

CHỦ ĐỀ 3

NGUYÊN HÀM HÀM ẨN

Cần nhớ các công thức đạo hàm của hàm hợp

$$\bullet \int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$\bullet f'(x).g(x) + f(x).g'(x) = [f(x).g(x)]'$$

$$\bullet \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'$$

$$\bullet \frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln(f(x))]'$$

$$\bullet -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\frac{1}{f(x)} \right]'$$

$$\bullet -\frac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}} \right]'$$

$$\bullet n.f'(x).f(x) = [f(x)^n]'$$

$$\bullet \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = [2\sqrt{f(x)}]'$$

DẠNG 1

$$\begin{cases} f'(x) = g(x)h[f(x)] \\ f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x) \end{cases}$$

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng:

Phương pháp giải:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{f'(x)}{h[f(x)]} = g(x) &\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{h[f(x)]} \cdot dx = \int g(x) \cdot dx \Leftrightarrow \int \frac{d[f(x)]}{h[f(x)]} = \int g(x) \cdot dx \\ \bullet f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x) &\Leftrightarrow \int f'(x) h[f(x)] \cdot dx = \int g(x) \cdot dx \Leftrightarrow \int h[f(x)] \cdot d[f'(x)] = \int g(x) \cdot dx \end{aligned}$$

Chú ý: Ngoài việc nguyên hàm hai vế, ta có thể lấy tích phân hai vế (tùy câu hỏi của bài toán)

$$\begin{cases} f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0 \\ f'(x) + p(x) [f(x)]^n = 0 \end{cases}$$

Phương pháp giải:

$$\bullet f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$$

$$\text{Chia hai vế với } f(x) \text{ ta được } \frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = - \int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = - \int p(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

$$\bullet f'(x) + p(x) [f(x)]^n = 0$$

$$\text{Chia hai vế với } [f(x)]^n \text{ ta được } \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = -p(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = - \int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = - \int p(x) dx$$

Suy ra

$$\textbf{3. Điều kiện hàm ẩn có dạng: } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$$

Phương pháp giải:

$$\text{Dễ dàng thấy rằng } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$$

$$\text{Do đó } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$$

$$\text{Suy ra } u(x)f(x) = \int h(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ và $f'(x)\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=1$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ B. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ C. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ D. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

- A. $f^2(2)=\frac{313}{15}$ B. $f^2(2)=\frac{332}{15}$ C. $f^2(2)=\frac{324}{15}$ D. $f^2(2)=\frac{323}{15}$

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0)=3$ và $(f(x))^2.f'(x)=3x^2+4x+2$. Giá trị $f(1)$ là

- A. $2\sqrt[3]{42}$ B. $2\sqrt[3]{15}$ C. $\sqrt[3]{42}$ D. $\sqrt[3]{15}$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{3}$ và $f'(x)=x[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $f(1)=-\frac{2}{3}$ B. $f(1)=-\frac{2}{9}$ C. $f(1)=-\frac{7}{6}$ D. $f(1)=-\frac{11}{6}$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $-\frac{391}{400}$ B. $-\frac{1}{40}$ C. $-\frac{41}{400}$ D. $-\frac{1}{10}$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $-\frac{4}{35}$ B. $-\frac{71}{20}$ C. $-\frac{79}{20}$ D. $-\frac{4}{5}$

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{4}{19}$ và $f'(x)=x^3f^2(x) \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. -1 D. $-\frac{3}{4}$

Câu 8. Cho hàm số $f(x) > 0$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{2}$, $f'(x) = -e^x f^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

- A. $f(\ln 2) = \frac{1}{4}$. B. $f(\ln 2) = \frac{1}{3}$. C. $f(\ln 2) = \ln 2 + \frac{1}{2}$. D. $f(\ln 2) = \ln^2 2 + \frac{1}{2}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2024) + f(2025) = \frac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $\frac{a}{b} < -1$. B. $\frac{a}{b} > 1$. C. $a + b = 1010$. D. $b - a = 1519$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2 = x \cdot f(x)$. Tính $f(8)$.

- A. $f(8) = \frac{43 - 24\sqrt{3}}{9}$. B. $f(8) = \frac{43 + 24\sqrt{3}}{9}$. C. $f(8) = \frac{43 - \sqrt{3}}{3}$. D. $f(8) = \frac{43 + \sqrt{3}}{3}$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x} \cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $f(3) < 2$. B. $2 < f(3) < 4$. C. $f(3) > 6$. D. $4 < f(3) < 6$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1$, $f'(x) < 0$, $[f'(x)]^2 = f''(x)$, $\forall x \in [0; 1]$. Giá trị $f'(2)$ thuộc khoảng

- A. $(2; 3)$. B. $(-2; 0)$. C. $(0; 2)$. D. $(-3; -2)$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1$, $f(2) = e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

- A. $e^{\frac{3}{2}}$. B. e^3 . C. $e^{\frac{5}{2}}$. D. e^2 .

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Tính giá trị của $T = f^2(2)$

- A. $\frac{43}{30}$. B. $\frac{16}{15}$. C. $\frac{43}{15}$. D. $\frac{26}{15}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 2x^2 - x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng

- A. 28. B. 22. C. $\frac{19}{2}$. D. 10.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $y' = xy^2$ và $f(-1) = 1$. Tính giá trị $f(2)$.

Trả lời:

Câu 17. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{3}$; $x^2.f'(x) = f^2(x)$ với $\forall x \in [1; 2]$. Tính $f(2)$

Trả lời:

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) < 0, \forall x > 0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)f^2(x), \forall x > 0$ và $f(1) = -\frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $T = f(1) + f(2) + \dots + f(2023) + f(2024)$.

Trả lời:

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1 - \ln 2$ và $e^x f'(x) = 2^x [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của $f(1)$.

Trả lời:

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(f'(x))^2 = f(x).e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $f(2)$.

Trả lời:

Câu 21. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x).\sqrt{3x}$, với mọi $x > 0$. Tính $f(5)$.

Trả lời:

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $e^{f(x)} - \frac{x}{f'(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(1) = 1$, tính $f(e^2)$

Trả lời:

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0)=1$, $(f'(x))^3 = e^x (f(x))^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Tính $f(3)$

Trả lời:

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6 [f'(x)]^3 + 27 [f(x)-1]^4 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1)=0$. Tính giá trị của $f(2)$.

Trả lời:

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2 [1 - f(x).f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1)=f'(1)=1$. Tính giá trị $f^2(2)$.

Trả lời:

DẠNG 2

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1)

Ý tưởng giải:

◆ Ta cần nhân thêm một lượng $u(x)$ vào (1) để tạo thành $u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x)h(x)$ và lúc này:

$$u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x)h(x)$$

$$\Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = u(x)h(x)$$

$$\Rightarrow \int [u(x)f(x)]' dx = \int u(x)h(x) dx$$

$$\Rightarrow u(x)f(x) = \int u(x)h(x) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x)h(x) dx}{u(x)}$$

◆ Cách tìm $u(x)$

$$u(x) \text{ được chọn sao cho : } \begin{cases} u'(x) = A(x) \\ u(x) = B(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow \ln|u(x)| = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$$

Tóm lại phương pháp giải: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1) như sau:

+ **Bước 1:** Tìm $u(x)$: $u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$

+ **Bước 2:** Nhân $u(x)$ vào (1) $\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x)h(x) dx}{u(x)}$

2. Một số dạng đặc biệt của (1)

a) Điều kiện hàm ẩn có dạng: $\begin{cases} f'(x) + f(x) = h(x) \\ f'(x) - f(x) = h(x) \end{cases}$

Phương pháp giải:

◆ $f'(x) + f(x) = h(x)$

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

◆ $f'(x) - f(x) = h(x)$

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

b) Điều kiện hàm ẩn có dạng: $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x) dx}$ ta được

$$f'(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \Leftrightarrow \left[f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$$

Suy ra $f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} = \int e^{\int p(x) dx} h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^x$ là

A. $x^2 + x + C$.

B. $2x^2 + 2x + C$.

C. $2x^2 + x + C$.

D. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + C$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 2x \cdot f(x) = e^{-x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = e^2$.

B. $f(1) = -\frac{1}{e}$.

C. $f(1) = \frac{1}{e^2}$.

D. $f(1) = \frac{1}{e}$.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = -2 \ln 2$ và $x \cdot (x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Biết $f(2) = a + b \cdot \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị $2(a^2 + b^2)$ là

A. $\frac{27}{4}$.

B. 9.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=2\ln 2+1$, $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ.

Tính $T=a^2-b$.

A. $T=\frac{-3}{16}$.

B. $T=\frac{21}{16}$.

C. $T=\frac{3}{2}$.

D. $T=0$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=4x^2+3x$ và $f(1)=2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $y=-16x-20$.

B. $y=16x-20$.

C. $y=16x+20$.

D. $y=-16x+20$.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1)=\frac{1}{2}$. Tính $f(4)$.

A. 24.

B. 14.

C. 4.

D. 16.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$ với mọi $x>0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. 5.

B. 10.

C. 20.

D. 15.

MỘT SỐ DẠNG KHÁC

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $3x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x) = 2f^2(x)$, với $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = \frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tính $M + m$.

A. $\frac{9}{10}$.

B. $\frac{21}{10}$.

C. $\frac{5}{3}$.

D. $\frac{7}{3}$.

Câu 34. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2} (x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

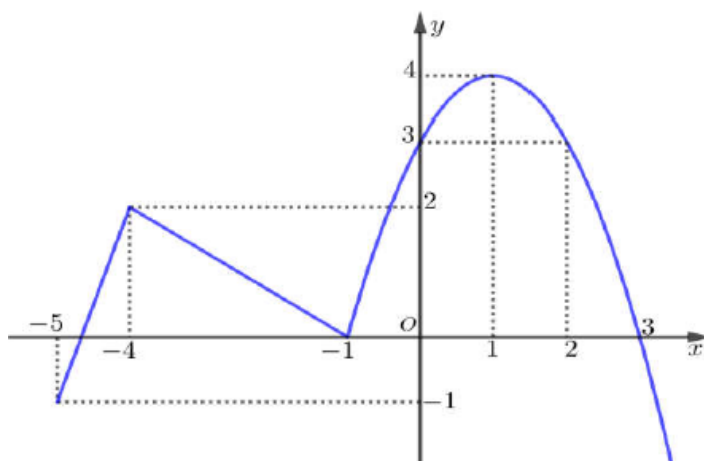
A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5; 3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$).



Biết $f(0) = 0$, giá trị của $2f(-5) + 3f(2)$ bằng

- A. 33. B. $\frac{109}{3}$. C. $\frac{35}{3}$. D. 11.