chia hết cho a, $\left(ca-1\right)$ chia hết cho b, $\left(ab-1\right)$ chia hết cho c.

b) Các nhà khoa học gặp nhau tại một hội nghị. Một số người là bạn của nhau. Tại hội nghị không có hai nhà khoa học nào có số bạn bằng nhau lại có bạn chung. Chứng minh rằng có một nhà khoa học chỉ có đúng một người bạn.

UBND TỈNH BẮC NINH

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 6

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

NĂM HỌC 2015 - 2016

Môn thi: Toán *(Cho mọi thí sinh)*

Thời gian làm bài: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. (1,5 điểm)

1. Cho hai số $a_1 = 1+\sqrt{2}; a_2 = 1-\sqrt{2}$. Tính $a_1 + a_2$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-y=-3 \end{cases}$

Câu 2. (1,5 điểm) Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2}+\dfrac{4\sqrt{a}-1}{a-4}\right):\dfrac{1}{\sqrt{a}+2}\quad\left(a\ge 0, a\ne 4\right)$

1. Rút gọn biểu thức A.

2. Tính giá trị của biểu thức A với $a=6+4\sqrt{2}$.

Câu 3 (2,5 điểm) Cho phương trình $x^2-\left(2m-1\right)x+m\left(m-1\right)=0\quad\left(1\right)$ (với m là tham số)

1. Giải phương trình (1) với m = 2.
2. Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m
3. Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1) (với $x_1 < x_2$).

   Chứng minh $x_1^2 - 2x_2 + 3 \ge 0$.

Câu 4 (3,0 điểm) Trong mặt phẳng cho đường tròn (O), AB là dây cung cố định không đi qua tâm của đường tròn (O). Gọi I là trung điểm của dây cung AB, M là một điểm trên cung lớn AB (M không trùng A, B). Vẽ đường tròn (O′) đi qua M và tiếp xúc với đường thẳng AB tại A. Tia MI cắt đường tròn (O′) tại điểm thứ hai N và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai C.

1. Chứng minh $\Delta BIC = \Delta AIN$, từ đó chứng minh tứ giác ANBC là hình bình hành.
2. Chứng minh: BI là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN
3. Xác định vị trí của điểm M trên cung AB để diện tích tứ giác ANBC lớn nhất.

Câu 5 (1,5 điểm)

1. Tìm nghiệm dương của phương trình $\left(1+x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2015}+\left(1+x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2015}=2^{2016}$.

2. Trong mặt phẳng cho 2015 điểm phân biệt thỏa mãn trong ba điểm bất kì luôn có ít nhất hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng: luôn tồn tại một hình tròn có tâm là một trong 2015 điểm và bán kính là 1 chứa ít nhất 1008 điểm trong 2015 điểm đã cho.

UBND TỈNH BẮC NINH

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 7

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

NĂM HỌC 2015 - 2016

Môn thi: Toán *(Chuyên Toán, Tin)*

Thời gian làm bài: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức: $P = \left(\dfrac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} - \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right).\dfrac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}.$

1. Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P.
2. Tính giá trị biểu thức P khi $\dfrac{x}{4} = \dfrac{\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(49-20\sqrt{6}\right)\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}.$

Câu 2 (2,5 điểm)

1. Cho số thực dương x thỏa mãn điều kiện $A = x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ và $B = x^5 + \dfrac{1}{x^5}$. Tính giá trị của các biểu thức
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\left(x+3y\right) = 4 \\ 4y^2 = 5 - xy \end{cases}$

Câu 3 (1,5 điểm)

1. Chứng minh rằng: $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right) \geq \left(ax+by\right)^2$, $\forall a,b,x,y \in R$
2. Cho *x*, *y*, *z* la fba số thực dương $x+y+z=\sqrt{2}.$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}.\left(\frac{\sqrt{y+z}}{x} + \frac{\sqrt{z+x}}{y} + \frac{\sqrt{x+y}}{z}\right).$$

Câu 4 (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H (D, E, F là các chân đường cao). Gọi M là trung điểm cạnh BC. Kẻ HP vuông góc AM tại P.

1. Chứng minh rằng: các ddiemr A, E, F, H, P thuộc một đường tròn (kí hiệu (K)) đồng thời EM là tiếp tuyến của đường tròn (K).
2. Chứng minh rằng $MC^2 = MA.MP$
3. Gọi T là điểm đối xứng với P qua đường thẳng BC. Chứng minh rằng: T thuộc đường tròn (O).

Câu 5 (1,0 điểm) 1. Tìm hai số nguyên dương $\left(x^2+3y\right)$ thỏa mãn hai số $x, y\left(x>y>0\right)$ và $\left(y^2+3x\right)$ đều là số chính phương.

2. Viết 2016 số tự nhiên 1,2,3,…,2015,2016 lên bảng. Thực hiện quá trình sau: mỗi lần xóa hai số a và b bất kì, rồi viết lên bảng số (a + b) hoặc số (a – b), đến khi còn lại duy nhất một số thì dừng lại. Hỏi số còn lại có thể là số 2017 hay không?

UBND TỈNH BẮC NINH

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 8

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

NĂM HỌC 2014 - 2015

Môn thi: Toán (vòng 1)

Thời gian làm bài: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu I. *(1, 5 điểm)* Cho phương trình $x^2+2mx-2m-6=0$ (1) , với ẩn x , tham số m .

1) Giải phương trình (1) khi m = 1

2) Xác định giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1 , x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2$ nhỏ nhất.

Câu II. *(1,5 điểm)* Trong cùng một hệ toạ độ , gọi (P) là đồ thị của hàm số y = x^2 và (d) là đồ thị của hàm số y = -x + 2

1) Vẽ các đồ thị (P) và (d) . Từ đó , xác định toạ độ giao điểm của (P) và (d) bằng đồ thị .

2) Tìm a và b để đồ thị Δ của hàm số y = ax + b song song với (d) và cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng -1

Câu III .*(2,0 điểm)*

1) Một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B , quãng đường AB dài 24km . Khi đi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 4km so với lúc đi , vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi 30 phút . Tính vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B .

2) Giải phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{x(1-x)}=1$

Câu IV . *(3,0 điểm)* Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và ba đường cao AA′ , BB′ ,CC′ cắt nhau tại H .Vẽ hình bình hành BHCD . Đường thẳng qua D và song song với BC cắt đường thẳng AH tại M .

1) Chứng minh rằng năm điểm A, B ,C , D , M cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .Chứng minh rằng BM = CD và góc BAM = góc OAC .

3) Gọi K là trung điểm của BC , đường thẳng AK cắt OH tại G . Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABC.

Câu V .*(2, 0 điểm)*

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 2014$.

2) Có 6 thành phố trong đó cứ 3 thành phố bất kỳ thì có ít nhất 2 thành phố liên lạc được với nhau . Chứng minh rằng trong 6 thành phố nói trên tồn tại 3 thành phố liên lạc được với nhau.

UBND TỈNH BẮC NINH

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 9

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

NĂM HỌC 2014 - 2015

Môn thi: Toán *(Dành cho thí sinh chuyên Toán, chuyên Tin)*

Thời gian làm bài: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu I. (2,0 *điểm*) Cho biểu thức $P=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\dfrac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)^2$, với $x\ge 0, x\ne 1$.

1) Rút gọn P.

2) Tìm số chính phương x sao cho $\dfrac{2}{P}$ là số nguyên.

Câu II. (2,0 *điểm*)

1) Cho các số thực x, y, z, a, b, c thỏa mãn các điều kiện $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ và $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$. Chứng minh rằng $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

2) Tìm các số nguyên a để phương trình: $x^2-(3+2a)x+40-a=0$ có nghiệm nguyên. Hãy tìm các nghiệm nguyên đó.

Câu III. *(1,5 điểm)*

1) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+my=3m \\ mx-y=m^2-2 \end{cases}$ với x, y là ẩn, m là tham số. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $x^2-2x-y>0$.

2) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn điều kiện $2c+b=abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{3}{b+c-a}+\dfrac{4}{c+a-b}+\dfrac{5}{a+b-c}$.

Câu IV. *(3,0 điểm)* Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O) ($AB < AC$). Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại N. Vẽ dây AM song song với BC. Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại M và P.

1) Cho biết $\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{NC^2}=\dfrac{1}{16}$, tính độ dài đoạn BC.

2) Chứng minh rằng $\dfrac{BP}{AC}=\dfrac{CP}{AB}$.

3) Chứng minh rằng BC, ON và AP đồng quy.

Câu V. *(1,5 điểm)*

1) Cho đường tròn tâm O bán kính 1, tam giác ABC có các đỉnh A, B, C nằm trong đường tròn và có diện tích lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng điểm O nằm trong hoặc nằm trên cạnh của tam giác ABC.

2) Cho tập $A=\{1;2;3;...;16\}$. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b mà a^2+b^2 là một số nguyên tố.

UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 10

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2013 - 2014
Môn thi: Toán *(Dành cho tất cả các thí sinh)*
Thời gian làm bài: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. (2,0 *điểm*)

a) Giải phương trình: $2x-3=0$.

b) Với giá trị nào của *x* thì biểu thức $\sqrt{x-5}$ xác định?

c) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\cdot\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

Câu 2. (2,0 *điểm*)

Cho hàm số: $y=mx+1$ (1), trong đó *m* là tham số.

a) Tìm *m* để đồ thị hàm số (1) đi qua điểm $A(1;4)$. Với giá trị *m* vừa tìm được, hàm số (1) đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

b) Tìm *m* để đồ thị hàm số (1) song song với đường thẳng *d*: $y=m^2x+m+1$.

Câu 3. *(1,5 điểm)*

Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 36 km. Khi đi từ B trở về A, người đó tăng vận tốc thêm 3 km/h, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho nửa đường tròn đường kính *BC*, trên nửa đường tròn lấy điểm *A* (khác *B* và C). Kẻ *AH* vuông góc với *BC* (*H* thuộc *BC*). Trên cung *AC* lấy điểm *D* bất kì (khác *A* và C), đường thẳng *BD* cắt *AH* tại *I*. Chứng minh rằng:

a) $IHCD$ là tứ giác nội tiếp;

b) $AB^2 = BI.BD$;

c) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *AID* luôn nằm trên một đường thẳng cố định

khi *D* thay đổi trên cung *AC*.

Câu 5. *(1,5 điểm)*

a) Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn phương trình:

$$x^2+2y^2-3xy+2x-4y+3=0.$$

b) Cho tứ giác lồi *ABCD* có $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ là các góc tù. Chứng minh rằng $AC < BD$.

------------*Hết*------------

UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 11

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2013 – 2014
Môn thi: ***Toán*** *(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán, Tin)*
Thời gian làm bài: ***150 phút*** *(Không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: ***20 tháng 6 năm 2013***

Câu 1. (*1,5 điểm*)

a) Rút gọn biểu thức $A=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0,\ x\ne 1$.

b) Cho $x=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right).\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3}$, tính giá trị của biểu thức $P=\left(x^2+4x-2\right)^{2013}$.

Câu 2. (*2,0 điểm*) Cho phương trình: $2x^2-4mx+2m^2-1=0$ (1), với *x* là ẩn, *m* là tham số.

a) Chứng minh với mọi giá trị của *m*, phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi hai nghiệm của phương trình (1) là x_1, x_2. Tìm *m* để $2x_1^2+4mx_2+2m^2-9<0$.

Câu 3. (*1,5 điểm*)

a) Cho các số dương *x*, *y* thỏa mãn $x-y=x^3+y^3$. Chứng minh rằng $x^2+y^2<1$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x=y^2+1\\ 2y=z^2+1.\\ 2z=x^2+1\end{cases}$

Câu 4. (*3,0 điểm*) Cho đường tròn tâm *O* đường kính $BC=2R$, điểm *A* nằm ngoài đường tròn sao cho tam giác ABC nhọn. Từ *A* kẻ hai tiếp tuyến *AM*, *AN* với đường tròn (*O*) (*M*, *N* là hai tiếp điểm). Gọi *H* là trực tâm của tam giác *ABC*, *F* là giao điểm của *AH* và *BC*. Chứng minh rằng:

a) Năm điểm *A*, *O*, *M*, *N*, *F* cùng nằm trên một đường tròn;

b) Ba điểm *M*, *N*, *H* thẳng hàng;

c) $HA.HF=R^2-OH^2$.

Câu 5. (*2,0 điểm*)

a) Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x;y;z)$ thỏa mãn $\dfrac{x+y\sqrt{2013}}{y+z\sqrt{2013}}$ là số hữu tỷ, đồng thời $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố.

b) Tính diện tích của ngũ giác lồi *ABCDE*, biết các tam giác *ABC*, *BCD*, *CDE*, *DEA*, *EAB* cùng có diện tích bằng 1.

------------***Hết***------------

UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
Năm học 2012 – 2013
Môn thi: Toán *(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán, Tin)*
Thời gian làm bài: 150 phút *(Không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: 30 tháng 6 năm 2012.

Đề số 12

Bài 1 ***(2,5 điểm)***

1/ Rút gọn biểu thức sau:

$$A=\sqrt{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-\sqrt{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

2/ Giải phương trình:

$$x^2+\sqrt{x^2-2x-19}=2x+39.$$

Bài 2 ***(2,0 điểm)***

1/ Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $4a-5b+9c=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

2/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+y^2+x=7y \\ \dfrac{x}{y}(x+y)=12 \end{cases}$

Bài 3 ***(1,5 điểm)***

1/ Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn: $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$(1+a)(1+b)(1+c)\ge 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

2/ Phân chia chín số: $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ thành ba nhóm tùy ý, mỗi nhóm ba số. Gọi T_1 là tích ba số của nhóm thứ nhất, T_2 là tích ba số của nhóm thứ hai, T_3 là tích ba số của nhóm thứ ba. Hỏi tổng $T_1+T_2+T_3$ có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

Bài 4 ***(2,5 điểm)***

Cho đường tròn tâm O bán kính R và dây cung BC cố định khác đường kính. Gọi A là một điểm chuyển động trên cung lớn BC của đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn; AD,BE,CF là các đường cao của tam giác ABC. Các đường thẳng BE, CF tương ứng cắt (O) tại các điểm thứ hai là Q, R.

1/ Chứng minh rằng QR song song với EF.

2/ Chứng minh rằng diện tích tứ giác AEOF bằng $\dfrac{EF.\,R}{2}$.

3/ Xác định vị trí của điểm A để chu vi tam giác DEF lớn nhất.

Bài 5 ***(1,5 điểm)***

1/ Tìm hai số nguyên a,b để a^4+4b^4 là số nguyên tố.

2/ Hãy chia một tam giác bất kì thành 7 tam giác cân trong đó có 3 tam giác bằng nhau.

------------Hết------------

UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 13

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2011 – 2012
Môn thi: Toán (Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán, Tin)
Thời gian: 150 phút (*Không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi: 09 tháng 7 năm 2011

Bài 1. (*2,0 điểm*)

Cho phương trình: $x^2-2(m+2)x+6m+1=0$ với x là ẩn, m là tham số.

a/ Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b/ Tìm điều kiện của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 2.

Bài 2. (*3,0 điểm*)

a/ Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a-\sqrt{ab}-6b=0$.

Tính giá trị của biểu thức: $P=\dfrac{a+b}{a+\sqrt{ab}+b}$.

b/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-3y=2 \\ 9y^2-8x=8 \end{cases}$

Bài 3. (*1,5 điểm*)

a/ Cho các số thực a, b thỏa mãn $a+b\neq 0$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+\left(\dfrac{1+ab}{a+b}\right)^2\geq 2$.

b/ Cho các số thực a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M=\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc}$.

Bài 4. (*3,0 điểm*)

Cho hai đường tròn (O) và (O′) cắt nhau tại hai điểm A và B. Vẽ đường thẳng (d) qua A cắt (O) tại C và cắt (O′) tại D sao cho A nằm giữa C và D. Tiếp tuyến của (O) tại C và tiếp tuyến của (O′) tại D cắt nhau tại E.

a/ Chứng minh rằng tứ giác BDEC nội tiếp.

b/ Chứng minh rằng $BE.DC=CB.ED+BD.CE$.

Bài 5. (*0,5 điểm*)

Cho tam giác ABC, trên tia BA lấy điểm M, trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao $BM=CN$. Chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.

--------------------------Hết--------------------------

(Đề thi gồm 01 trang)

UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 14

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2009 – 2010
Môn thi: Toán (Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán, Tin)
Thời gian: 150 phút (*Không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi: 09 tháng 7 năm 2011

Bài 1: ***(2,0 điểm)*** Giải các phương trình sau:

1/ $\sqrt{x+1}=x-1$ 2/ $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+4x+4}=3$

Bài 2: ***(2,5 điểm)***

Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{4x^2+4x+1}+ax$ (x là biến số)

1/ Xác định a để hàm số luôn đồng biến.

2/ Xác định a để đồ thị hàm số đi qua điểm B(1; 6). Vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho với a vừa tìm được.

3/ Dùng đồ thị (C) biện luận theo m số nghiệm của phương trình sau:

$$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{4x^2+4x+1}=x+m$$

Bài 3: ***(2,5 điểm)***

Cho tam giác ABC vuông tại A. Dựng các đường tròn (O) và (O′) có đường kính tương ứng là AB và AC, các đường tròn này cắt nhau tại A và D.

1/ Chứng minh rằng B, C, D thẳng hàng, từ đó suy ra hệ thức:

$$\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$$

2/ Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ CD; AM cắt BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai N. Chứng minh tam giác ABE cân.

3/ Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh: $\widehat{OIO'}=90^0$.

Bài 4: ***(2,0 điểm)***

1/ Chứng minh rằng nếu a, b, c là 3 số thỏa mãn:

$a+b+c=2009$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2009}$ thì một trong ba số phải có một số bằng 2009.

2/ Cho tam giác ABC, AD là phân giác trong của góc A. Chứng minh rằng:

$$AD^2 = AB.AC – DB.DC.$$

Bài 5: ***(1,0 điểm)***

Có 9 chiếc bàn vừa màu xanh vừa màu đỏ xếp thành một hàng dọc cách đều nhau. Chứng minh rằng có ít nhất một chiếc bàn được xếp cách 2 bàn cùng màu với mình một khoảng cách như nhau.

-------------------- Hết --------------------

UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 15

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2010 – 2011
Môn thi: Toán (Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán, Tin)
Thời gian: 150 phút (*Không kể thời gian giao đề*)

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho hàm số $y = f\left(x\right) = -x\left|x\right|$ có đồ thị (P)

1/ Chứng minh hàm số f(x) nghịch biến với mọi x thuộc R

2/ Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị (P) với đường thẳng y = -2x

3/ Vẽ đồ thị (P)

Bài 2 (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2x - 2\left|x - m\right| + 2 = 0$

1) Giải phương trình khi $m = 1$.
2) Tìm m để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm

Bài 3. (2,0 điểm)

1) Cho hai số dương x,y thỏa mãn $x + y = 3\sqrt{xy}$. Tính $\frac{x}{y}$

2) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

Câu 4 (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. kẻ các đường cao AA′, BB′, CC′. Gọi D là diện tích của tam giác ABC và S′ là diện tích của tam giác A′B′C′.

1) Chứng minh rằng AO vuông góc B′C′.
2) Chứng minh rằng , trong đó P là chu vi tam giác A′B′C′
3) Chứng minh hệ thức $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - \frac{S'}{S}$

Câu 5 (1,5 điểm)

1) Hai số 2^{2010} và 5^{2010} được viết liền nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu chữ số
2) Cho tam giác ABC có đường phân giác trong BE hợp với cạnh AC một góc 45^o (góc $\angle BEA = 45^o$). Vẽ đường cao AD của tam giác ABC. Chứng minh góc $\angle EDC = 45^o$

UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 15

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2010 – 2011
Môn thi: Toán (Dành cho mọi thí sinh)
Thời gian: 150 phút (*Không kể thời gian giao đề*)

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right) : \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+a}$

1/ Rút gọn biểu thức P.

2/ Tìm a để $P = \frac{13}{3}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

Một đội công nhân dự định hoàn thành một công việc với 500 ngày công thợ. Hãy tính số người của đội. Biết rằng nếu bổ xung thêm 5 công nhân thì số ngày để hoàn thành công việc sẽ giảm đi 5 ngày.

Câu 3 (2,0 điểm) Cho hai hàm số $y = -x + 2$ và $y = x^2$

1/ Vẽ đồ thị (D) của hàm số $y = -x + 2$ và đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$ trên cùng một trục tọa độ *(Đơn vị trên hai trục bằng nhau).*

2/ Tìm giao điểm của (D) và (P) bằng đồ thị và kiểm tra lại bằng phương pháp đại số.

3/Tìm hàm số $y = ax + m$ biết rằng đồ thị (D′) của nó song song với (D) và cắt (P) tại một điểm có hoành độ bằng 2.

Câu 4 (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB = 2R. Kẻ hai tiếp tuyến Ax và By của nửa đường tròn (O) và tiếp tuyến thứ ba tiếp xúc với nửa đường tròn (O) tại M cắt Ax tại D, cắt By tại E.

1/ Chứng minh tam giác DOE là tam giác vuông

2/ Chứng minh $AD.BE = R^2$

3/ Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn (O) sao cho diện tích tam giác DOE đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho $\left(x+\sqrt{x^2+\sqrt{2010}}\right)\left(y+\sqrt{y^2+\sqrt{2010}}\right)=\sqrt{2010}$ .Hãy tính tổng $S = x + y$

HƯỚNG DẪN GIẢI

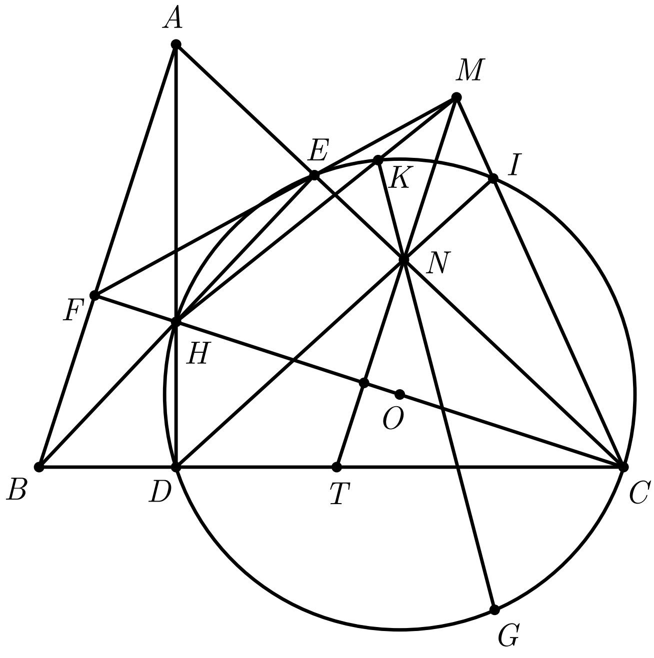
Đề số 1

Câu	Đáp án	Điểm
1.a		**1,0**
	Ta có $x-2=\sqrt{3}\Rightarrow(x-2)^2=3\Rightarrow x^2-4x+1=0$. $\sqrt{x^2-4x+5}=\sqrt{x^2-4x+1+4}=2$.	0,5
	$x^4-2x^3+3x^2-38x+5$ $=(x^4-4x^3+x^2)+(2x^3-8x^2+2x)+(10x^2-40x+10)-5=-5\Rightarrow A=\frac{-5}{2}$.	0,5
1.b		**1,0**
	Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $x^2-(m-1)x+1=0$ (1). (P) cắt d tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $\Leftrightarrow\Delta=(m-1)^2-4>0\Leftrightarrow\lvert m-1\rvert>2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3\\m<-1\end{array}\right.$ (*). Áp dụng ĐL Vi-ét ta có $x_1+x_2=m-1$; $x_1x_2=1$.	0,5
	Từ giả thiết ta có $y_1=x_1^2$, $y_2=x_2^2$. Khi đó $y_1^3-y_2^3=18(x_1^3-x_2^3)\Leftrightarrow x_1^6-x_2^6=18(x_1^3-x_2^3)\Leftrightarrow(x_1^3-x_2^3)(x_1^3+x_2^3-18)=0$ (2). Do $x_1\neq x_2$ nên $(2)\Leftrightarrow x_1^3+x_2^3-18=0\Leftrightarrow(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)-18=0$. Do đó, $(m-1)^3-3(m-1)-18=0\Leftrightarrow(m-1-3)\left[(m-1)^2+3(m-1)+6\right]=0$ $\Leftrightarrow m=4$ (t/m (*)).	0,5
2.a		**1,5**
	$\begin{cases}y^2+2xy+4=2x+5y\ (1)\\5x^2+7y-18=\sqrt{x^4+4}\ (2)\end{cases}$	0,5

	ĐK: $x,y\in\mathbb{R}$. $(1)\Leftrightarrow y^2-y+2x(y-1)+4(1-y)=0\Leftrightarrow (y-1)(y+2x-4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\\ y=4-2x\end{array}\right.$	
	Với $y=1$ thay vào (2) ta được $5x^2-11=\sqrt{x^4+4}\Leftrightarrow \begin{cases} x^2\ge \dfrac{11}{5}\\ 24x^4-110x^2+117=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow x^2=\dfrac{55+\sqrt{217}}{24}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{55+\sqrt{217}}{24}}$.	0,5
	Với $y=4-2x$ thay vào (2) ta được $5x^2+28-14x-18=\sqrt{x^4+4}$ $\Leftrightarrow (x^2+2x+2)+\sqrt{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}-6(x^2-2x+2)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2x+2}=2\sqrt{x^2-2x+2}\\ \sqrt{x^2+2x+2}=-3\sqrt{x^2-2x+2}\end{array}\right.\Leftrightarrow x^2+2x+2=4(x^2-2x+2)$ $\Leftrightarrow 3x^2-10x+6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}\Rightarrow y=\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}\\ x=\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}\Rightarrow y=\dfrac{2-2\sqrt{7}}{3}\end{array}\right.$. Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là: $\left(\sqrt{\dfrac{55+\sqrt{217}}{24}};1\right);\left(-\sqrt{\dfrac{55+\sqrt{217}}{24}};1\right);\left(\dfrac{5-\sqrt{7}}{3};\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}\right);\left(\dfrac{5+\sqrt{7}}{3};\dfrac{2-2\sqrt{7}}{3}\right)$.	0,5
2.b		**1,0**
	Từ giả thiết suy ra $0\le x;y;z\le 3$. Ta có $9(x^2-6x+25)=(x^2-30x+225)+8x^2-24x=(15-x)^2+8x(x-3)\le(15-x)$ với $\forall x, 0\le x\le 3$ (do $0\le x\le 3\Rightarrow 8x(x-3)\le 0$, dấu bằng xảy ra khi $x=0$ hoặc $x=3$). Do đó $\sqrt{9(x^2-6x+25)}\le 15-x$ hay $\sqrt{x^2-6x+25}\le\dfrac{15-x}{3}$ với	0,5

	$\forall x, 0 \le x \le 3$. Tương tự $\sqrt{y^2-6y+25} \le \dfrac{15-y}{3}; \sqrt{z^2-6z+25} \le \dfrac{15-z}{3}$ với $\forall y,z: 0 \le y,z \le 3$. Do đó, $M \le \dfrac{15-x+15-y+15-z}{3} = \dfrac{45-3}{3} = 14$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x;y;z)=(3;0;0)$ hoặc $(x;y;z)=(0;3;0)$ hoặc $(x;y;z)=(0;0;3)$.	
	Ta có $5(x^2-6x+25)=(x^2-22x+121)+(4x^2-8x+4)$ $=(11-x)^2+4(x-1)^2 \ge (11-x)^2$ với $\forall x, 0 \le x \le 3$ (do $4(x-1)^2 \ge 0$, dấu bằng xảy ra khi $x=1$). Do đó $\sqrt{5(x^2-6x+25)} \ge 11-x$ hay $\sqrt{x^2-6x+25} \ge \dfrac{11-x}{\sqrt{5}}$ với $\forall x, 0 \le x \le 3$. Tương tự $\sqrt{y^2-6y+25} \ge \dfrac{11-y}{\sqrt{5}}; \sqrt{z^2-6z+25} \ge \dfrac{11-z}{\sqrt{5}}$ với $\forall y,z: 0 \le y,z \le 3$. Do đó, $M \ge \dfrac{11-x+11-y+11-z}{\sqrt{5}} = \dfrac{33-3}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$. Vậy *GTLN* của M là 14 đạt được khi $(x;y;z)=(3;0;0)$ hoặc $(x;y;z)=(0;3;0)$ hoặc $(x;y;z)=(0;0;3)$ và *GTNN* của M là $6\sqrt{5}$ đạt được khi $x=y=z=1$.	0,5
3.a		**1,0**
	Vì x,y nguyên dương và $(x;y)=(1;1)$ không thỏa mãn phương trình nên $x^2+y^2+1>3; xy+x+y>3$. Suy ra $xy+x+y$ là ước nguyên dương lớn hơn 3 của 30 gồm: $5;6$	0,5

	Nếu $xy+x+y=5 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=6$ ta được các trường hợp +) $\begin{cases} x+1=2 \\ y+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện đầu bài) +) $\begin{cases} x+1=3 \\ y+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện đầu bài) Nếu $xy+x+y=6 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=7$ không thỏa mãn Vậy các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn là $(1;2),(2;1)$.	0,5
3.b		**0,5**
	Vì $12n^2+1$ là số lẻ nên để $\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên thì $12n^2+1=(2m+1)^2, m\in\mathbb{N}$. Suy ra, $m(m+1)=3n^2$. Vì $(m;m+1)=1$ nên xảy ra hai trường hợp $\left[\begin{array}{l} m=3u^2; m+1=v^2 \\ m=v^2; m+1=3u^2 \end{array}\right., u,v\in\mathbb{Z}^*$.	0,25
	Nếu $m=v^2; m+1=3u^2$ thì $v^2=3u^2-1$ hay v^2 là số chính phương chia 3 dư 2. Điều này không xảy ra vì mọi số chính phương chia 3 dư là 0 hoặc 1. Do đó chỉ xảy ra $m=3u^2; m+1=v^2$. Ta có $2\sqrt{12n^2+1}+2=2(2m+1)+2=4m+4=4v^2$ là số chính phương (điều phải chứng minh)	0,25
4.a		**1,0**
	Vẽ hình đúng ý a)	0,25
	Xét ΔNDE và ΔNCI có: $\widehat{END}=\widehat{INC}$ (đối đỉnh) $\widehat{EDN}=\widehat{ICN}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{EI}$) Suy ra $\Delta NDE \backsim \Delta NCI$	0,75

		(g.g) nên $\frac{ND}{NC}=\frac{NE}{NI}$. $\Rightarrow NI.ND = NE.NC$.	
4.b			**1,0**
	Do các tứ giác $BFEC$, $DEIC$, $ABDE$ nội tiếp nên: $\widehat{AFE}=\widehat{ACB}=\widehat{DIE}$. $\widehat{MEC}=\widehat{ABC}=\widehat{DEC}=\widehat{DIC}\Rightarrow$ Tứ giác $MENI$ nội tiếp.		0,5
	$\Rightarrow \widehat{DIE}=\widehat{EMN}\Rightarrow \widehat{AFE}=\widehat{EMN}\Rightarrow MN//AB$. Mà $CH\perp AB\Rightarrow CH\perp MN$.		0,5
4.c			**1,0**
	Xét $\Delta ENM, \Delta TNC$ có $\widehat{EMN}=\widehat{EIN}=\widehat{NCT}, \widehat{ENM}=\widehat{TNC}\Rightarrow \Delta ENM \backsim \Delta TNC$ (g.g). $\Rightarrow \frac{NE}{NT}=\frac{NM}{NC}\Rightarrow NC.NE = NM.NT \ (1)$. Xét $\Delta ENK, \Delta GNC$ có $\widehat{KEN}=\widehat{CGN}, \widehat{ENK}=\widehat{GNC}\Rightarrow \Delta ENK \backsim \Delta GNC$ (g.g). $\Rightarrow \frac{NE}{NG}=\frac{NK}{NC}\Rightarrow NC.NE = NG.NK \ (2)$.		0,5
	Từ $(1),(2)$ suy ra $NM.NT = NG.NK \Rightarrow \frac{NK}{NT}=\frac{NM}{NG}\Rightarrow \Delta TGN \backsim \Delta KMN$.		0,5

	$\Rightarrow \widehat{KMN}=\widehat{TGN}\,(3)$. Mà $\widehat{KMN}=\widehat{HCK}$ (cùng phụ với $\widehat{KHC}$) $\Rightarrow \widehat{KMN}=\widehat{HGN}\,(4)$. Từ (3) và (4) ta có $\widehat{TGN}=\widehat{HGN} \Rightarrow H,T,G$ thẳng hàng.	
5		**1,0**
	TH1: Tất cả các hộp có số kẹo bằng nhau và bằng 2, khi đó lấy 505 chiếc hộp bất kỳ ta sẽ có tổng số kẹo là 1010.	0,25
	TH2: Tồn tại hai hộp có số kẹo khác nhau, khi đó ta sắp xếp các hộp thành một hàng ngang sao cho hai hộp đầu tiên không có cùng số kẹo. Ký hiệu a_i là số kẹo trong hộp thứ i, $i=1;2;...;1010$. Xét các số $S_1=a_1;S_2=a_1+a_2;...;S_{1010}=a_1+a_2+...+a_{1010}$, với $1\le a_i\le 1010$. +) Nếu tồn tại hai số trong $S_1;S_2;...;S_{1010}$ có cùng số dư khi chia cho 1010, giả sử là $S_i,S_j\,(i<j)$ thì $S_j-S_i=(a_{i+1}+...+a_j)\,\vdots\,1010$. Do $1\le S_j-S_i\le 2019;(S_j-S_i)\,\vdots\,1010$ nên $S_j-S_i=1010$ hay $a_{i+1}+...+a_j=1010$	0,25
	+) Nếu trong $S_1;S_2;...;S_{1010}$ không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho $1010\,(1)$. Xét 1011 số $S_1;S_2;...;S_{1010},a_2$, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 1010. Mà $S_1=a_1\ne a_2, 1\le a_1,a_2\le 1010$ nên S_1,a_2 không cùng số dư khi chia cho $1010\,(2)$. Từ (1) và (2) suy ra tồn tại $k=2;3;...;1010$ sao cho S_k,a_2 cùng số dư khi chia cho 1010. Khi đó $S_k-a_2=a_1+a_3+...+a_k\,\vdots\,1010$. Mà $1\le a_1+a_3+...+a_k\le 2019 \Rightarrow a_1+a_3+...+a_k=1010$. Suy ra điều phải chứng minh.	0,5

Đề số 2

Câu 1.

a) **Rút gọn biểu thức**

$$P=\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a-\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right):\frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{b^2},\qquad |a|>|b|>0$$

$$=\frac{\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^2-\left(a-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}{\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)\left(a-\sqrt{a^2+b^2}\right)}.\frac{b^2}{4\sqrt{a^2\left(a^2-b^2\right)}}$$

$$=\frac{a^2+a^2+b^2+2a\sqrt{a^2+b^2}-\left(a^2+a^2+b^2-2a\sqrt{a^2+b^2}\right)}{a^2-\left(a^2-b^2\right)}.\frac{b^2}{4.|a|.\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\frac{4a\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}.\frac{b^2}{4.|a|.\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{|a|\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}\,khi\quad a>0\\ -\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}\qquad khi\qquad a<0\end{cases}$$

b) **Cho phương trình………**

Để phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1;x_2$ thì $\Delta\ge 0\Leftrightarrow a^2-4b\ge 0$

Áp dụng định lý Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-a & (1)\\ x_1x_2=b & (2)\end{cases}$

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases}x_1-x_2=5\\ x_1^3-x_2^3=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2=5\\ \left(x_1-x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-x_1x_2\right]=35\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2=5\\ 5\left[\left(x_1+x_2\right)^2-x_1x_2\right]=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2=5 & (3)\\ \left(x_1+x_2\right)^2-x_1x_2=7 & (4)\end{cases}$$

Thế (1) (2) vào (4) ta được:

$$(-a)^2-b=7\Leftrightarrow a^2-b=7\Leftrightarrow b=a^2-7\quad (*)$$

Bình phương hai vế của (3) ta được:

$$\left(x_1-x_2\right)^2=5^2\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=25\Leftrightarrow a^2-4b=25$$

$$\Leftrightarrow a^2-4a^2+28=25\Rightarrow a^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\Rightarrow b=-6\\ a=-1\Rightarrow b=-6\end{array}\right.$$

Vậy $(a;b)=\{(1;-6);(-1;-6)\}$

Câu 2.

a) **Giải phương trình** $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=x+3$

Ta có điều kiện xác định: $x\ge\frac{-1}{3}$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x+3}\\ b=\sqrt{3x+1}\end{cases}(a,b\ge 0)\Rightarrow\begin{cases}a^2=x+3\\ b^2=3x+1\end{cases}$. Khi đó ta có hệ phương trình sau đây:

$$\begin{cases}a+b=a^2\\ 3a^2-b^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a^2-a\\ 3a^2-\left(a^2-a\right)^2=8\quad(*)\end{cases}$$

$\Rightarrow(*)\Leftrightarrow 3a^2-a^4+2a^3-a^2=8$

$\Leftrightarrow a^4-2a^3-2a^2+8=0$

$\Leftrightarrow a^3(a-2)-2(a-2)(a+2)=0$

$\Leftrightarrow (a-2)\left(a^3-2a+4\right)=0$

$\Leftrightarrow (a-2)(a+2)\left(a^2+2a+2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2(tm)\\ a=-2(ktm)\end{array}\right.$

$\Rightarrow b=a^2-a=4-2=2$

$\Rightarrow\begin{cases}x+3=a^2=4\\ 3x+1=b^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1\qquad(TM)$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

b) **Cho các số thực a,b, c….**

Áp dụng BĐT Co si ta có: $\begin{cases}a^2+b^2\ge 2ab\\ b^2+c^2\ge 2bc\\ c^2+a^2\ge 2ca\end{cases}$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2\right)\ge\frac{1}{2}\left(2ab+2ac+2bc\right)$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc$

$\Rightarrow P=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\ge 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c\\ a+b+c=3\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy $MinP=1$ khi $a=b=c=1$

Theo đề bài ta có:

$0 \le a,b,c \le 2 \Rightarrow (a-2)(b-2)(c-2) \le 0$

$\Leftrightarrow abc - 2(ab+ac+bc) + 4(a+b+c) - 8 \le 0$

$\Leftrightarrow abc - 2(ab+ac+bc) + 12 - 8 \le 0$

$\Rightarrow 2(ab+ac+bc) \ge 4 + abc \ge 4$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca \ge 2$

$\Rightarrow P = \dfrac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{ab+ac+bc} - 2$

$\Leftrightarrow P = \dfrac{(a+b+c)^2}{ab+ac+bc} - 2 \le \dfrac{9}{2} - 2 = \dfrac{5}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} abc = 0 \\ a+b+c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b+c = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} b = 0 \\ a+c = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} c = 0 \\ a+b = 3 \end{cases} \\ 0 \le a,b,c \le 2 \end{array}\right.$

Vậy $MaxP = \dfrac{5}{2}$ khi $abc = 0, a+b+c = 3, 0 \le a,b,c \le 2$

Câu 3

a) Tìm các cặp số nguyên tố….

Ta có 1 số chính phương khi chia cho 3 sẽ nhận được số dư là 0 hoặc 1 nên ta có:

$\begin{cases} (3k)^2 = 9k^2 \\ (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv 1(\bmod 3) \\ (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 \equiv 1(\bmod 3) \end{cases}$

Nếu $x, y > 3$ thì x,y không chia hết cho 3 do đó số dư của Vế trái cho 3 là $1 - 2.1 = -1$ chia 3 dư 2 vô lý do $x^2 - 2y^2 = 1$

$\Rightarrow$ trong hai số x, y phải có một số bằng 3

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \Rightarrow 9 - 2y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2 (y > 0) \\ y = 3 \Rightarrow x^2 - 2.9 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 19 \Rightarrow x \in \varnothing \end{array}\right.$

Vậy các cặp số nguyên $(x;y) = (3;2)$

b) Chứng minh rằng nếu hiệu các lập phương…..

Gọi 2 số tự nhiên liên tiếp đó là $a, a+1 (a \in \mathbb{Z})$, theo đề bài ta có:

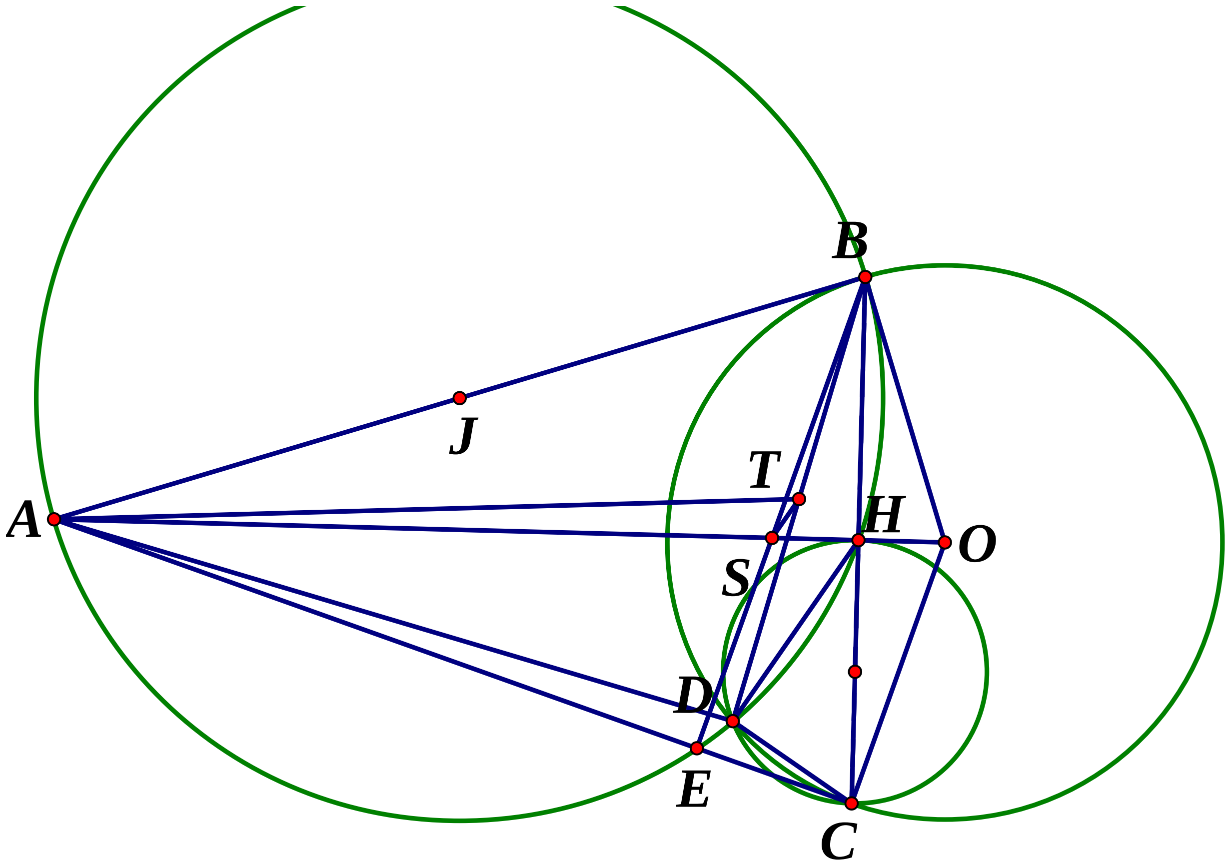
$(a+1)^3 - a^3 = n^2 \Leftrightarrow a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - a^3 = n^2 \Leftrightarrow 3a^2 + 3a + 1 = n^2 \qquad (*)$

+)Xét TH: $-1 \le a \le 0$ ta có: $\left[\begin{array}{ll} a = 0 \Rightarrow n = 1 = 0^2 + 1^2 \Rightarrow a = 0 & (tm) \\ a = -1 \Rightarrow n = 1 = 0^2 + 1^2 \Rightarrow a = -1 & (tm) \end{array}\right.$

+)Xét TH: $\left[\begin{array}{l} a > 0 \\ a < -1 \end{array}\right. \Rightarrow (2a)^2 < 3a^2 + 3a + 1 < (2a+1)^2$

Vậy ta có n là tổng của hai số chính phương liên tiếp .

Câu 4



Bài 1.

a) Chứng minh ABHD nội tiếp

Gọi I, J lần lượt là tâm của các đường tròn đường kính CH, AB

Xét (J) ta có: $\widehat{ADB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn. $\Rightarrow \widehat{ADB} = 90^0$

Ta có: AB, AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại các tiếp điểm B, C cắt nhau tại A

Và $AO \cap BC = H \Rightarrow AO \perp BC$ tại H hay $\widehat{AHB} = 90^0$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Xét tứ giác ABHD ta có: $\widehat{ADB} = \widehat{AHB} = 90^0 (cmt) \Rightarrow ABHD$ là tứ giác nội tiếp

b) Gọi E là giao điểm thứ 2 của đường tròn…..

Vì tứ giác ABHD là tứ giác nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{DAH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DH)

Xét đường tròn (I) ta có: $\widehat{HDC}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Rightarrow \widehat{HDC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{HCD} = 90^0$

Lại có: $\begin{cases} \widehat{ADH} = \widehat{ADB} + \widehat{BDH} = 90^0 + \widehat{BDH} \\ \widehat{BDC} = \widehat{BDH} + \widehat{HDC} = 90^0 + \widehat{BDH} \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{ADH} = \widehat{BDC}$

Xét ΔADH và ΔBDC ta có:

$\widehat{HAD} = \widehat{DAC}(cmt); \widehat{ADH} = \widehat{BDC}(cmt) \Rightarrow \Delta ADH \sim \Delta BDC(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AH}{BC}$ (các cặp cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AH} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{2.TD}{2.HC} = \dfrac{TH}{HC}$ (T là trung điểm của BD)

Xét ΔTAD và ΔCAH ta có: $\dfrac{AD}{AH} = \dfrac{TD}{CH}(cmt); \widehat{TDA} = \widehat{CHA} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta TAD \sim \Delta CAH(c.g.c) \Rightarrow \widehat{TAD} = \widehat{HAC}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\begin{cases} \widehat{TAD} = \widehat{TAS} + \widehat{HAD} \\ \widehat{HAC} = \widehat{HAD} + \widehat{DAE} \end{cases} \Rightarrow \widehat{TAS} = \widehat{DAE}$

Mặt khác : $\widehat{DAE} = \widehat{DBE}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung DE)

$\Rightarrow \widehat{TAS} = \widehat{SBT}\left(= \widehat{EAD}\right)$

$\Rightarrow ABTS$ là tứ giác nội tiếp

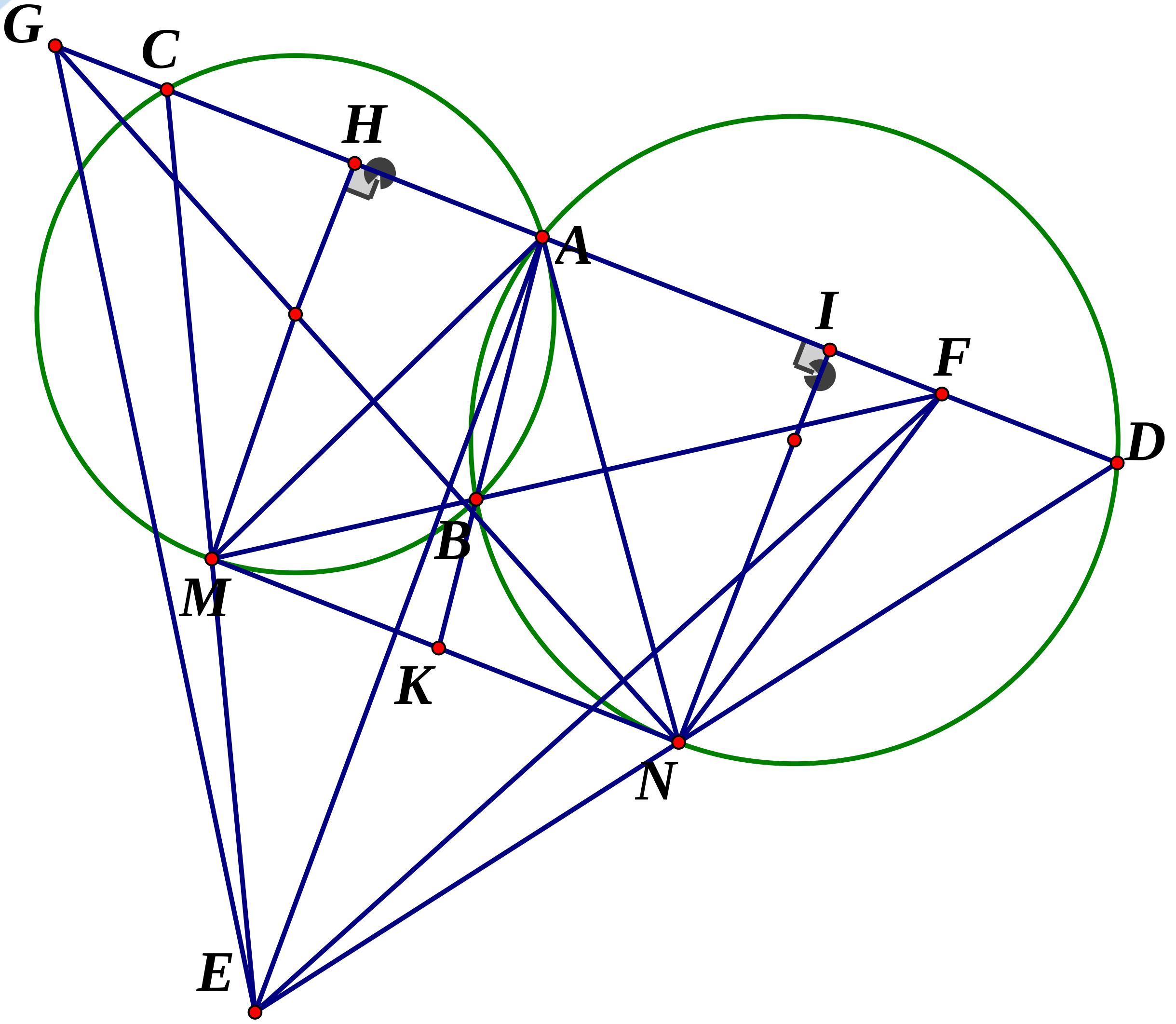
$\Rightarrow \widehat{STD} = \widehat{BAS}$ (góc ngoài tại 1 đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện)

Mà $\widehat{BAS} = \widehat{BDH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BH trong đường tròn (J))

$\Rightarrow \widehat{STD} = \widehat{TDH}\left(= \widehat{BAH}\right)$

Lại có hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow ST // HD(dpcm)$

Bài 2.



Gọi $MO_1 \cap d = H; NO_2 \cap d = I, AB \cap MN = K$

Ta có : MN//CD $\Rightarrow \begin{cases} O_1M \perp CD = \{H\} \\ O_2M \perp CD = \{I\} \end{cases}$

$\Rightarrow O_1M, O_2N$ lần lượt là trung trực của CA và DA (đường kính dây cung)

$\Rightarrow \begin{cases} CH = HA, \widehat{MHA} = 90^0 \\ IA = ID, \widehat{NID} = 90^0 \end{cases}$

$\Rightarrow MNIH$ là hình chữ nhật $\left(\widehat{M} = \widehat{H} = \hat{I} = 90^0\right) \Rightarrow HI = MN = \frac{1}{2}CD$

Xét ΔCED ta có: $\begin{cases} MN // CD \\ MN = \frac{1}{2}CD \end{cases} (cmt)$

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\Delta CED \Rightarrow M, N$ lần lượt là trung điểm của EC, ED

$\Rightarrow MC = ME, ND = NE$

Xét ΔCAE ta có: M, H lần lượt là trung điểm CA, CE (cmt)

$\Rightarrow AM$ là đường trung bình $\Delta CAE \Rightarrow MN // AE$

Mà $MH \perp CD \quad (cmt) \Rightarrow AE \perp CD$ (từ vuông góc đến song song)

Xét ΔMKA và ΔBKM ta có:

$\widehat{MAK} = \widehat{KMB}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến dây cung cùng chắn cung AB)

$\widehat{MKA}$ chung

$$\Rightarrow \Delta MKA \sim \Delta BKM \quad (g.g) \Rightarrow \frac{MK}{BK} = \frac{KA}{KM} \Rightarrow KM^2 = KA.BK \quad (1)$$

Xét ΔNKA và ΔBKN ta có:

$\widehat{NAK} = \widehat{KNB}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến dây cung cùng chắn cung AB)

$\widehat{NKA}$ chung

$$\Rightarrow \Delta NKA \sim \Delta BKN (g.g) \Rightarrow \frac{NK}{BK} = \frac{KA}{KN} \Rightarrow KN^2 = KA.BK \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $KM = KN$

Do $MN // FG$, áp dụng định lý Ta let ta có:

$$\frac{KN}{AG} = \frac{MK}{AF} = \frac{KB}{AB} \Rightarrow AG = AF$$

Mặt khác $AE \perp FG \quad (cmt) \Rightarrow EG = EF$ (tính chất đường trung trực) (dpcm)

Câu 5

Ta có : các số có ước nguyên tố không vượt quá 7 có dạng $2^x.3^y.5^z.7^t$

Do x, y, z, t mỗi số có 2 trường hợp chẵn, lẻ nên số trên có tổng cộng $2.2.2.2 = 16$ trường hợp của bộ x, y, z, t

Theo nguyên lý Dirichle, tồn tại ít nhất $\left[\frac{20}{16} + 1\right] = 2$ số a, b saao cho

$\begin{cases} a = 2^{x_1}.3^{y_1}.5^{z_1}.7^{t_1} \\ b = 2^{x_2}.3^{y_2}.5^{z_2}.7^{t_2} \end{cases}$ và các số mũ tương ứng cùng tính chẵn lẻ

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ y_1 + y_2 = 2n \\ z_1 + z_2 = 2p \\ t_1 + t_2 = 2q \end{cases} \Rightarrow a.b = \left(2^m.3^n.5^p.7^q\right)^2$$

Đây là một số chính phương

Vậy ta luôn chọn được 2 số sao cho tích của chúng là số chính phương từ 20 số tự nhiên mà mỗi số có ước nguyên tố không vượt quá 7

Đề số 3

Câu 1(2.5 điểm). Cho biểu thức $P=\dfrac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ và $Q=\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2x-2}{\sqrt{x}+2}$ với $x\ge 0; x\ne 4$.

a) Rút gọn các biểu thức P và Q.

Với $x\ge 0; x\ne 4$ ta có

$$P=\frac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}=\frac{2x-4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}=\frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}-2}=2\sqrt{x}+1$$

$$Q=\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2x-2}{\sqrt{x}+2}=\frac{x\sqrt{x}+2x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}=\frac{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}+2}=x-1$$

b) Tìm tất cả các giá trị x để $P=Q$.

Với $x\ge 0; x\ne 4$ ta được $P=2\sqrt{x}+1$ và $Q=x-1$. Khi đó

$$P=Q\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+1=x-1\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}+1=2\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2=3$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{x}-1=\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\sqrt{3}+1\Leftrightarrow x=4+2\sqrt{3}$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $x=4+2\sqrt{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2(2.5 điểm).

a) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{a}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{4a+6b+2017c}{4a-6b+2017c}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{a}=\dfrac{a+b+c}{a+b+c}=1$, suy ra $a=b=c$.

Từ đó ta được $P=\dfrac{4a+6b+2017c}{4a-6b+2017c}=\dfrac{2027a}{2015a}=\dfrac{2027}{2015}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+2y=xy+4\\ x^2-x+3-x\sqrt{6-x}=\left(y-3\right)\sqrt{y-3}\end{cases}$

Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x\le 6; y\ge 3$. Phương trình thứ nhất được viết lại thành

$$x^2-4-xy+2y=0\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x+2\right)-y\left(x-2\right)=0\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x-y+2\right)=0$$

+ Với $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$1=\left(y-3\right)\sqrt{y-3} \Leftrightarrow \left(y-3\right)^3=1 \Leftrightarrow y-3=1 \Leftrightarrow y=4$$

+ Với $x-y+2=0 \Leftrightarrow y=x+2$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$x^2-x+3-x\sqrt{6-x}=\left(x-1\right)\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x\sqrt{6-x}+\left(x-1\right)\sqrt{x-1}=x^2-x+3$$

Ta có $x\sqrt{6-x}+\left(x-1\right)\sqrt{x-1} \le \dfrac{x+6-x}{2}+\dfrac{\left(x-1\right)^2+x-1}{2}=x^2-x+3$.

Kết hợp với phương trình trên suy ra dấu bằng của bất đẳng thức trên xẩy ra.

Từ đó ta được $\begin{cases} x=\sqrt{6-x} \\ x-1=\sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow x=2$, từ đó suy ra $y=4$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được các nghiệm của hệ là $\left(x;y\right)=\left(2;4\right)$.

Câu 3(1.5 điểm).

a) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c \le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=\frac{a^2+6a+3}{a^2+a}+\frac{b^2+6b+3}{b^2+b}+\frac{c^2+6c+3}{c^2+c}$$

Ta có $\dfrac{a^2+6a+3}{a^2+a}=\dfrac{a^2+a+3\left(a+1\right)+2a}{a^2+a}=1+\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{a+1}$.

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được $M=3+\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{b}+\dfrac{3}{c}+\dfrac{2}{a+1}+\dfrac{2}{b+1}+\dfrac{2}{c+1}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM dạng $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \ge \dfrac{9}{x+y+z}$ và kết hợp với $a+b+c \le 3$ ta có

$$M=3+\frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{3}{c}+\frac{2}{a+1}+\frac{2}{b+1}+\frac{2}{c+1}=3+3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+2\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$$
$$\ge 3+3.\frac{9}{a+b+c}+2.\frac{9}{a+b+c+3} \ge 3+3.\frac{9}{3}+2.\frac{9}{3+3}=15$$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức M là 15, đạt được tại $a=b=c=1$.

b) Cho tam giác vuông có số đo các cạnh là các số tự nhiên có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của số đo cạnh huyền ta được số đo một cạnh góc vuông. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó

Giả sử tam giác ABC vuông A có

$$BC = \overline{ab}; CA = \overline{cd}; AB = \overline{ba} \text{ với } 0 < b < a \le 9; 1 \le c \le a; 0 \le d \le 9$$

Theo định lí Pitago ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ nên ta được

$$\overline{ab}^2 = \overline{cd}^2 + \overline{ba}^2 \Rightarrow \overline{cd}^2 = \overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = 99\left(a^2 - b^2\right)$$

Từ đó suy ra $\overline{cd}^2 \vdots 33 \Rightarrow \begin{cases} \overline{cd}^2 \vdots 3 \\ \overline{cd}^2 \vdots 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{cd} \vdots 3 \\ \overline{cd} \vdots 11 \end{cases} \Rightarrow \overline{cd} \vdots 33 \Rightarrow \overline{cd} \in \{33; 66; 99\}$.

+ Trường hợp 1. Với $\overline{cd} = 99$, ta có $99 = \overline{cd} < \overline{ab} \le 99$ vô lí nên trường hợp này loại.

+ Trường hợp 2. Với $\overline{cd} = 66$, khi đó ta có $66^2 = 99\left(a^2 - b^2\right) \Leftrightarrow \left(a - b\right)\left(a + b\right) = 40$.

Do $a - b, a + b$ cùng tính chẵn lẻ và $0 < a - b < a + b < 18$ nên không có a, b thỏa mãn đẳng thức trên.

+ Trường hợp 3. Với $\overline{cd} = 33$, khi đó ta có $33^2 = 99\left(a^2 - b^2\right) \Leftrightarrow \left(a - b\right)\left(a + b\right) = 11$.

Do $a - b, a + b$ cùng tính chẵn lẻ và $0 < a - b < a + b < 18$ nên ta được

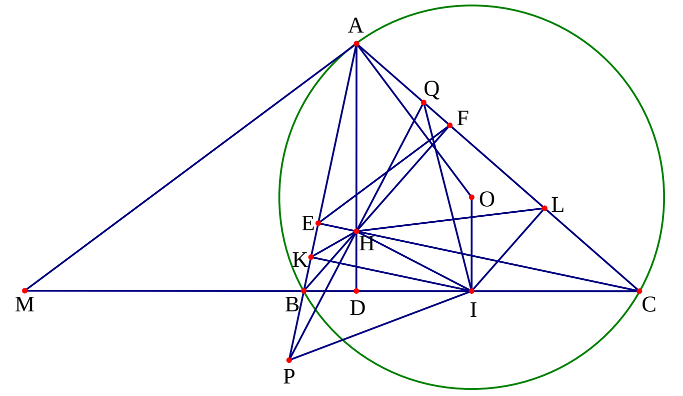
$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Từ đó ta được các cạnh của tam giác ABC là $AB = 56; BC = 65; CA = 33$.

Từ đó ta được $r = \dfrac{2S_{ABC}}{AB + BC + CA} = \dfrac{33.56}{56 + 33 + 65} = 12$ (đvđd)

Câu 4(3.0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại M. Kẻ đường cao BF của tam giác ABC(F thuộc AC). Từ F kẻ đường thẳng song song với MA cắt AB tại E. Gọi H là giao điểm củ CE và BF, D là giao điểm của AH và BC.

a) Chứng minh rằng $\mathrm{MA}^2 = \mathrm{MB.MC}$ và $\dfrac{MC}{MB} = \dfrac{AC^2}{AB^2}$.

<table>
<tr>
<td>Xét hai tam giác MAB và MCA có $\widehat{AMB}$ chung và $\widehat{ACB}=\widehat{MAB}$ nên suy ra $\Delta MAB \backsim \Delta MCA$. Do đó ta được
$\frac{MA}{MC}=\frac{MB}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB.MC$
Cũng từ $\Delta MAB \backsim \Delta MCA$ ta có
$\frac{MC}{MA}=\frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{MC^2}{MA^2}=\frac{AC^2}{AB^2}$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Kết hợp với $MA^2 = MB.MC$ ta được $\frac{MC^2}{MA^2}=\frac{AC^2}{AB^2} \Rightarrow \frac{MC^2}{MB.MC}=\frac{AC^2}{AB^2} \Rightarrow \frac{MC}{MB}=\frac{AC^2}{AB^2}$.

b) Chứng minh rằng AH vuông góc với BC tại D.

Do $\widehat{MAE}=\widehat{AEF}$ và $\widehat{ACB}=\widehat{MAE}$ nên ta được $\widehat{ACB}=\widehat{AEF}$, từ đó tứ giác BEFC nội tiếp đường tròn. Mà ta có $\widehat{BFC}=90^0$ nên ta suy ra được $\widehat{BEC}=90^0$ nên CE vuông góc với AB.

Do đó H là trực tâm của tam giác ABC, suy ra tam giác AH vuông góc với BC tại D.

c) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh bốn điểm E, F, D, I cùng nằm trên một đường tròn.

Do tam giác BFC vuông tại F và I là trung điểm của BC nên $FI=\frac{1}{2}BC$.

Từ đó tam giác BFI cân tại I. Do đó ta được $\widehat{FIC}=2\widehat{IBF}$.

Mặt khác tứ giác BEHD nội tiếp nên $\widehat{HAF}=\widehat{HEF}$.

Lại có $\widehat{HAF}=\widehat{HBD}$ vì cùng phụ với $\widehat{ACB}$.

Kết hợp các kết quả trên ta được $\widehat{HBD}=\frac{1}{2}\widehat{DEF}$ nên suy ra $\widehat{FIC}=\widehat{DEF}$.

Vậy bốn điểm E, F, I, D cùng nằm trên một đường tròn.

d) Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với HI cắt AB và AC lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng H là trung điểm của PQ.

Gọi K và L lần lượt là trung điểm của BE và FC, khi đó IK là đường trung bình của tam giác BEC. Từ đó ta suy ra được IK và EC song song với nhau nên ta được IK vuông góc với BE.

Do vậy tứ giác PKHI nội tiếp đường tròn nên $\widehat{HPI} = \widehat{HKI}$.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $\widehat{HQI} = \widehat{HLI}$.

Ta có $\widehat{HKI} + \widehat{HKE} = 90^0$ và $\widehat{HLI} + \widehat{HLF} = 90^0$ (*).

Lại có $\Delta HBE \backsim \Delta HEF$ nên suy ra $\frac{HE}{HF} = \frac{BE}{CF} \Rightarrow \frac{HE}{HF} = \frac{KE}{LF}$.

Xét hai tam giác HKE và HLF có $\frac{HE}{HF} = \frac{KE}{LF}$ và $\widehat{HEK} = \widehat{HFL} = 90^0$.

Do vậy $\Delta HKE \backsim \Delta HFL$ nên ta được $\widehat{HKE} = \widehat{HLF}$.

Kết hợp với (*) ta được $\widehat{HKI} = \widehat{HLI}$ nên $\widehat{HPI} = \widehat{HQI}$, do đó tam giác IPQ cân tại I.

Mà IH vuông góc với PQ tại H nên H là trung điểm của PQ.

Câu 5(0.5 điểm). Cho $2n+1$ số nguyên, trong đó có đúng một số 0 và các số 1, 2, 3, ..., n mỗi số xuất hiện hai lần. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn sắp xếp được $2n+1$ số nguyên trên thành một dãy sao cho với mọi $m = 1, 2, 3, ..., n$ có đúng m số nằm giữa hai số m.

Ta có nhận xét rằng với hai tập, mỗi tập gồm các số lẻ từ 1 đến $2k+1$ ta có thể sắp xếp sao cho thỏa mãn yêu cầu bài toán với một ô trống ở giữa:

$2k+1; 2k-1; ...; 3; 1; \square; 1; 3; ...; 2k-1; 2k+1$. V với hai tập, mỗi tập gồm các số chẵn từ 2 đến $2k$ ta có thể sắp xếp sao cho thỏa mãn yêu cầu bài toán với một ô trống ở giữa:

$2k; 2k-2; ...; 4; 2; \square; \square; 2; 4; ...; 2k-2; 2k$.

Ta xét hai trường hợp sau

+ Với $n = 2k+1$, ta xét cách sắp xếp sau

$$2k+1; 2k-1; ...; 3; 1; 2k; 1; 3; ...; 2k-1; 2k+1; 2k-2; ...4; 2; 2k; 0; 2; 4; ...; 2k-2$$

Cách sắp xếp trên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $n = 2k$, ta xét cách sắp xếp sau

$$2k-1; ...; 3; 1; 2k; 1; 3; ...; 2k-1; 2k-2; ...4; 2; 2k; 0; 2; 4; ...; 2k-2$$

Cách sắp xếp trên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Đề số 4

Câu 1(1.5 điểm).

a) Giải phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Ta có $\Delta = 1$ nên phương trình có hai nghiệm $x = 2; x = 3$.

b) Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{3}\left(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{108}\right)$.

Ta có $A = \sqrt{3}\left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}\left(-\sqrt{3}\right) = -3$

Câu 2(1.5 điểm). Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$, với m là tham số.

a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$.

Khi m = 1 ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$.

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x; y\right)$ sao cho x và y là các số nguyên.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(m - 2\right)y = -2 \quad \left(1\right) \\ x = 3 - 2y \end{cases}$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì $\left(1\right)$ phải có nghiệm duy nhất.

Muốn vậy $m - 2 \neq 0$, suy ra $m \neq 2$. Hệ có nghiệm $\left(x; y\right) = \left(\dfrac{3m - 2}{m - 2}; \dfrac{-2}{m - 2}\right)$.

Để $y \in \mathbb{Z}$ thì $m - 2$ phải là ước của 2 suy ra $m \in \left\{0; 1; 3; 4\right\}$.

Thử lại với các giá trị này, y và x đều là số nguyên.

Vậy $m \in \left\{0; 1; 3; 4\right\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 3(2.5 điểm). Cho hàm số $y = 2x^2$.

a) Vẽ đồ thị $\left(P\right)$ của hàm số (Học sinh tự vẽ hình).

b) Tìm m để đường thẳng $d: y = 2mx - 2$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ sao cho biểu thức $M = (x_1 + x_2)^4 - 17(x_1 + x_2)^2 x_1^2 x_2^2 - 6(x_1 + x_2)x_1^3 x_2^3 + 90$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $x^2 - mx + 1 = 0$ (1).

Đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$$

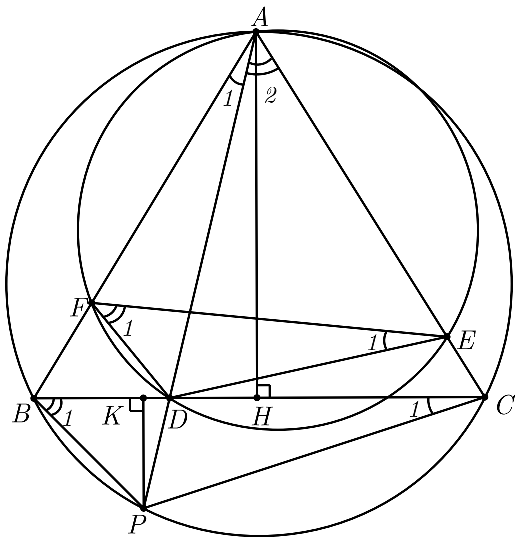
Áp dụng định lí Vi – et ta có $x_1 + x_2 = m; x_1 x_2 = 1$.

$$M = m^4 - 17m^2 - 6m + 90 = (m^4 - 18m^2 + 81) + (m^2 - 6m + 9) = (m^2 - 9)^2 + (m - 3)^2 \geq 0$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 0. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = 3$.

Câu 4(3.0 điểm). Cho tam giác ABC lấy điểm D thay đổinằm trên cạnh BC (D không trùng với B và C). Trên tia AD lấy điểm P sao cho D nằm giữa A và P đồng thời $DA.DP = DB.DC$. Đường tròn (T) đi qua hai điểm A và D lần lượt cắt cạnh AB, AC tại F và E.

a) Chứng minh rằng tứ giác ABPC nội tiếp.

Ta có $DA.DP = DB.DC$ nên $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{DC}{DP}$. Mà ta lại có $\widehat{ADB} = \widehat{CDP}$ nên hai tam giác ADB và CDP đồng dạng. Suy ra $\widehat{DAB} = \widehat{DCP}$ nên tứ giác $ABPC$ nội tiếp. b) Chứng minh rằng hai tam giác DEF và PCB đồng dạng. Ta có $\widehat{DAF} = \widehat{DEF}; \widehat{BAP} = \widehat{BCP}$ nên ta suy ra được $\widehat{DEF} = \widehat{BCP}$ Chứng minh tương tự $\widehat{CBP} = \widehat{DFE}$. Từ đó suy ra hai tam giác DEF và PCB đồng dạng.	

c) Chứng minh rằng $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} \le \dfrac{EF^2}{4AD^2}$ ($S_{ABC}; S_{DEF}$ lần lượt là diện tích của tam giác $ABC; DEF$).

Ta có $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{DEF}}{S_{PBC}}.\dfrac{S_{PBC}}{S_{ABC}} = \dfrac{EF^2}{BC^2}.\dfrac{S_{PBC}}{S_{ABC}}$ (vì hai tam giác PCB, DEF đồng dạng)

Kẻ $AH \perp BC\left(H \in BC\right); PK \perp BC\left(K \in BC\right)$ ta có $\dfrac{S_{PCB}}{S_{ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}PK.BC}{\frac{1}{2}AH.BC} = \dfrac{PK}{AH} = \dfrac{DP}{DA}$ (vì AH song song với PK)

Từ hai kết quả trên ta được $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{EF^2}{BC^2}.\dfrac{DP}{DA}$

Ta lại có $BC^2 = \left(DB + DC\right)^2 \ge 4DB.DC = 4DA.DP$

Suy ra $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} \le \dfrac{EF^2}{4DA.DP}.\dfrac{DP}{DA} = \dfrac{EF^2}{4AD^2}$. Dấu bằng xảy ra khi D là trung điểm của BC.

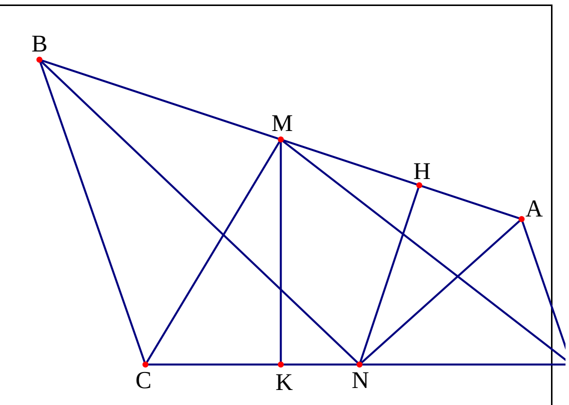
Câu 5(1.5 điểm).

a) Cho tứ giác ABCD có đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường thẳng CD. Chứng minh rằng nếu AD song song với BC thì đường tròn đường kính CD tiếp xúc với đường thẳng AB.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của N, M trên AB, CD. Nếu AD song song với BC thì $ABCD$ là hình thang có MN là đường trung bình, Khi đó MN, AD, BC song song với nhau

Suy ra, $S_{MAD} = S_{NAD}; S_{MBC} = S_{NBC}$

Nên ta được $S_{NAB} = S_{ABCD} - S_{NAD} - S_{NBC} = S_{ABCD} - S_{MAD} - S_{MBC} =$



Do đó suy ra $\frac{1}{2}AB.NH = \frac{1}{2}CD.MK.$	

Mặt khác đường tròn đường kính AB tiếp xúc với CD nên $MA = MB = MK = \frac{1}{2}AB.$

Suy ra $NH = \frac{1}{2}CD = ND = NC.$

Do đó H thuộc đường tròn đường kính CD mà $NH \perp AB$ nên AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD.

b) Trên một bảng vuông $4x4$ (gồm 16 ô vuông), ban đầu người ta ghi 9 số 1 và 7 số 0 một cách tùy ý (mỗi ô một số). Với mỗi phép biến đổi bảng, cho phép chọn một hàng hoặc một cột bất kì, trên hàng hoặc cột được chọn, đổi đồng thời các số 0 thành các số 1, các số 1 thành các số 0. Chứng minh rằng sau 2016 phép biến đổi như vậy, ta không thể đưa bảng ban đầu về bảng chỉ có các số 0.

- **Lời giải.** Giả sử hàng (hoặc cột) được đổi có m số $1\left(0 \le m \le 4\right)$ và $4-m$ số 0. Sau một phép biến đổi thì hàng (hoặc cột) thu được có $4-m$ số 1 và m số 0. Do đó sau một phép biến đổi thì số chữ số 1 tăng lên hoặc giảm đi $\left|\left(4-m\right)-m\right| = \left|4-2m\right|$ số (là số chẵn).

Mà ban đầu số số 1 là 9 nên sau 2016 phép biến đổi không thể đưa bảng ban đầu về bảng chỉ có các số 0.

Đề số 5

Câu 1(2.5 điểm).

a) Phân tích đa thức $P\left(x\right) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$ thành nhân tử.

$P\left(x\right) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - \left(x^2 + 5x + 6\right) = \left(x^2 + 5x + 6\right)\left(x^2 - 1\right) = \left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right).$

b) Rút gọn biểu thức $Q = \dfrac{\sqrt{x - \sqrt{4\left(x-1\right)}} + \sqrt{x + \sqrt{4\left(x-1\right)}}}{\sqrt{x^2 - 4\left(x-1\right)}} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{x-1}\right)$ với $x > 1$ và $x \ne 2$

.

$$Q=\frac{\sqrt{(x-1)-\sqrt{4(x-1)}+1}+\sqrt{(x-1)+\sqrt{4(x-1)}+1}}{\sqrt{(x-2)^2}}\cdot\frac{x-2}{x-1}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}}\cdot\frac{x-2}{x-1}=\frac{\left|\sqrt{x-1}-1\right|+\sqrt{x-1}+1}{|x-2|}\cdot\frac{x-2}{x-1}$$

+ Nếu $1<x<2$ thì $Q=\frac{1-\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}+1}{2-x}\cdot\frac{x-2}{x-1}=\frac{2}{1-x}$.

+ Nếu $x>2$ thì $Q=\frac{\sqrt{x-1}-1+\sqrt{x-1}+1}{x-2}\cdot\frac{x-2}{x-1}=\frac{2}{\sqrt{x-1}}$.

Câu 2(2.0 điểm).

a) Giải phương trình $2(2x-1)-3\sqrt{5x-6}=\sqrt{3x-8}$.

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge\frac{8}{3}$. Biến đổi phương trình đã cho ta được

$$2(2x-1)-3\sqrt{5x-6}=\sqrt{3x-8}\Leftrightarrow 4(2x-1)-6\sqrt{5x-6}=2\sqrt{3x-8}$$
$$\Leftrightarrow\left[(5x-6)-6\sqrt{5x-6}+9\right]+\left[(3x-8)-2\sqrt{3x-8}+1\right]=0$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{5x-6}-3\right)^2+\left(\sqrt{3x-8}-1\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{5x-6}-3=0\\\sqrt{3x-8}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta có nghiệm duy nhất là $x=3$.

b) Cho bốn số thực a, b, c, d khác 0 thỏa mãn các điều kiện a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2-10cx-11d=0$ và c, d là hai nghiệm của phương trình $x^2-10ax-11b=0$. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c+d$.

• **Lời giải.** Vì a, b là hai nghiệm của $x^2-10cx-11d=0$ nên theo hệ thức Vi – et ta có $\begin{cases}a+b=10c\\ab=-11d\end{cases}$

Vì c, d là hai nghiệm của $x^2-10ax-11b=0$ nên theo hệ thức Vi – et ta có $\begin{cases}c+d=10a\\cd=-11b\end{cases}$

Từ các hệ thức trên ta có $9(a+c)=b+d\Rightarrow S=10(a+c)$

Cũng từ $ab=-11d$ và $cd=-11b$ nên ta có $ac=121$.

Mà a là nghiệm của phương trình $x^2-10cx-11d=0$ nên $a^2-10ac-11d=0$ và c là nghiệm của phương trình $x^2-10ax-11b=0$ nên $c^2-10ac-11b=0$. Từ đó duy ra

$$a^2+c^2-20ac-11\left(b+d\right)=0 \Leftrightarrow \left(a+c\right)^2-22ac-99\left(a+c\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(a+c\right)^2-99\left(a+c\right)-2662=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+c=-22 \\ a+c=121 \end{array}\right.$$

+ Với $a+c=-22 \Rightarrow S=-220$.

+ Với $a+c=121 \Rightarrow S=1210$.

Câu 3(1.0 điểm). Cho ba số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{3a^4+3b^4+c^3+2}{\left(a+b+c\right)^3}$$

• **Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $2a^4+\left(a^4+1\right)\ge 2a^4+2a^2\ge 4a^3$ hay ta được $3a^4+1\ge 4a^3$. Hoàn toàn tương tự ta được $3b^4+1\ge 4b^3$

Do đó suy ra $M\ge \dfrac{4a^3+4b^3+c^3}{\left(a+b+c\right)^3}$. Mà $\left(a-b\right)^2\left(a+b\right)\ge 0 \Rightarrow 4\left(a^3+b^3\right)\ge \left(a+b\right)^3$

Nên ta được $M\ge \dfrac{\left(a+b\right)^3+c^3}{\left(a+b+c\right)^3}\ge \dfrac{\left(a+b+c\right)^3}{4\left(a+b+c\right)^3}=\dfrac{1}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=1;c=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{1}{4}$, xẩy ra tại $a=b=1;c=2$.

Câu 4(3.0 điểm). Trên đường tròn $\left(C\right)$ tâm O, bán kính R vẽ dây cung $AB<2R$. Từ A, B vẽ hai tiếp tuyến $Ax;By$ với đường tròn $\left(C\right)$. Lấy điểm M bất kì thuộc cung nhỏ AB (M không trùng với A và B). Gọi H, K, I lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ M xuống AB, Ax và By.

a) Chứng minh $MH^2 = MK.MI$.

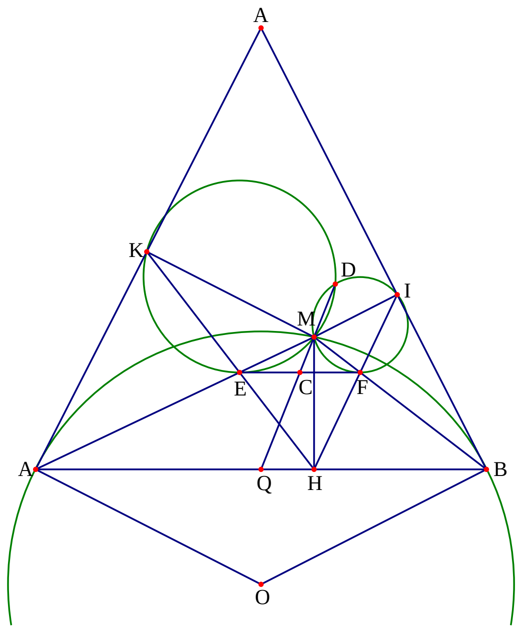
Ta có các tứ giác $AHMK; BHMI$ nội tiếp đường tròn và $Ax; By$ là tiếp tuyến của $(O; R)$ nên ta có

$$\widehat{MIH} = \widehat{MBH} = \widehat{MAK} = \widehat{MHK}$$

Hoàn toàn tương tự $\widehat{MKH} = \widehat{MHI}$.

Do đó suy ra $\Delta MIH \backsim \Delta MHK$ nên ta được $\dfrac{MI}{MH} = \dfrac{MH}{MK} \Rightarrow MH^2 = MI.MK$.

b) Gọi E là giao điểm của AM và KH, F là giao điểm của BM và HI. Chứng minh đường thẳng EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác MEK và MFI.



Theo chứng minh trên ta có $\widehat{MBA} = \widehat{MHK}; \widehat{MHI} = \widehat{MAB}.$

Nên ta được $\widehat{EHF} + \widehat{EMF} = 180^0$ do đó tứ giác MEHF nội tiếp đường tròn.

Suy ra $\widehat{EHM} = \widehat{EFM}$. Mà ta lại có $\widehat{EHM} = \widehat{HBM} = \widehat{HIM} \Rightarrow \widehat{EFM} = \widehat{FIM}$

Từ đó suy ra EF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MFI.

Tương tự EF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MEK.

Vậy EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn nói trên.

c) Gọi D là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác MEK và MFI. Chứng minh rằng khi M di chuyển trên cung nhỏ AB thì đường thẳng DM luôn đi qua một điểm cố định.

Ta có $\widehat{MFE} = \widehat{MHE} = \widehat{MBH} \Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{MBH}$ nên EF song song với AB

Gọi C là giao điểm của DM và EF, Q là giao điểm của DM và AB. Vì EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác MEK và MFI nên

$CE^2 = CM.CD; CF^2 = CM.CD \Rightarrow CE = CF$

Mà $\frac{CE}{QA}=\frac{MC}{MQ}=\frac{CF}{QB}\Rightarrow QA=QB$. Vậy Q là trung điểm của đoạn AB cố định nên Q là điểm cố định.

Câu 5(1.5 điểm).

a) Tìm ba số nguyên tố a, b, c thỏa mãn các điều kiện $a<b<c$ và $(bc-1)$ chia hết cho a, $(ca-1)$ chia hết cho b, $(ab-1)$ chia hết cho c.

- **Lời giải.** Do a, b, c là ba số nguyên tố thỏa mãn $a<b<c$ nên $a\ge 2,b\ge 3,c\ge 5$. Từ đó ta suy ra được $ab+bc+ca-1>0$. Từ giả thiết ta lại có $(ab-1)\vdots c$ nên $(ab+bc+ca-1)\vdots c$.

Tương tự $(ab+bc+ca-1)\vdots a,\ (ab+bc+ca-1)\vdots b$.

Vì a, b, c là 3 số nguyên tố phân biệt nên a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau do đó

$$(ab+bc+ca-1)\vdots abc\Rightarrow ab+bc+ca-1\ge abc$$

Nếu $a\ge 2$ ta có $abc\ge 3bc>ab+bc+ca>ab+bc+ca-1$ (mâu thuẫn). Do đó $a=2$.

Khi đó $(2b-1)\vdots c,(2c-1)\vdots b$. Tương tự suy ra $(2b+2c-1)\vdots bc$ nên $2b+2c-1\ge bc$.

Nếu $b\ge 5$ ta có $bc\ge 5c>2b+2c-1$ (mâu thuẫn). Do đó $b=3$.

Suy ra, $ab-1=5\vdots c$ nên $c=5$

Thử lại $a=2;b=3;c=5$ thỏa mãn bài toán. Vậy $a=2;b=3;c=5$.

b) Các nhà khoa học gặp nhau tại một hội nghị. Một số người là bạn của nhau. Tại hội nghị không có hai nhà khoa học nào có số bạn bằng nhau lại có bạn chung. Chứng minh rằng có một nhà khoa học chỉ có đúng một người bạn.

- **Lời giải.** Gọi k là số bạn của nhà khoa học có nhiều bạn nhất tại hội nghị. Nếu có hai hoặc nhiều hơn nhà khoa học có số lượng bạn bằng k thì ta lấy một người bất kì. Giả sử đó là nhà khoa học A. Gọi các bạn của nhà khoa học A là $A_1,A_2,...,A_k$.

Tất cả các nhà khoa học $A_1,A_2,...,A_k$ không ai có nhiều hơn k người bạn vì ta giả thiết k lớn nhất và ai cũng có ít nhất một bạn là A, cũng không có người nào trong số $A_1,A_2,...,A_k$ có số bạn bằng nhau vì theo giả thiết thì đã có bạn chung A thì không thể có số bạn bằng nhau.

Suy ra, $A_1, A_2, ..., A_k$ chỉ có thể có số bạn là $1, 2, ..., k$. Tức là có một người trong $A_1, A_2, ..., A_k$ chỉ có đúng một bạn (đó chính là A).

Đề số 6

Câu 1. 1) Ta có $a_1 = 1+\sqrt{2}; a_2 = 1-\sqrt{2} \Rightarrow a_1 + a_2 = 2$

2) Hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ 4x-2y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=-5 \\ x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm (x, y) = (-1; 1)

Câu 2.

1) Ta có: $A = \dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-2\right)-\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+2\right)+4\sqrt{a}-1}{a-4}.\left(\sqrt{a}+2\right)$

$= \dfrac{a-2\sqrt{a}-a-2\sqrt{a}+4\sqrt{a}-1}{a-4}.\left(\sqrt{a}+2\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{a}-2}$

2) Ta có $a = 6+4\sqrt{2} = \left(2+\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{a} = 2+\sqrt{2}$

Khi đó: $A = \dfrac{1}{2-\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2-2-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{-\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 3.

1) Với m = 2, phương trình (1) trở thành $x^2-3x+2=0$

Ta có a + b + c = 1 – 3 + 2 = 0 nên phương trình có 2 nghiệm x = 1; x = 2

2) Ta có $\Delta = \left(2m-1\right)^2 - 4\left(m^2-m\right) = 4m^2-4m+1-4m^2+4m = 1 > 0 \quad \forall m$

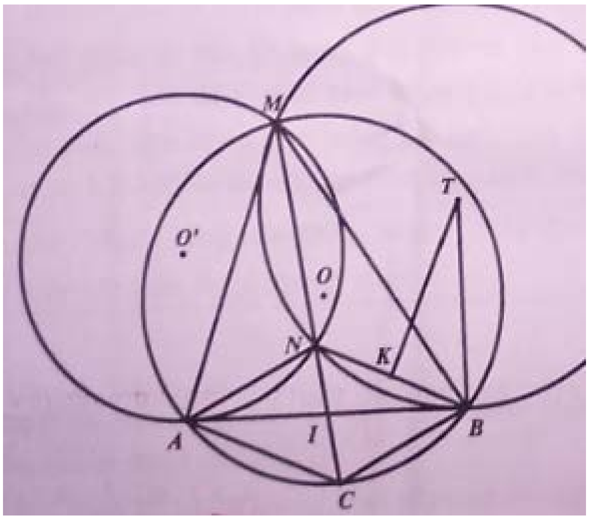
Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

3) Theo câu 2 phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$x_1 = m-1; x_2 = m \left(do\ m-1 < m \ \forall m\right)$

Khi đó $x_1^2 - 2x_2 + 3 = \left(m-1\right)^2 - 2m + 3 = m^2 - 4m + 4 = \left(m-2\right)^2 \geq 0 \quad \forall m.$

Câu 4.



1) Xét tam giác BIC và AIN có $\angle BIC = \angle AIN$ (đối đỉnh); IA = IB (1)
Mặt khác AB là tiếp tuyến của (O′) suy ra $\angle AMC = \angle BAN$ (góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến và một dây cung chắn cùng một cung)

Mà $\angle AMC = \angle ABC$ (góc nội tiếp chắn cùng một cung), suy ra $\angle BAN = \angle ABC \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta BIC = \Delta AIN\,(c.g.c) \quad (3)$

Từ (3) suy ra $IC = IN$. Tứ giác $ANBC$ có hai đường chéo AB, NC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra ANBC là hình bình hành.

2) Do ANBC là hình bình hành, suy ra $\angle CAB = \angle ABN$
Mặt khác $\angle CMB = \angle CAB \quad (2)$ (góc nội tiếp chắn cùng một cung) $\Rightarrow \angle ABN = \angle CMB \quad (1)$

Xét đường tròn (T) ngoại tiếp tam giác BMN, vẽ $TK \perp NB$ tại K$\Rightarrow \angle BTK = \angle BMN \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $\angle BTK = \angle ABN$.

Do vậy $\angle ABN + \angle NBT = \angle NBT + \angle BTK = 90^o \Rightarrow AB \perp BT \Rightarrow BI$ là tiếp tuyến của đường tròn (T)

3) Ta có $S_{ANBC} = 2.S_{\Delta ABC} = AB.h$ (h là độ dài đường cao hạ từ C xuống cạnh AB của tam giác ABC, AB không đổi)
S_{ANBC} lớn nhất khi và chỉ khi h lớn nhất nên C là điểm chính giữa cung nhỏ AB, suy ra M là điểm chính giữa cung lớn AB.

Câu 5.

1) Điều kiện $x^2 - 1 \geq 0. Do\ x > 0$ nên $1 + x + \sqrt{x^2 - 1} > 0; 1 + x - \sqrt{x^2 - 1} > 0$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số, ta có:

$$\left(1+x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2015}+\left(1+x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2015}\geq 2\sqrt{\left(1+x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2015}.\left(1+x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2015}}=2\sqrt{\left(2+2x\right)^{2015}}$$

$$\geq 2\sqrt{\left(2+2\right)^{2015}}=2^{2016}\quad (do\ x\geq 1).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = 1. Thử lại thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm dương x = 1.

2) Ta xét 1 điểm bất kì trong 2015 điểm, giả sử điểm A:

*) TH1: Nếu tất cả 2014 điểm còn lại đều có khoảng cách đến A nhỏ hơn 1, tức là đều nằm trong hình tròn tâm A bán kính 1, kí hiệu (A; 1) thì bài toán đúng.

*) TH2: Nếu tồn tại 1 điểm có khoảng cách đến A không nhỏ hơn 1, chẳng hạn là điểm B. Khi đó ta xét 2 hình tròn (A;1) và (B;1).

Xét điểm C bất kì trong 2013 điểm còn lại, do AB ≥ 1 nên AC < 1 hoặc BC < 1. Do đó C phải nằm tròng (A;1) hoặc (B;1). Như vậy, 2013 điểm còn lại phải nằm trong một trong hai hình tròn trên. Theo nguyên lý Dirichle có ít nhất 1007 điểm nằm trong cùng một hình tròn, giả sử là hình tròn (A;1).

Mà điểm A cũng nằm trong chính (A;1). Do đó (A;1) chứa ít nhất 1008 điểm.

Vậy bài toán được chứng minh.

Đề số 7

Câu 2.

1) Ta có: $x^2+\frac{1}{x^2}=7\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=3\quad\left(do\ x>0\right)$

Khi đó:

$$A=x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)=3.\left(7-1\right)=18$$

$$B=x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=7.18-3=56-3=53$$

2) $\begin{cases}x\left(x+3y\right)=4\\4y^2=5-xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+3xy=4\\4y^2+xy=5\end{cases}\Rightarrow x^2+4xy+4y^2=9\Rightarrow\left(x+2y\right)^2=9\Leftrightarrow x+2y=\pm 3$

Câu 3.

1) Ta có:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\geq\left(ax+by\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2\geq a^2x^2+2abxy+b^2y^2$$

$$\Leftrightarrow a^2y^2-2abxy+b^2x^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ay-bx)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng các phép biến đổi là tương đương nên ta bài toán được chứng minh.

2) Ta có:

$$T=\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}.\left(\frac{\sqrt{y+z}}{x}+\frac{\sqrt{x+z}}{y}+\frac{\sqrt{x+y}}{z}\right)$$

$$=(y+z).\frac{\sqrt{(x+y)(z+x)}}{x}+(x+z).\frac{\sqrt{(x+y)(y+z)}}{y}+(x+y)\frac{\sqrt{(y+z)(z+x)}}{z}$$

Áp dụng bất đẳng thức ở câu a ta được:

$$(y+z).\frac{\sqrt{(x+y)(z+x)}}{x}\ge(y+z)\frac{\sqrt{xz}+\sqrt{xy}}{x}=(y+z).\frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{x}}=(x+y+z).\frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{x}}-\left(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{z}{x}}\right)-\left(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}\right)$$

Tương tự:

$$(x+z).\frac{\sqrt{(x+y)(y+z)}}{y}\ge\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{z}{y}}\right)-\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}\right)$$

$$(x+y)\frac{\sqrt{(y+z)(z+x)}}{z}\ge\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{x}{z}}+\sqrt{\frac{y}{z}}\right)-\left(\sqrt{xz}+\sqrt{zy}\right)$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$T\ge\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{x}{z}}+\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{y}{z}}+\sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{\frac{z}{y}}\right)-2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)$$

$$=\sqrt{2}.\left[\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{z}}+\sqrt{\frac{z}{x}}\right)+\left(\sqrt{\frac{x}{z}}+\sqrt{\frac{z}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\right]-2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)$$

$$\ge\sqrt{2}.\left[3.\sqrt[3]{\sqrt{\frac{x}{y}}.\sqrt{\frac{y}{z}}.\sqrt{\frac{z}{x}}}+3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{x}{z}}.\sqrt{\frac{z}{y}}.\sqrt{\frac{y}{x}}}\right]-2(x+y+z)$$

$$=\sqrt{2}.6-2.\sqrt{2}$$

$$=4\sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $4\sqrt{2}$

Câu 5.

a) Đặt $x^2+3y=k^2$ và $y^2+3x=t^2$ $(t,k\in Z)$

Lại có $x^2+3x>x^2+3y>x^2$ hay $(x+2)^2>k^2>x^2$ suy ra $k^2=(x+1)^2$

Hay $x^2+3y=x^2+2x+1 \Leftrightarrow x=\dfrac{3y-1}{2}$

Thay vào ta được $2y^2+9y-3=2t^2$

Suy ra $(x,y)=(1;1);(11;16);(16;11)$

b) Dễ thấy tổng trên là số chẵn, nên xóa đi 2 số và viết đè lên là (a + b) = (a – b) + 2b hoặc (a – b) = (a + b) – 2b nghĩa là số bé hơn tổng hai số vừa viết là 2b là số chẵn Cứ tiếp tục như vậy cuống cũng sẽ được số chẵn mà 2017 là số lẻ nên không số còn lại không thể là 2017.

Đề số 8

Câu I. ***(1, 5 điểm)***

1) GPT khi m =1

+ Thay m =1 v ào (1) ta được $x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-2)=0 \Leftrightarrow x = \{-4;2\}$

KL : Phương trình có 2 nghiệm phân biệt x = 4 hoặc x = 2

2) xét PT (1) : $x^2+2mx-2m-6=0$ (1) , với ẩn x , tham số m .

+ Xét PT (1) có $\Delta'_{(1)}=m^2+2m+6=(m+1)^2+5>0$ (luôn đúng) với mọi m => PT (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 ; x_2 với mọi m

+ Mặt khác áp dụng hệ thức viét vào PT (1) ta có : $\begin{cases} x_1+x_2=-2m \\ x_1x_2=-(2m+6) \end{cases} (I)$

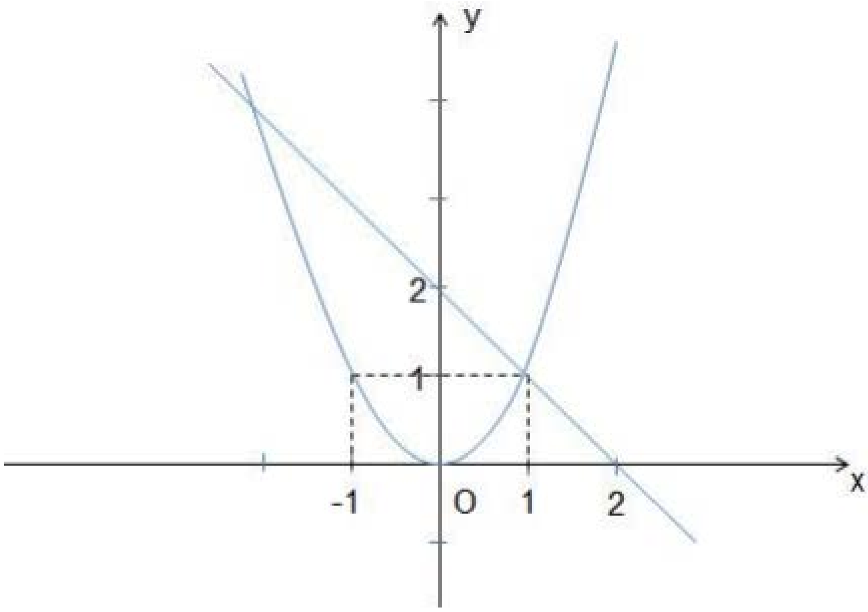
+ Lại theo đề và (I) có :A = $x_1^2+x_2^2$ = $(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-2m)^2 + 2(2m+6) = 4m^2 + 4m + 12$

= $(2m+1)^2 + 11 \geq 11$ với mọi m => Giá trị nhỏ nhất của A là 11 khi m = $-\dfrac{1}{2}$

KL : m = $-\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu II. ***(1,5 điểm)***

1) Lập bảng giá trị và vẽ đồ thị hàm số:



Dựa vào đồ thị ta có giao điểm của d và (P) là 2 điểm M (1 ; 1); N (-2 ; 4)
2) Do đồ thị Δ của hàm số y = ax + b song song với (d) y = -x + 2

Nên ta có: a = -1.

Δ cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng – 1 nên ta thay x = -1 vào pt (P) ta được: y = 1

Thay x = -1; y = 1 vào pt Δ ta được a = -1 ; b = 0

=>Phương trình của Δ là y = - x

Câu III .*(2,0 điểm)*
1) Đổi 30 phút = ½ giờ

Gọi x (km /h) là vận tốc người đi xe đạp t ừ A -> B (x > 0) .

Vận tốc người đó đi từ B-> A là: x + 4 (km/h)

Thời gian người đó đi từ A -> B là: $\frac{24}{x}$

Thời gian người đố đi từ B về A là: $\frac{24}{x+4}$

Theo bài ra ta có:

$$\frac{24}{x}-\frac{24}{x+4}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{48(x+4)}{2x(x+4)}-\frac{48x}{2x(x+4)}=\frac{x(x+4)}{2x(x+4)}\Leftrightarrow x^2+4x-192=0$$

=> x = 12 (t/m) . KL : Vậy vận tốc của người đi xe đáp từ A đến B là 12 km/h.

2) ĐKXĐ $0\le x\le 1$ Đặt $0 < a = \sqrt{x}+\sqrt{1-x}\Rightarrow\frac{a^2-1}{2}=\sqrt{x(1-x)}$

+ PT mới là : a + $\frac{a^2-1}{2}=1 \Leftrightarrow a^2+2a-3=0 \Leftrightarrow (a-1)(a+3)=0$

⇔ a = { -3 ; 1 } => a = 1 > 0

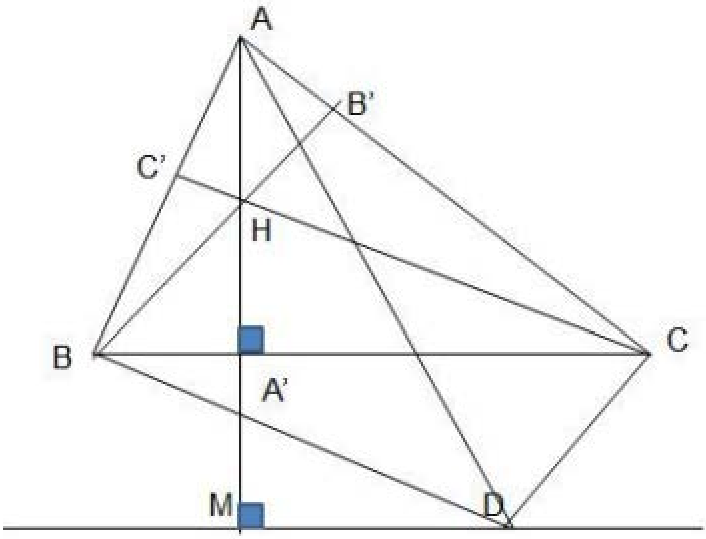
$$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=1$$

+ Nếu a = 1 = > $\Leftrightarrow x+1-x+2\sqrt{x(1-x)}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x(1-x)}=0$

⇨ x = { 0 ; 1 } (t/m)

KL : Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt là x = 0; x = 1

Câu IV . *(3,0 điểm)*



1) Chứng minh các tứ giác ABMD , AMDC nội tiếp

Do BHCD là hình bình hành nên:

Ta có: BD//CC' => BD ⊥ AB => ABD = 90°

Có:AA' ⊥ BC nên: MD ⊥ AA' => AMD = 90°

=> ABD + AMD = 180°

=> tứ giác ABMD nội tiếp đường tròn đường kính AD.

Chứng minh tương tự ta có tứ giác AMDC nội tiếp đường tròn đường kính AD.

=> A, B ,C,D , M nằm trên cùng một đường tròn

2) Xét (O) có dây MD//BC => sđ cung MB = sđ cung CD => dây MB = dây CD hay BM = CD

+ Theo phần 1) và BC//MD => góc BAM =góc OAC

3)Chứng minh OK là đường trung bình của tam giác AHD => OK//AH và OK = $\frac{1}{2}$ AH hay $\frac{OK}{AH}=\frac{1}{2}$ (*)

+ Chứng minh tam giác OGK đồng dạng với tam giác HGA => $\frac{OK}{AH}=\frac{1}{2}=\frac{GK}{AG}\Rightarrow AG=2GK$, từ đó suy ra G là trọng tâm của tam giác ABC

Câu V .*(2, 0 điểm)*

1) Giá trị nhỏ nhất của P là 2011 khi a =b = 1

$4P = a^2 - 2ab + b^2 + 3(a^2 + b^2 + 4 + 2ab - 4a - 4b) + 4.2014 - 12$

$= (a-b)^2 + 3(a + b - 2)^2 + 8044 \geq 8044$

$\Rightarrow P \geq 2011$

Dâu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a+b-2=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2011 khi và chỉ khi a = b = 1.

2) Gọi 6 thành phố đã cho là A,B,C,D,E,F

+ Xét thành phố A .theo nguyên l í Dirichlet ,trong 5 thành phố còn lại thì có ít nhất 3 thành phố liên lạc được với A hoặc có ít nhất 3 thành phố không liên lạc được với A (vì nếu số thành phố liên lạc được với A cũng không vượt quá 2 và số thành phố không liên lạc được với A cũng không vượt quá 2 thì ngoài A , số thành phố còn lại cũng không vượt quá 4) . Do đó chỉ xảy ra các khả năng sau :

• Khả năng 1 :

số thành phố liên lạc được với A không ít hơn 3 , giả sử B,C,D liên lạc được với A . Theo đề bài trong 3 thành phố B,C,D có 2 thành phố liên lạc được với nhau . Khi đó 2 thành phố này cùng với A tạo thành 3 thành phố đôi một liên lạc được với nhau .

• Khả năng 2 :
số thành phố không liên lạc được với A , không ít hơn ,giả sử 3 thành phố không liên lạc được với A là D,E,F . Khi đó trong bộ 3 thành phố (A,D,E) thì D và E liên lạc được với nhau (v ì D,E không liên lạc được với A)

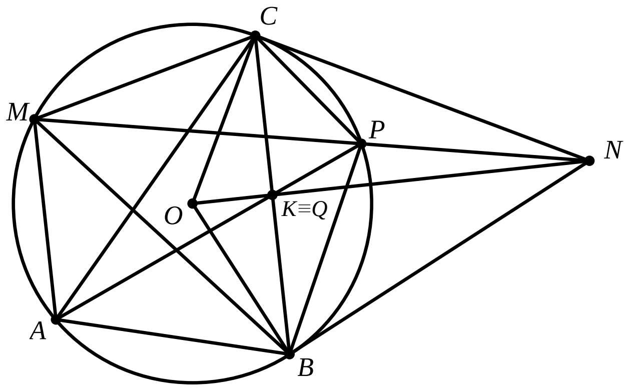
Tương tự trong bộ 3 (A,E,F) v à (A,F,D) th ì E,F liên lạc được với nhau , F và D liên lạc được với nhau và như vậy D,E,F l à 3 thành phố đôi một liên lạc được với nhau .

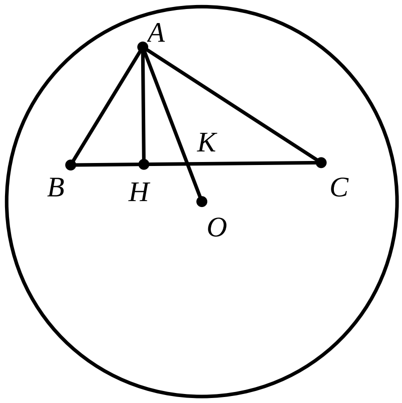
Vậy ta có ĐPCM

Đề số 9

Câu	Đáp án	Điểm
I.1 **(1,0 điểm)**		
	$P=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}+x)}{1-\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\right)^2$	0,5
	$=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(1+\sqrt{x}+x+\sqrt{x}\right)\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)^2\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=\sqrt{x}-1$.	0,5
I.2 **(1,0 điểm)**		
	Ta có $\dfrac{2}{P}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\sqrt{x}-1$ là ước của 2 gồm: $\pm1,\pm2$.	0,5
	Từ đó tìm được $x\in\{0,4,9\}$.	0,5
II.1 **(1,0 điểm)**		
	ĐK: $xyzabc\neq0$. Từ $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0\Leftrightarrow\dfrac{ayz+bxz+cxy}{xyz}=0\Leftrightarrow ayz+bxz+cxy=0$.	0,25
	Ta có $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1\Rightarrow\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2=1\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}+2\left(\dfrac{xy}{ab}+\dfrac{xz}{ac}+\dfrac{yz}{bc}\right)=1$	0,5
	$\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}+2\dfrac{cxy+bxz+ayz}{abc}=1\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.	0,25
II.2 **(1,0 điểm)**		
	$\Delta=4a^2+16a-151$. PT có nghiệm nguyên thì $\Delta=n^2$ với $n\in\mathbb{N}$.	0,25

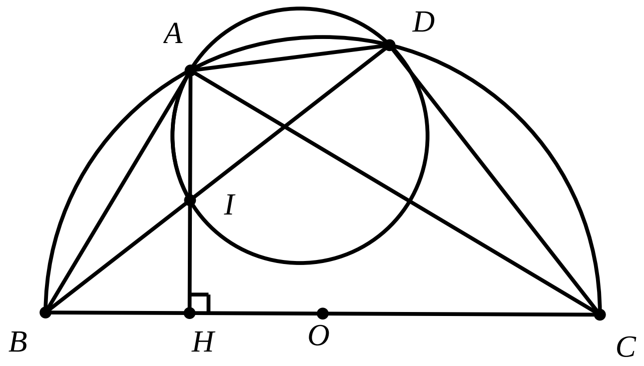
	Hay $4a^2+16a-151=n^2 \Leftrightarrow (4a^2+16a+16)-n^2=167 \Leftrightarrow (2a+4+n)(2a+4-n)=167.$	
	Vì 167 là số nguyên tố và $2a+4+n \geq 2a+4-n$ nên ta có các trường hợp: +) $\begin{cases}2a+4+n=167\\2a+4-n=1\end{cases} \Rightarrow 4a+8=168 \Rightarrow a=40$ (t/m). +) $\begin{cases}2a+4+n=-1\\2a+4-n=-167\end{cases} \Rightarrow 4a+8=-168 \Rightarrow a=-44$ (t/m).	0,5
	Với $a=40$ thì PT có hai nghiệm nguyên là $x=0, x=83$. Với $a=-44$ thì PT có hai nghiệm nguyên là $x=-1, x=-84$.	0,25
III.1 **(*0,5 điểm*)**		
	Từ (1) có $x=3m-my$, thay vào (2) ta có $y=2; x=m.$	0,25
	$x^2-2x-y=m^2-2m-2=(m-1)^2-3>0 \Leftrightarrow \lvert m-1\rvert > \sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1+\sqrt{3} \\ m<1-\sqrt{3}. \end{array}\right.$	0,25
III.2 **(*1,0 điểm*)**		
	Chứng minh được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}, \forall x,y>0$ dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$. Từ giả thiết ta có $a+b-c>0, b+c-a>0, c+a-b>0$.	0,25
	Ta có $S=\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\right)+2\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+b-c}\right)+3\left(\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\right) \geq \frac{2}{c}+\frac{4}{b}+\frac{6}{a}$ Mà $2c+b=abc \Leftrightarrow \frac{2}{b}+\frac{1}{c}=a$ nên $S \geq 2a+\frac{6}{a} \geq 4\sqrt{3}$.	0,5
	Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $4\sqrt{3}$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}.$	0,25
IV.1 **(*1,0 điểm*)**		

	Ta có $NB = NC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau); $OB = OC = R$. Do đó, ON là trung trực của BC. Gọi K là giao điểm của ON và BC thì K là trung điểm của BC.		0,5
	Mà ΔOBN vuông tại B, BK là đường cao nên $\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{NC^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{NB^2}=\frac{1}{BK^2}$. Kết hợp giả thiết suy ra $BK^2=16 \Rightarrow BK=4 \Rightarrow BC=8$.		0,5
IV.2 ***(1,0 điểm)***			
	Ta có $\Delta NBP, \Delta NMB$ đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \frac{PB}{MB}=\frac{NB}{NM}$ (1). Tương tự, $\Delta NCP, \Delta NMC$ đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \frac{PC}{MC}=\frac{NC}{NM}$ (2).		0,25
	Vì $NC = NB$ (3) nên từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{PB}{MB}=\frac{PC}{MC}$ (4).		0,25
	Mặt khác, $AM // BC \Rightarrow$ Tứ giác $AMCB$ là hình thang cân $\Rightarrow MC = AB, MB = AC$ (5). Từ (4), (5) $\Rightarrow \frac{PB}{AC}=\frac{PC}{AB}$.		0,5
IV.3 ***(1,0 điểm)***			
	Gọi Q là giao điểm của AP và BC. Ta chứng minh $BQ = QC$. Vì $\Delta BQP, \Delta AQC$ đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \frac{BQ}{AQ}=\frac{PB}{AC}$ (6).		0,25
	Tương tự $\Delta CQP, \Delta AQB$ đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \frac{CQ}{AQ}=\frac{PC}{AB}$ (7).		0,25
	Kết hợp (6), (7) và kết quả câu b) ta suy ra $\frac{BQ}{AQ}=\frac{CQ}{AQ} \Rightarrow BQ = CQ \Rightarrow Q$ là trung điểm		0,5

	của BC. Suy ra $Q \equiv K$. Vậy BC, ON, AP đồng quy tại K.	
V.1 **(0,5 điểm)**		
	Giả sử O nằm ngoài miền tam giác ABC. Không mất tính tổng quát giả sử A và O nằm về hai phía của đường thẳng BC. Suy ra đoạn AO cắt đường thẳng BC tại K. Kẻ AH vuông góc với BC tại H. Suy ra, $AH \le AK < AO < 1$ suy ra $AH < 1$.	0,25
	Suy ra, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AH.BC}{2} < \dfrac{2.1}{2} = 1$ (mâu thuẫn với giả thiết). Suy ra điều phải chứng minh. 	0,25
V.2 **(1,0 điểm)**		
	Nếu a,b chẵn thì a^2+b^2 là hợp số. Do đó nếu tập con X của A có hai phần tử phân biệt a,b mà a^2+b^2 là một số nguyên tố thì X không thể chỉ chứa các số chẵn. Suy ra, $k \ge 9$. Ta chứng tỏ $k=9$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm. Điều đó có ý nghĩa là với mọi tập con X gồm 9 phần tử bất kỳ của A luôn tồn tại hai phần tử phân biệt a,b mà a^2+b^2 là một số nguyên tố.	0,5
	Để chứng minh khẳng định trên ta chia tập A thành các cặp hai phần tử phân biệt a,b mà a^2+b^2 là một số nguyên tố, ta có tất cả 8 cặp: $(1;4),(2;3),(5;8),(6;11),(7;10),(9;16),(12;13),(14;15)$. Theo nguyên lý Dirichlet thì 9 phần tử của X có hai phần tử cùng thuộc một cặp và ta có điều phải chứng minh.	0,5

Đề số 10

Câu	Lời giải sơ lược	Điểm
1 (**2,0 *điểm***)	**a) (*0,5 điểm*)**	
	Ta có $2x=3$	***0,25***
	$\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$	***0,25***
	b) (*0,5 điểm*)	
	$\sqrt{x-5}$ xác định khi $x-5\ge 0$	***0,25***
	$\Leftrightarrow x\ge 5$	***0,25***
	c) (*1,0 điểm*)	
	A= $\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}.\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}$	***0,5***
	$=\sqrt{2}.\sqrt{2}=2$	***0,5***
2 (**1,0 *điểm***)	**a) (*1,0 điểm*)**	
	Vì đồ thị hàm số (1) đi qua $A(1;4)$ nên $4=m+1\Leftrightarrow \text{m}=3$ Vậy $m=3$ đồ thị hàm số (1) đi qua $A(1;4)$.	***0,5***
	Vì $m=3>0$ nên hàm số (1) đồng biến trên $\mathbb{R}$.	***0,5***
	b) (*1,0 điểm*)	
	Đồ thị hàm số (1) song song với d khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2=m \\ m+1\ne 1 \end{cases}$	***0,5***
	$\Leftrightarrow m=1$. Vậy $m=1$ thỏa mãn điều kiện bài toán.	***0,5***
3 (**1,5 *điểm***)		
	Gọi vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là x km/h, $x>0$.	***0,25***

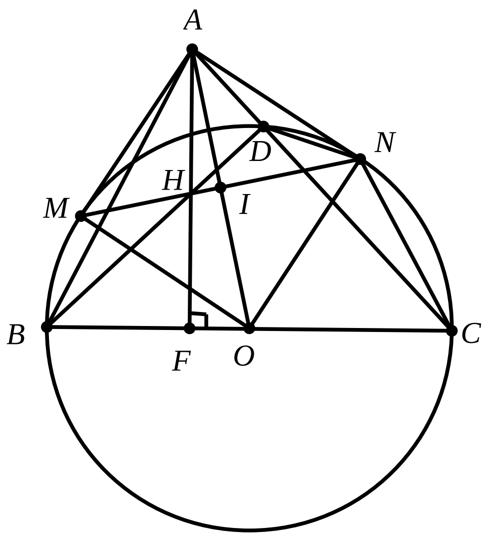
	Thời gian của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là $\frac{36}{x}$	
	Vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ B đến A là $x+3$ Thời gian của người đi xe đạp khi đi từ B đến A là $\frac{36}{x+3}$	*0,25*
	Ta có phương trình: $\frac{36}{x}-\frac{36}{x+3}=\frac{36}{60}$	*0,25*
	Giải phương trình này ra hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=-15(loại) \end{array}\right.$	*0,5*
	Vậy vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là 12 km/h	*0,25*
4 **(3,0 *điểm*)**	**a) (*1,0 điểm*)**	
	 Vẽ hình đúng, đủ phần a.	*0,25*
	$AH\perp BC \Rightarrow \widehat{IHC}=90^0$. (1)	*0,25*
	$\widehat{BDC}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\widehat{IDC}=90^0$.(2)	*0,25*
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{IHC}+\widehat{IDC}=180^0 \Rightarrow IHCD$ là tứ giác nội tiếp.	*0,25*
	b) (*1,0 điểm*)	
	Xét ΔABI và ΔDBA có góc $\widehat{B}$ chung, $\widehat{BAI}=\widehat{ADB}$ (Vì cùng bằng $\widehat{ACB}$). Suy ra, hai tam giác ABI, DBA đồng dạng.	*0,75*
	$\Rightarrow \frac{AB}{BI}=\frac{BD}{BA} \Rightarrow AB^2=BI.BD$. (đpcm)	*0,25*
	c) (*1,0 điểm*)	

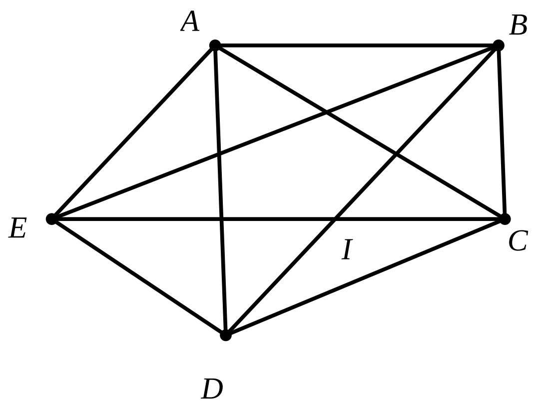
	$\widehat{BAI}=\widehat{ADI}$ (chứng minh trên).	0,25
	$\Rightarrow AB$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\Delta\, ADI$ với mọi D thuộc cung AD và A là tiếp điểm. (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)	0,25
	Có $AB\perp AC$ tại A $\Rightarrow AC$ luôn đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAID. Gọi M là tâm đường trong ngoại tiếp $\Delta AID \Rightarrow M$ luôn nằm trên AC.	0,25
	Mà AC cố định $\Rightarrow M$ thuộc đường thẳng cố định. (đpcm)	0,25
5 **(1,5 *điểm*)**	**a) (*1,0 điểm*)**	
	$x^2+2y^2-3xy+2x-4y+3=0 \Leftrightarrow (x-y)(x-2y)+2(x-2y)=-3$ $\Leftrightarrow (x-2y)(x-y+2)=-3$ Do x,y nguyên nên $x-2y, x-y+2$ nguyên Mà $3=(-1).3=(-3).1$ nên ta có bốn trường hợp	0,5
	$\begin{cases}x-2y=-1\\x-y+2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$; $\begin{cases}x-2y=3\\x-y+2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-9\\y=-6\end{cases}(loại)$ $\begin{cases}x-2y=1\\x-y+2=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-11\\y=-6\end{cases}(loại)$; $\begin{cases}x-2y=-3\\x-y+2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ Vậy các giá trị cần tìm là $(x;y)=(1;2),(3;2)$.	0,5
	b) (*0,5 điểm*)	
	Vẽ đường tròn đường kính BD. Do các góc A, C tù nên hai điểm A, C nằm trong đường tròn đường kính BD. Suy ra, $AC<BD$ (Do BD là đường kính).	0,5

Đề số 11

Câu	Lời giải sơ lược	Điểm
1 **(1,5 *điểm*)**	**a) (*1,0 điểm*)**	
	$A=\dfrac{x+2+x+\sqrt{x}-2-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\cdot\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$	0,5
	$=\dfrac{x-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\cdot\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=1.$	0,5
	b) (*0,5 điểm*)	

	$x=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right).\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}}{\sqrt{(\sqrt{20}+1)^2}+3}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{20}+4}=\dfrac{2}{2(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}-2.$	***0,25***
	$\Rightarrow x^2+4x-1=0 => P=-1$	***0,25***
2 **(2,0 *điểm*)**	**a) (*1,0 điểm*)**	
	$\Delta'=4m^2-2(2m^2-1)=2>0$ với mọi m.	***0,5***
	Vậy (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.	***0,5***
	b) (*1,0 điểm*)	
	Theo ĐL Viét ta có $x_1+x_2=2m$. Do đó, $2x_1{}^2+4mx_2+2m^2-9=(2x_1{}^2-4mx_1+2m^2-1)+4m(x_1+x_2)-8.$ $=8m^2-8=8(m-1)(m+1)$ (do $2x_1{}^2-4mx_1+2m^2-1=0$).	***0,5***
	Yêu cầu bài toán: $(m-1)(m+1)<0 \Leftrightarrow -1<m<1$.	***0,5***
3 **(1,5 *điểm*)**	**a) (*0,5 điểm*)**	
	Do $x^3>0, y^3>0$ nên $x-y>0$. $x-y=x^3+y^3>x^3-y^3 \Rightarrow 1>x^2+xy+y^2 \Rightarrow x^2+y^2<1.$	***0,5***
	b) (*1,0 điểm*)	
	Cộng vế với vế các phương trình của hệ ta được: $x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-2z+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0$ (1).	***0,5***
	Do $(x-1)^2\ge 0,(y-1)^2\ge 0,(z-1)^2\ge 0$ nên $VT(1)\ge VP(1)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$. Thử lại, $x=y=z=1$ là nghiệm của hệ.	***0,5***
4	**a) (*1,0 điểm*)**	

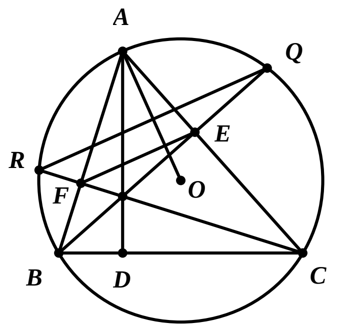
(3,0 *điểm*)	 Vẽ hình câu a) đúng, đủ.	***0,25***
	Do các điểm *M, N, F* cùng nhìn đoạn *AO* dưới góc 90^0 nên *A, O, M, N, F* cùng thuộc đường tròn đường kính *AO*.	***0,75***
	b) (*1,0 điểm*)	
	Ta có $AM = AN$ (Tính chất tiếp tuyến). Từ câu a) suy ra $\widehat{ANM} = \widehat{AFN}$ (1).	***0,25***
	Mặt khác, vì hai tam giác *ADH, AFC* đồng dạng; hai tam giác *ADN, ANC* đồng dạng nên $AH.AF = AD.AC = AN^2 \Rightarrow \dfrac{AH}{AN} = \dfrac{AN}{AF}$.	***0,25***
	Do đó, hai tam giác *ANH, AFN* đồng dạng (c.g.c)$\Rightarrow \widehat{ANH} = \widehat{AFN}$ (2).	***0,25***
	Từ (1), (2) ta có $\Rightarrow \widehat{ANH} = \widehat{ANM} \Rightarrow H \in MN \Rightarrow$ đpcm.	***0,25***
	c) (*1,0 điểm*)	
	Từ câu a) ta có $HM.HN = HA.HF$.	***0,25***
	Gọi $I = OA \cap MN$ ta có *I* là trung điểm của *MN*. $HM.HN = (IM + IH)(IM - IH) = IM^2 - IH^2$	***0,25***
	$= OM^2 - OI^2 - (OH^2 - OI^2) = R^2 - OH^2$	***0,25***
	Từ đó suy ra $HA.HF = R^2 - OH^2$.	***0,25***
5	**a) (*1,0 điểm*)**	

(2,0 *điểm*)	Ta có $\dfrac{x+y\sqrt{2013}}{y+z\sqrt{2013}}=\dfrac{m}{n}\left(m,n\in\mathbb{N}^*,(m,n)=1\right)$. $\Leftrightarrow nx-my=(mz-ny)\sqrt{2013}\ \Rightarrow \begin{cases}nx-my=0\\ mz-ny=0\end{cases}\Rightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}=\dfrac{m}{n}\Rightarrow xz=y^2$.	**0,25**
	$x^2+y^2+z^2=(x+z)^2-2xz+y^2=(x+z)^2-y^2=(x+y+z)(x+z-y)$.	**0,25**
	Vì $x+y+z>1$ và $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố nên $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=x+y+z\\ x-y+z=1\end{cases}$	**0,25**
	Từ đó suy ra $x=y=z=1$ (thỏa mãn).	**0,25**
	b) (*1,0 điểm*)	
	 Gọi $I=EC\cap BD$ Ta có $S_{BAE}=S_{DAE}$ nên khoảng cách từ *B, D* đến *AE* bằng nhau. Do *B, D* cùng phía đối với đường thẳng *AE* nên $BD//AE$. Tương tự $AB//CE$	**0,25**
	Do đó, *ABIE* là hình bình hành $\Rightarrow S_{IBE}=S_{ABE}=1$	**0,25**
	Đặt $S_{ICD}=x(0<x<1)\Rightarrow S_{IBC}=S_{BCD}-S_{ICD}=1-x=S_{ECD}-S_{ICD}=S_{IED}$ Lại có $\dfrac{S_{ICD}}{S_{IDE}}=\dfrac{IC}{IE}=\dfrac{S_{IBC}}{S_{IBE}}$ hay $\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1-x}{1}\Leftrightarrow x^2-3x+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3+\sqrt5}{2}\\ x=\dfrac{3-\sqrt5}{2}\end{array}\right.$ Kết hợp điều kiện ta có $x=\dfrac{3-\sqrt5}{2}\ \Rightarrow S_{IED}=\dfrac{\sqrt5-1}{2}$	**0,25**
	Do đó $S_{ABCDE}=S_{EAB}+S_{EBI}+S_{BCD}+S_{IED}=3+\dfrac{\sqrt5-1}{2}=\dfrac{5+\sqrt5}{2}$.	**0,25**

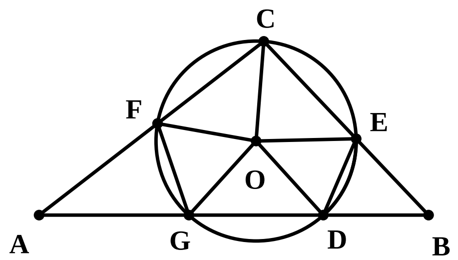
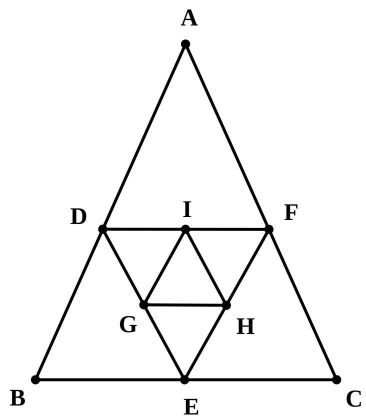
Đề số 12

Bài	Đáp án	Điểm
1 (2,5 điểm)	**1/ Rút gọn biểu thức sau:** $A=\sqrt{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-\sqrt{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ **.**	***1,5***
	Nhận xét rằng $A<0$.	0,25
	$A^2=4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}+4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2\sqrt{\left(4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)\left(4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)}$	0,25
	$=8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}$	0,25
	$=8-2\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}$	0,25
	$=6-2\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}-1\right)^2$.	0,25
	Vậy $A=1-\sqrt{5}$	0,25
	Giải phương trình: $x^2+\sqrt{x^2-2x-19}=2x+39$ **(*)**	***1,0***
	Đặt $t=\sqrt{x^2-2x-19}\geq 0$.	0,25
	(*) trở thành: $t^2+t-20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\ \ (\text{nhận})\\ t=-5\ (\text{loại})\end{array}\right.$	0,25
	$t=4\Rightarrow x^2-2x-19=16\Leftrightarrow x^2-2x-35=0$.	0,25
	$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7\\ x=-5\end{array}\right.$.	0,25
2 (2,0 điểm)	**1/ Cho** $4a-5b+9c=0$**, chứng minh phương trình** $ax^2+bx+c=0$ **luôn có nghiệm.**	***1,0***
	Xét trường hợp a = 0. Nếu b = 0 thì từ $4a-5b+9c=0$, ta suy ra c = 0, do đó phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.	0,25
	Còn nếu $b\neq 0$, phương trình (1) trở thành $bx+c=0$, có nghiệm $x=-\dfrac{c}{b}$. Trường hợp $a\neq 0$, (1) là phương trình bậc hai. Từ $4a-5b+9c=0$, ta có $b=\dfrac{4a+9c}{5}$. Suy ra,	0,25
	$\Delta=b^2-4ac=\dfrac{(4a+9c)^2}{25}-4ac=\dfrac{16a^2-28ac+81c^2}{25}=\dfrac{(2a-7c)^2+12a^2+32c^2}{25}>0$.	0,25

	Do đó, (1) có hai nghiệm phân biệt. Vậy trong mọi trường hợp, (1) luôn có nghiệm.	0,25
	2/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+y^2+x=7y \\ \dfrac{x}{y}(x+y)=12 \end{cases}$	***1,0***
	ĐK: $y \neq 0$ Hệ tương đương với $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=7 \\ \dfrac{x}{y}(x+y)=12 \end{cases}$, đặt $u=x+y, v=\dfrac{x}{y}$ ta có hệ: $\begin{cases} u+v=7 \\ uv=12 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=4 \end{cases} \vee \begin{cases} u=4 \\ v=3 \end{cases}$	0,25
	Với $u=4, v=3$ ta có hệ $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=3 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$	0,25
	Với $u=3, v=4$ ta có hệ $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=4 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{12}{5} \\ y=\dfrac{3}{5} \end{cases}$	0,25
3 *(1,5 điểm)*	**1/ Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn:** $a+b+c=1$. **Chứng minh rằng:** $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$.	***1,0***
	Từ a + b + c = 1 ta có 1 + a = (1 – b) + (1 – c) $\geq 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$ (Vì a, b, c <1 nên 1 – b ; 1 – c ; 1 – a là các số dương).	0,25
	Tương tự ta có $1+b \geq 2\sqrt{(1-c)(1-a)}$ và $1+c \geq 2\sqrt{(1-a)(1-b)}$.	0,25
	Nhân các vế của ba BĐT ta có: $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c) \Rightarrow$ đpcm.	0,25
	Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.	0,25
	2/ Phân chia chín số: $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ **thành ba nhóm tùy ý, mỗi nhóm ba số. Gọi** T_1 **là tích ba số của nhóm thứ nhất,** T_2 **là tích ba số của nhóm thứ hai,** T_3	***0,5***

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="2">là tích ba số của nhóm thứ ba. Hỏi tổng $T_1+T_2+T_3$ có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Ta có: $T_1+T_2+T_3\ge 3\sqrt[3]{T_1.T_2.T_3}$
$T_1.T_2.T_3=1.2.3.4.5.6.7.8.9=72.72.70>71^3$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td colspan="2">Do đó, $T_1+T_2+T_3>213$ mà T_1,T_2,T_3 nguyên nên $T_1+T_2+T_3\ge 214$.
Ngoài ra, $214=72+72+70=1.8.9+3.4.6+2.5.7$.
Nên giá trị nhỏ nhất của $T_1+T_2+T_3$ là 214.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="9">4
(2,5 điểm)</td><td colspan="2">Cho đường tròn tâm O bán kính R và dây cung BC cố định khác đường kính. Gọi A là một điểm chuyển động trên cung lớn BC của đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn; AD,BE,CF là các đường cao của tam giác ABC. Các đường thẳng BE, CF tương ứng cắt (O) tại các điểm thứ hai là Q, R.
1/ Chứng minh rằng QR song song với EF.</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td>Vì $\widehat{BEC}=\widehat{BFC}=90^0$ nên tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn đường kính BC.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td colspan="2">Suy ra, $\widehat{BEF}=\widehat{BCF}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mà $\widehat{BCF}=\widehat{BQR}\left(=\frac{1}{2}\text{sđ }\overset{\frown}{BR}\right)$ nên $\widehat{BEF}=\widehat{BQR}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td colspan="2">Suy ra, $QR//EF$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td colspan="2">2/ Chứng minh rằng diện tích tứ giác AEOF bằng $\frac{EF.R}{2}$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vì tứ giác BCEF nội tiếp nên $\widehat{EBF}=\widehat{ECF}$ mà $\widehat{EBF}=\frac{1}{2}\text{sđ }\overset{\frown}{AQ},\widehat{ECF}=\frac{1}{2}\text{sđ }\overset{\frown}{AR}$ nên $AQ=AR$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td colspan="2">Do đó, $OA\perp QR$ mà $QR//EF$ nên $OA\perp EF$.
Vì $OA\perp EF$ nên $S_{AEOF}=\frac{EF.OA}{2}=\frac{EF.R}{2}$.</td><td>0,25</td></tr>
</table>

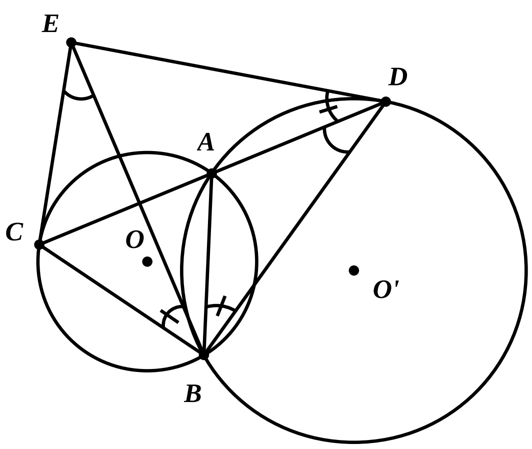
	3/ Xác định vị trí của điểm A để chu vi tam giác DEF lớn nhất.	***1,0***
	Tương tự câu 2, $2S_{BFOD}=FD.R, 2S_{CDOE}=DE.R$. Mà tam giác ABC nhọn nên O nằm trong tam giác ABC.	0,25
	Suy ra, $2S_{ABC}=2S_{AEOF}+2S_{BFOD}+2S_{CDOE}=R\left(DE+EF+FD\right)$.	0,25
	Vì R không đổi nên đẳng thức trên suy ra chu vi tam giác DEF lớn nhất khi và chỉ khi diện tích tam giác ABC lớn nhất.	0,25
	Mà $S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.AD$ với BC không đổi nên S_{ABC} lớn nhất khi AD lớn nhất. Khi đó, A là điểm chính giữa của cung lớn BC.	0,25
5 *(1,5 điểm)*	**1/ Tìm hai số nguyên a, b để a^4+4b^4 là số nguyên tố.**	***1,0***
	$a^4+4b^4=\left(a^2-2ab+2b^2\right)\left(a^2+2ab+2b^2\right)$.	0,25
	Vì $a^2-2ab+2b^2\ge 0; a^2+2ab+2b^2\ge 0$. Nên a^4+4b^4 nguyên tố $\Leftrightarrow$ Một thừa số là 1 còn thừa số kia là số nguyên tố .	0,25
	TH1: $a^2-2ab+2b^2=1\Leftrightarrow (a-b)^2+b^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a-b)^2=1\\ b^2=0\end{cases} \quad (1)\\ \begin{cases}(a-b)^2=0\\ b^2=1\end{cases} \quad (2)\end{array}\right.$ *Với $(1)\Rightarrow b=0\Rightarrow a^2=1\Rightarrow M=1$ (loại). *Với $(2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b=1\\ a=b=-1\end{array}\right.$ (thỏa mãn).	0,25
	TH2: $a^2+2ab+2b^2=1\Leftrightarrow (a+b)^2+b^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a+b)^2=1\\ b^2=0\end{cases} \quad (3)\\ \begin{cases}(a+b)^2=0\\ b^2=1\end{cases} \quad (4)\end{array}\right.$ *Với $(3)\Rightarrow b=0\Rightarrow a^2=1\Rightarrow M=1$ (loại). *Với $(4)\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}\vee\begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$ (thỏa mãn).	0,25

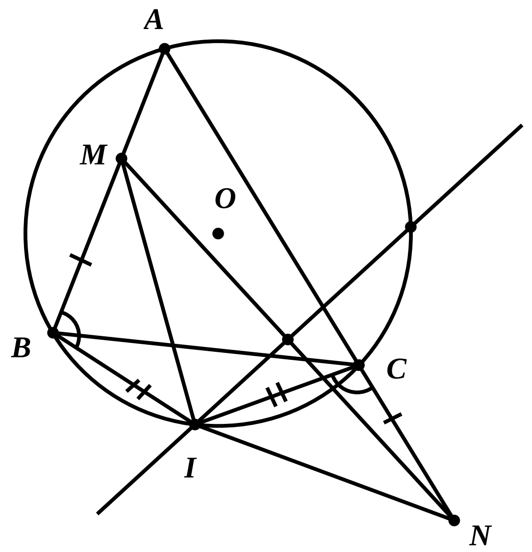
	Vậy các cặp số $(a;b)$ cần tìm là: $(1;1),(1;-1),(-1;1),(-1;-1)$.	
	2/ Hãy chia một tam giác bất kì thành 7 tam giác cân trong đó có 3 tam giác bằng nhau.	***0,5***
	 **Trường hợp 1:**Tam giác ABC không cân. Giả sử AB là cạnh lớn nhất của tam giác ABC. Vẽ cung tròn tâm A, bán kính AC cắt AB tại D. Vẽ cung tròn tâm B, bán kính BD cắt BC tại E. Vẽ cung tròn tâm C, bán kính CE cắt AC tại F. Vẽ cung tròn tâm A, bán kính AF cắt AB tại G. Dễ dàng chứng minh 5 điểm C, D, E, F, G thuộc đường tròn tâm O với O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Nối 5 điểm đó với O, nối A, B với O, nối F với G, D với E ta được 7 tam giác cân: $AGF, OGF, ODG, BDE, ODE, OCE, OCF$. Trong đó, có ba tam giác bằng nhau là: OCE, OCF, OGD.	0,25
	 **Trường hợp 2:** Tam giác ABC cân. Giả sử tam giác ABC cân tại A. Gọi D, E, F, G, H, I lần lượt là trung điểm các	0,25

	đoạn thẳng: AB, BC, CA, DE, EF, FD. Khi đó, ta có 7 tam giác cân ADF, BDE, CEF, DGI, EGH, FHI, GHI trong đó ba tam giác bằng nhau là: ADF, BDE, CEF.	

Đề số 13

Bài	Lời giải sơ lược	Điểm
1.a 1,0 đ	$x^2-2(m+2)x+6m+1=0 \quad (1)$ $\Delta'=(m+2)^2-(6m+1)=m^2-2m+3$	0,25
	$=(m-1)^2+2>0, \forall m$	0,5
	Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi m.	0,25
1.b 1,0 đ	Đặt $t=x-2$, phương trình (1) trở thành: $t^2-2mt+2m-3=0 \quad (2)$ Vì (1) có nghiệm với mọi m nên (2) có nghiệm với mọi m.	0,25
	Xét (2) có hai nghiệm t_1,t_2 theo ĐL Viét ta có: $t_1+t_2=2m, t_1t_2=2m-3$	0,25
	(1) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 2 $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} t_1+t_2=2m>0 \\ t_1t_2=2m-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m>\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{3}{2}$	0,25
	Vậy khi $m>\frac{3}{2}$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 2.	0,25
2.a 1,5 đ	$a-\sqrt{ab}-6b=0 \Leftrightarrow a-3\sqrt{ab}+2\sqrt{ab}-6b=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \sqrt{a}\left(\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)+2\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)=0$	0,25
	Vì a, b dương nên $\sqrt{a}+2\sqrt{b}>0 \Rightarrow \sqrt{a}=3\sqrt{b} \Leftrightarrow a=9b$.	0,5
	Thay $a=9b$ vào P ta được $P=\frac{10}{13}$.	0,5
2.b 1,5 đ	$\begin{cases} x^2-3y=2 \quad (1) \\ 9y^2-8x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-12y=8 \\ 9y^2-8x=8 \end{cases} \Rightarrow 4x^2-12y-9y^2+8x=0$	0,25
	$\Leftrightarrow (2x-3y)(2x+3y)+4(2x-3y)=0 \Leftrightarrow (2x-3y)(2x+3y+4)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3y=0 \\ 2x+3y+4=0 \end{array}\right.$	0,5
	Thay $2x-3y=0$ vào (1) ta được: $x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{3} \Rightarrow y=\frac{2-2\sqrt{3}}{3} \\ x=1+\sqrt{3} \Rightarrow y=\frac{2+2\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$	0,25
	Thay $2x+3y+4=0$ vào (1) ta được: $x^2+2x+2=0$, PT vô nghiệm	0,25
	Vậy hệ có hai nghiệm (x;y): $\left(1-\sqrt{3};\frac{2-2\sqrt{3}}{3}\right),\left(1+\sqrt{3};\frac{2+2\sqrt{3}}{3}\right)$	0,25

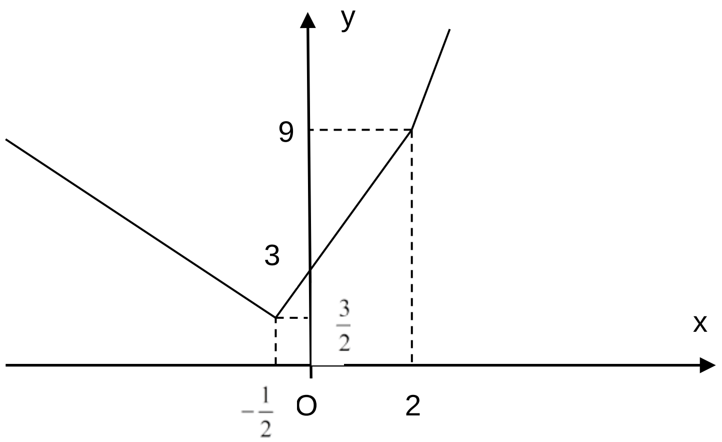
3.a **0,5 đ**	$a^2+b^2+\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2\ge 2\Leftrightarrow (a+b)^2-2(ab+1)+\frac{(1+ab)^2}{(a+b)^2}\ge 0$	0,25
	$\Leftrightarrow\left(a+b-\frac{ab+1}{a+b}\right)^2\ge 0,\forall a,b,a+b\ne 0$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a+b=\frac{ab+1}{a+b}\Leftrightarrow a^2+ab+b^2=1$	0,25
3.b **1,0 đ**	Ta có: $\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{abc}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a+bc}+\sqrt{bc}\right)=\sqrt{a}\left(\sqrt{a(a+b+c)+bc}+\sqrt{bc}\right)$ $=\sqrt{a}\left(\sqrt{a(a+b)+(a+b)c}+\sqrt{bc}\right)=\sqrt{a}\left(\sqrt{(a+b)(a+c)}+\sqrt{bc}\right)$	0,25
	Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $\sqrt{a}=\sqrt{3}.\sqrt{\frac{1}{3}.a}\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+a\right)$ $\sqrt{(a+b)(a+c)}+\sqrt{bc}\le\frac{a+b+a+c}{2}+\frac{b+c}{2}=1$ $\Rightarrow\sqrt{a}\left(\sqrt{(a+b)(a+c)}+\sqrt{bc}\right)\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+a\right)$ hay $\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{abc}\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+a\right)$	0,25
	Chứng minh tương tự: $\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{abc}\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+b\right);\sqrt{c^2+abc}+\sqrt{abc}\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+c\right)$ Mà $\sqrt{abc}\le\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$	0,25
	$\Rightarrow M=\left(\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{abc}\right)+\left(\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{abc}\right)+\left(\sqrt{c^2+abc}+\sqrt{abc}\right)+6\sqrt{abc}$ $\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+a\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+b\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+c\right)+\frac{6}{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.	0,25
4.a **1,5 đ**		
	$\widehat{ABD}=\widehat{ADE}=\frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AD}$ của (O'), $\widehat{ABC}=\widehat{ACE}=\frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AC}$ của (O)	0,5

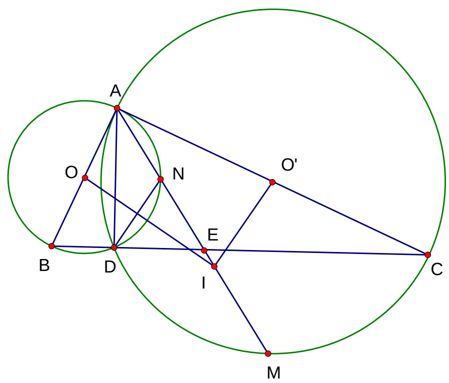
	$\Rightarrow \widehat{CED}+\widehat{CBD}=\widehat{CED}+\widehat{ABD}+\widehat{ABC}=\widehat{CED}+\widehat{ACE}+\widehat{ADE}=180^0$ (tổng ba góc trong tam giác ECD).	0,5
	Vậy tứ giác BDEC nội tiếp.	0,5
4.b **1,5 đ**	Vì tứ giác BCED nội tiếp nên $\widehat{CEB}=\widehat{CDB}; \widehat{EBC}=\widehat{EDC}$ mà $\widehat{EDC}=\widehat{ABD}$ nên $\widehat{EBC}=\widehat{ABD}$	0,25
	$\Rightarrow \Delta EBC$ đồng dạng với $\Delta DBA \Rightarrow \frac{EC}{EB}=\frac{DA}{DB}\Rightarrow EC.DB=DA.EB$ (1)	0,5
	Tương tự, ΔEBD đồng dạng với $\Delta CBA \Rightarrow \frac{ED}{EB}=\frac{CA}{CB}\Rightarrow ED.CB=CA.EB$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) ta được: $EC.DB+ED.CB=DA.EB+CA.EB=(DA+CA)EB=CD.EB$ □	0,5
5 **0,5 đ**		
	Vẽ đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi I là điểm chính giữa cung BC không chứa A. Xét hai ΔMBI và ΔNCI có: $BM=CN$ (gt), $\widehat{MBI}=\widehat{NCI}$ (cùng bù với $\widehat{ACI}$) $IB=IC$ (vì I là điểm chính giữa cung BC) $\Rightarrow \Delta MBI=\Delta NCI$ (c.g.c)	0,25
	$\Rightarrow IM=IN$. Do vậy, I thuộc trung trực của MN, mà I cố định $\Rightarrow$ đpcm.	0,25

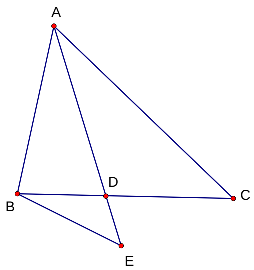
Đề số 14

Câu	ý	Nội dung	Điểm
1	1/	$\sqrt{x+1}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x+1=(x-1)^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-3x=0 \end{cases}$	0,25đ

		$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = 3$	0,25đ 0,25đ 0,25đ
	2/	$\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+2)^2} = 3$ $\Leftrightarrow \lvert x-1 \rvert + \lvert x+2 \rvert = 3$ (*) + Với $x < -2$ thì (*) $1 - x - x - 2 = 3 \Leftrightarrow x = -2$ (loại) + Với $-2 \le x < 1$ thì (*) $\Leftrightarrow 1 - x + x + 2 = 3 \Leftrightarrow 0x = 0$ (đúng với mọi x thỏa mãn $-2 \le x < 1$) + Với $x \ge 1$ thì (*) $\Leftrightarrow x - 1 + x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$ (t/m) Vậy nghiệm của PT đã cho là: $-2 \le x \le 1$	0.25đ 0.50đ 0.25đ
2	1/	Ta có $y = \lvert x-2 \rvert + \lvert 2x+1 \rvert + ax$ $\Leftrightarrow y = \begin{cases} 2 - x - 2x - 1 + ax; & x < -\frac{1}{2} \\ 2 - x + 2x + 1 + ax; & -\frac{1}{2} \le x < 2 \\ x - 2 + 2x + 1 + ax; & x \ge 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow y = \begin{cases} (a-3)x + 1; & x < -\frac{1}{2} \\ (a+1)x + 3; & -\frac{1}{2} \le x < 2 \\ (a+3)x - 1; & x \ge 2 \end{cases}$ Vậy hàm (C) luôn đồng biến khi: $\begin{cases} a > 3 \\ a > -1 \\ a > -3 \end{cases} \Leftrightarrow a > 3$	0,25đ 0.25đ 0.25đ

		0,25đ
2/	+ Vì đồ thị đi qua điểm B(1; 6) nên ta có: $6 = \lvert 1-2\rvert + \lvert 2.1+1\rvert + a.1$. $\Leftrightarrow a = 2$ Vậy a = 2 thì đồ thị đi qua điểm B(1; 6)	0,25đ
	+Với a = 2 thì $y = \begin{cases} -x+1; & x < -\frac{1}{2} \\ 3x+3; & -\frac{1}{2} \le x < 2 \\ 5x-1; & x \ge 2 \end{cases}$ (C)	0,25đ
	Đồ thị được vẽ như sau:  	0.25đ

	3/	Ta có: $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{4x^2+4x+1}=x+m$ $\Leftrightarrow \lvert x-2\rvert+\lvert 2x+1\rvert+2x=3x+m$ **(*)** Số nghiệm của phương trình (*) chính là số giao điểm của đường thẳng y = 3x + m và đồ thị $y=\lvert x-2\rvert+\lvert 2x+1\rvert+2x$. Ta thấy y=3x+ m là đường thẳng song song với đường thẳng y = 3x + 3. Dựa vào đồ thị hàm số đã vẽ ở ý 2/ ta có: + m < 3 thì PT vô nghiệm. + m = 3 thì PT có vô số nghiệm. + m > 3 thì PT có 2 nghiệm.	0,25đ 0,25đ 0,25đ
3	1/	 + Ta có $\widehat{ADB}=\widehat{ADC}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ADB}+\widehat{ADC}=\widehat{BDC}=180^0$ $\Rightarrow$ B, C, D thẳng hàng. + Xét ΔABC vuông tại A, đường cao AD. Ta có: $\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{AD^2}$	0,25đ 0,25đ 0,25đ
	2/	Ta có $\widehat{BAE}=\widehat{BAD}+\widehat{DAE}$ Mà $\widehat{BAD}=\widehat{ACE}$ (=1/2 sđ $\overset{\frown}{AD}$ của (O')). $\widehat{DAE}=\widehat{CAE}$ ($\overset{\frown}{DM}=\overset{\frown}{MC}$) $\Rightarrow \widehat{ACE}+\widehat{CAE}=\widehat{AEB}=\widehat{BAE}$ Suy ra ΔABE cân tại B.	0,25đ 0.25đ 0,25đ 0,25đ
	3/	+ Vì AC là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow \widehat{CAN}=\widehat{ADN}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AN}$) Mà $\widehat{MAD}=\widehat{MAC}$ (cùng chắn hai cung bằng nhau của (O')) $\Rightarrow \widehat{NAD}=\widehat{NDA}$ $\Rightarrow NA=ND\Rightarrow$ N nằm trên đường trung trực của đoạn AD	

		$\Rightarrow N \in OO'$ Ta có $\Delta NO'M$ vuông tại O′, có IO′= IN$\Rightarrow \widehat{INO'} = \widehat{IO'N}$ Mà $\widehat{INO'} = \widehat{ANO}$, $\widehat{ANO} = \widehat{OAN} \Rightarrow \widehat{OAI} = \widehat{OO'I} \Rightarrow$ tứ giác AOIO′ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OAO'} + \widehat{OIO'} = 180^0 \Rightarrow \widehat{OIO'} = 90^0 \left(\text{do } \widehat{OAO'} = 90^0\right)$	0,25đ 0,25đ 0.25đ
4	1/	 Trên tia AD lấy điểm E sao cho $\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$. Dễ thấy $\Delta ACD \sim \Delta AEB\left(g-g\right)$ $\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AB.AC = AD.AE = AD\left(AD + DE\right)$ $\Rightarrow AB.AC = AD^2 + AD.DE$ $\Rightarrow AD^2 = AB.AC - AD.DE \quad (1)$ Mặt khác: $\Delta BDE \sim \Delta ADC \Rightarrow \dfrac{BD}{DE} = \dfrac{AD}{DC} \Rightarrow BD.DC = DE.AD \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra: $AD^2 = AB.AC - DB.DC$.	0.25đ 0.25đ 0.25đ 0,25đ
	2/	Từ giả thiết suy ra $\Rightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a+b+c} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) + \left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a+b+c}\right) = 0$ $\Rightarrow \dfrac{a+b}{ab} + \dfrac{a+b}{c\left(a+b+c\right)} = 0 \Rightarrow \left(a+b\right)\left(c\left(a+b+c\right) + ab\right) = 0$ $\Rightarrow \left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right) = 0$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right.$ + Nếu a+b=0 thì từ a + b + c = 2009 ta có c = 2009	0,25đ 0,25đ

		+ Tương tự khi b+c=0, c+a =0.	0,25đ 0,25đ
5/		+ Gọi tên theo thứ tự 9 chiếc bàn là B_1,B_2,B_3, B_4,B_5,B_6 B_7,B_8,B_9. Giả sử không có bàn nào được xếp cách đều hai bàn cùng màu với mình (*). + Không mất tổng quát, giả sử B_5 là bàn màu xanh, khi đó B_4 và B_6 không thể cùng màu xanh. Có hai khả năng: - B_4 và B_6 cùng màu đỏ. Do đó B_4 cách đều B_2 và B_6, còn B_6 cách đều B_4 và B_8 nên B_2 và B_8 cùng màu xanh, suy ra B_5 được xếp cách đều hai bàn cùng màu xanh là B_2 và B_8, trái với giả thiết (*). - B_4 và B_6 khác màu, không mất tổng quát, giả sử B_4 màu xanh còn B_6 màu đỏ. Do B_4 cách đều B_3 và B_5 nên B_3 là bàn màu đỏ. Do B_6 cách đều B_3 và B_9 nên B_9 là bàn màu xanh. Do B_5 cách đều B_1 và B_9 nên B_1 màu đỏ. Do B_2 cách đều B_1 và B_3 nên B_2 màu xanh. Do B_5 cách đều B_2 và B_8 nên B_8 có màu đỏ. Do B_6 và B_8 cùng có màu đỏ nên B_7 có màu xanh. Như vậy B_7 được xếp cách đều hai bàn cùng màu xanh là B_5 và B_9, trái với giả thiết (*) Vậy cả hai khả năng trên đều dẫn đến vô lý nên điều giả sử (*) là sai. Như vậy có ít nhất một bàn được xếp cách đều với hai bàn cùng màu với mình.	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ