

MỤC LỤC

I. HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG MÁY TÍNH fx 570MS.....	2
II. ĐẠI SỐ.....	4
1. Tính toán thông thường và sử dụng biến nhớ:.....	4
2. Sử lý số lớn:.....	5
3. Tìm USCLN và BSCNN.....	7
4. Tìm số dư:.....	8
5. Tìm số các chữ số:.....	10
6. Tìm số chữ số cuối :.....	11
III. ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH.....	19
1. Phương trình bậc I, II, III, bậc cao và quy về bậc I, II, III, bậc cao.	19
1.1 Phương trình bậc I.....	19
1.2 Phương trình bậc II.....	20
1.3 Phương trình bậc III.....	20
1.4 Phương trình bậc cao.....	20
1.5 Quy về phương trình bậc I, II, III.....	20
1.6 Phương trình vô tỉ.....	20
2. Giải phương trình dùng SHIFT SOLVE.....	21
3. Giải phương trình bằng phương pháp lặp.....	21
4. Phương trình lượng giác.....	22
5. Phương trình, hệ phương trình mũ và logarit.....	22
5.1 Phương trình, hệ phương trình mũ.....	22
5.2 Phương trình, hệ phương trình mũ và logarit.....	23
6. Hệ phương trình bậc nhất 2, 3 ẩn.....	23
7. Tích phân, đạo hàm.....	23
8. Hàm số.....	23
8.1 Hàm số:.....	23
8.2 Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số lượng giác.....	24
8.3 Tìm độ dài cung, diện tích, thể tích.....	26
9. Phương trình hàm.....	27
10. Giải tích tổ hợp.....	28
IV. HÌNH HỌC.....	28
A. Một số công thức hay sử dụng:.....	28
B. Một số dạng tính toán:.....	29
1. Hệ thức lượng giác trong tam giác.....	29
2. Hệ thức lượng trong đường tròn.....	30
3. Véc tơ.....	30
4. Đường thẳng:.....	30
5. Mặt phẳng.....	30
6. Đường tròn:.....	30
7. Mặt cầu.....	30
8. Elíp.....	31

9. Hypebol.....	31
10. Parabol.....	31
11. Tìm giao của các đường.....	31
12. Tứ diện – hình chóp.....	31
13. Một số bài toán tham khảo.....	32
14. Một số bài toán đa giác và đường tròn.....	36

I. HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG MÁY TÍNH fx 570MS

1. Màu phím:

- Phím Trắng: Bấm trực tiếp.
- Phím vàng: Bấm qua phím **Shift**.
- Phím Xanh: Bấm trực tiếp.
- Chứa màu đỏ: Bấm qua phím **ALPHA**

2. Bật, tắt máy

- ON: Mở máy.
- Shift + OFF: Tắt máy.
- AC: Xóa màn hình, thực hiện phép tính mới.

3. Phím chức năng:

- CLS: Xóa màn hình.
- DEL: Xóa số vừa đánh.
- INS: Chèn.
- RCL: Gọi số ghi trong ô nhớ.
- STO: Gán vào ô nhớ.
- DRG: Chuyển Độ - Radial – Grad
- RND: Làm tròn.
- ENG: Chuyển dạng $a.10^n$ với n giảm.
- $\overleftarrow{\text{ENG}}$: Chuyển dạng $a.10^n$ với n tăng.
- A, B, C, D, E, F, X, Y, M: Các ô nhớ.
- M^+ : Cộng thêm vào ô nhớ M.
- M^- : Trừ bớt ô nhớ M.
- EXP: Lũy thừa 10.
- nCr: Tính tổ hợp chập r của n
- nPr: Tính chỉnh hợp chập r của n
- $O_{,,,}$: Nhập đọc Độ, Phút, Giây.
- $\overleftarrow{O}_{,,,}$: Đọc Độ, Phút, Giây.
- Re-Im: Phần thực, phần ảo.
- SHIFT + CLR: Xóa nhớ
 - Chọn 1: Mcl: Xóa các biến nhớ.
 - Chọn 2: Mode: Xóa kiểu, trạng thái, loại hình tính toán
 - Chọn 3: ALL: Xóa tất cả

4. Hàm, tính toán, và chuyển đổi:

- SIN, COS, TAN: Sin, Cosin, tan
- Sin^{-1} , COS^{-1} , TAN^{-1} : Hàm ngược Sin, Cosin, Tan.
- Log, Ln: Logarit cơ số 10, cơ số e.
- e^x , 10^x : Hàm mũ cơ số e, cơ số 10.
- x^2 , x^3 : Bình phương, lập phương.
- x^{-1} : Hàm nghịch đảo.
- x!: Giai thừa.
- %: Phần trăm.
- $a^{b/c}$: Nhập hoặc đọc phân số, hỗn số, số thập phân và ngược lại

- d/c: Đổi hỗn số ra phân số.
- POL(: Chuyển toạ độ đề các sang tạo độ thực.
- Rec(: Chuyển toạ độ cực sang toạ độ đề các.
- RAN#: Hiện số ngẫu nhiên
- DT: Nhập dữ liệu, hiện kết quả.
- S-SUM: Gọi $\sum x^2, \sum x, n$
- S-VAR: Gọi $\bar{x}, \sigma_n, \sigma_{n-1}$
 - σ_n : Độ lệch tiêu chuẩn theo n
 - σ_{n-1} : Độ lệch tiêu chuẩn theo n-1
 - n : Tổng tần số.
 - $\sum x$ Tổng các biến ước lượng
 - $\sum x^2$ Tổng bình phương các biến ước lượng
- DEC, HEX, BIN, OCT: Cơ số 10, 16, 2, 8.
- COSNT: Gọi hằng số.
- CONV: Chuyển đổi đơn vị.
- MAT, VCT: Ma trận, véc tơ.
- SOLVE: Giải phương trình.
- d/dx: Đạo hàm.
- $\int dx$: Tích phân
- CALC: Tính toán
- $\sqrt{}, \sqrt[3]{}, \sqrt[n]{}$: Căn bậc 2, bậc 3, bậc x.
- ANS: Gọi kết quả.
- Arg: Argumen
- Abs: Giá trị tuyệt đối.
- (-): Dấu âm.
- +, -, *, /, ^: Cộng, Trừ, Nhân, Chia, Mũ.
- <-, >, $\uparrow$, $\downarrow$: Di chuyển dữ liệu.
- . : Ngăn cách phần nguyên và phần thập phân
- , : Ngăn cách các giá trị trong hàm.
- (: Mở ngoặc đơn.
-) : Đóng ngoặc đơn.
- π : Số PI.

5. Sử dụng MODE:

- MODE 1:
 - Chọn 1: COMP: Chữ D hiển thị ở góc trên bên phải, là trạng thái tính toán cơ bản.
 - Chọn 2: CMPLX: Trạng thái tính toán được cả với số phức
- MODE 2:
 - Chọn 1: SD: Trạng thái giải bài toán thống kê 1 biến.
 - Chọn 2: REG: Thống kê 2 biến
 - Chọn 1: LIN: Tuyến tính
 - Chọn 2: LOG: Logarit
 - Chọn 3: Exp: Mũ
 - Chọn ->
 - Chọn 1: Pwr: Lũy thừa
 - Chọn 2: Inv: Nghịch đảo
 - Chọn 3: Quad: Bậc 2
 - Chọn 3: BASE: Chọn và làm việc với các hệ đếm
- MODE 3:
 - Chọn 1: EQN: Giải phương trình, hệ phương trình.
 - Chọn 1: UNKNOWNS: Hệ phương trình.

- Chọn 2: Hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn
- Chọn 3: Hệ phương trình bậc nhất 3 ẩn
- Chọn 2: DEGREE: Phương trình bậc 2, bậc 3.
 - Chọn 2: Phương trình bậc 2.
 - Chọn 3: Phương trình bậc 3.
- Chọn 2: MAT: Ma trận.
- Chọn 3: VCT: Véc tơ.
- MODE 4:
 - Chọn 1: Deg: Chuyển chế độ là Độ.
 - Chọn 2: Rad: Chuyển chế độ Radial.
 - Chọn 3: Gra: Chuyển chế độ Graph
- MODE 5:
 - Chọn 1: Fix: Ấn định số thập phân (0-9).
 - Chọn 2: Sci: Ấn định số có nghĩa (0-9) của số a ghi dưới dạng $a \times 10^n$.
 - Chọn 3: Norm: Chọn 1 hoặc 2 để ghi kết quả tính toán dạng khoa học $a \times 10^n$.
- MODE 6:
 - Chọn 1: DISP: Chọn kiểu hiện thị
 - Chọn 1: EngON: Hiện số dạng kỹ thuật.
 - Chọn 2: EngOFF: Không hiện số dạng kỹ thuật.
 - Chọn ->
 - Chọn 1: ab/c: Kết quả ở dạng hỗn số.
 - Chọn 2: d/c: Kết quả ở dạng phân số.
 - Chọn ->
 - Chọn 1: DOT: Dấu chấm ngăn cách phần thập phân.
 - Chọn 2: COMMA: Dấu phẩy ngăn cách phần thập phân.

II. ĐẠI SỐ

Một số công thức hay dùng:

1. $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$
2. $x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$ với n - lẻ.
3. Đồng dư: $a \equiv b \pmod{n}$ nếu a, b có cùng số dư khi chia cho n.
 - * $a \equiv b \pmod{n}$ và $b \equiv c \pmod{n}$ thì $a \equiv c \pmod{n}$
 - * $a \equiv b \pmod{n} \implies \begin{cases} ac \equiv bc \pmod{n} \\ a+c \equiv b+c \pmod{n} \\ a-c \equiv b-c \pmod{n} \end{cases}$
 - * $(a+b)^m \equiv b^m \pmod{n}$, với $n > 0$
 - * Định lý Ferma: Cho $p \in \mathbb{P}$, $(a, b) \equiv 1$ thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

1. Tính toán thông thường và sử dụng biến nhớ:

VD1: Tính giá trị biểu thức A ở:

$$A = 3 + \frac{15}{a + \frac{5}{7 + \frac{6}{5}}} = \frac{5685}{1342}.$$

§5: $a = 9$

VD2: $A = \left(\frac{x^2 + xy}{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3} \right) : \left(\frac{1}{x-y} - \frac{2xy}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3} \right)$

Với $x = 3,545$ và $y = 1,479$.

$A \approx 2,431752178$

VD3:

1) Tính:

$$S = \frac{(1^4 + \frac{1}{4})(3^4 + \frac{1}{4}) \dots (999^4 + \frac{1}{4})}{(2^4 + \frac{1}{4})(4^4 + \frac{1}{4}) \dots (1000^4 + \frac{1}{4})}$$

$$S = \frac{(1^4 + \frac{1}{4})(3^4 + \frac{1}{4}) \dots ((2n+1)^4 + \frac{1}{4})}{(2^4 + \frac{1}{4})(4^4 + \frac{1}{4}) \dots ((2n+2)^4 + \frac{1}{4})}$$

$$= \frac{1}{(2n+2)^2 + (2n+2)^3}$$

VD4: Cho $\sin x = 0,7$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) và $\cos y = -0,8$ ($\pi < y < \frac{3\pi}{2}$). Tính gần đúng với 5 chữ số thập phân:

a. $A = \frac{x^3 + \operatorname{tg}^4 x}{\sin^2(x + x^2) + \cos^2(x - x^2)}$ $A \approx 0,71882$

b. $B = \frac{\operatorname{tg}^5(x^2 + 2y^2) + \cot g^5(x^2 - 2y^2)}{\sin^3(x + y) + \cos^3(x - y)}$ $B \approx -889,59389$

VD5: 4) Tháng vừa qua có thứ 7 ngày 7 tháng 7 năm 2007. Theo cách tính dương lịch ở từ điển trên mạng wikipedia một năm có 365,2425 ngày.

Vậy dựa vào cách tính trên thì đến ngày 7 tháng 7 năm 7777 sẽ là thứ mấy ? (ta chỉ tính theo lý thuyết còn thực tế có thể có điều chỉnh khác).

ĐÁP SỐ : Thứ 2 ngày 7 tháng 7 năm 7777

Lời giải :

Ngày 7 tháng 7 năm 7777 - Ngày 7 tháng 7 năm 2007 = 5770 năm

$5770 \times 365,2425 = 2107449,225$ ngày

$2107449,225 \div 7 = 301064,175$ tuần

$0,175 \times 7 = 1,225$ ngày

Suy ra : Thứ 2 ngày 7 tháng 7 năm 7777

2. Sử lý số lớn:

Sử dụng phương pháp chia nhỏ và kết hợp giữa máy và cộng trên giấy.

VD 1: Tính chính xác $A = 7684352 \times 4325319$

HD:

$$(768.10^4 + 4352)(432.10^4 + 5319)$$

$$= 331776.10^8 + 4084992.10^4 + 1880064.10^4 + 23148288$$

$$= 33237273708288$$

VD 2: Tính chính xác $B = 375214^2 + 215843^3$

HD:

$$= (375.10^3 + 214)^2 + (251.10^3 + 843)^3$$

$$= 140625.10^6 + 160500.10^3 + 45796 + 9938375.10^9$$

$$+ 16903025.10^6 + 45836605.10^3 + 599077107$$

$$= 10055877778236903$$

VD 3: Tính chính xác $Q = 3333355555 \times 3333377777$

ĐS: $Q = 11111333329876501235$

VD 4: Tìm số dư: $2222255555 \times 2222266666$

ĐS: 493844444209829630.

VD 5:

Tính giá trị của biểu thức

$$A = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{25} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{25} + \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{26} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{26}$$

ĐS : 422934570312500

(Trích bài 3 đề thi máy tính CASIO chọn đội tuyển cấp THCS tại Tp.HCM ngày 28/1/2007)

Người giải : Trần Minh Thế - Bộ phận Đầu tư giáo dục

Lời giải chi tiết : Dễ thấy $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$ là bội

của 5 .

Dùng máy tính CASIO fx-570MS để tính

xem $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^x$ (với x là các số tự nhiên từ 2

đến 26) có là bội của 5 hay không ?

Ấn 1 SHIFT STO X

Ghi vào màn hình

$$X = X + 1 : (((5+\sqrt{5})\div 2)^X + ((5-\sqrt{5})\div 2)^X) \div 5$$

Và ấn = lần lượt ta thấy khi x chạy từ 2 đến 19 thì

$\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^x$ là bội của 5 vì kết quả đều là số

nguyên , khi x lớn hơn 19 thì kết quả vượt quá 10 chữ số hiển thị nên ta tiếp tục tính khi x = 25 và x = 26 thì

$\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^x$ có chia hết cho 5 hay bội của 5

hay không ? .

Vậy để kết quả hiển thị được trên màn hình máy tính

Casio ta lấy lần lượt

$\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{25} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{25}$; $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{26} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{26}$ chia cho

bội của 5 . ta chọn bội của 5 là 5^y

với y là các số tự nhiên lớn hơn 1

Ấn 1 SHIFT STO Y

Ghi vào màn hình

$$Y = Y + 1 : (((5+\sqrt{5})\div 2)^{25} + ((5-\sqrt{5})\div 2)^{25}) \div 5^Y$$

Và ấn = lần lượt ta thấy trên máy hiện số nguyên là

khi y chạy từ 6 đến 15 .Chọn số bất trong khoảng từ 6 đến 15 .

Chọn y = 15 ta được :

$$\left[\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{25} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{25} \right] \div 5^{15} = 3001$$

$$\text{Hay } \left[\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{25} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{25} \right] = 3001 \times 5^{15}$$

Làm tương tự như trên ta có :

$$\left[\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} \right)^{26} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} \right)^{26} \right] = 271443 \times 5^{13}$$

Cuối cùng

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} \right)^{25} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} \right)^{25} + \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} \right)^{26} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} \right)^{26} \\ &= 3001 \times 5^{15} + 271443 \times 5^{13} \\ &= 5^{13} \times (3001 \times 5^2 + 271443) \\ &= 1220703125 \times 346468 \\ &= 422934570312500 \end{aligned}$$

VD: Tính 123456789.987654321 các bạn xài máy 570es chỉ cần xác định 4 chữ số tận cùng bằng cách lấy 6789.4321=...5269

Sử dụng es tính 123456789.987654321 = 1,219326311.10¹⁷ SHIFT STO A

A-1,21932631.10¹⁷ = 112635000

Lắp 4 chữ số tận cùng vào ta được kết quả 12193263112635269

VD 6: Tính

$$P = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{77 \cdot \underbrace{\square \cdot \square}_{17 \text{ số } 7}}_{17 \text{ số } 7} - 293972367^2$$

ĐS : 526837050

Lời giải chi tiết :

Lập quy trình ấn phím như sau :

Gán 1 cho A ấn 1 SHIFT STO A

Gán 7 cho B ấn 7 SHIFT STO B

Gán 7 cho C ấn 7 SHIFT STO C

Ghi vào màn hình : **A = A + 1 : B = 10B + 7 : C = C + B**

Ấn = cho đến khi màn hình hiện A = 17 và ấn = hai lần

$$C = 8,641975309 \times 10^{16}$$

Ấn tiếp ALPHA C - 293972367² = Kết quả : 526800000

P = 526800000, ta tìm thêm 5 số cuối và nghi ngờ rằng số 8 có thể đã được làm tròn. (Lưu ý thí sinh nên cẩn thận : vì máy fx -570MS có tính toán bên trong đến 12 chữ số với số có mũ 2, mũ 3, còn mũ lớn hơn 3 hoặc số nguyên thì tính toán bên trong là 10 chữ số, để chắc chắn các bạn nên tính thêm trên máy ES có tính toán bên trong cao hơn).

Tính tiếp tục : Vì cần tìm 5 số cuối của tổng P nên ta chỉ lấy tổng đến 5 chữ số 7 trong các số từ

77777 đến $\underbrace{77 \cdot \underbrace{\square \cdot \square}_{17 \text{ số } 7}}_{17 \text{ số } 7}$

Vậy ta có : **C = 7 + 77 + 777 + 7777 + 77777 × 13** .Kết quả : **1019739**

Và tính 72367² = 5236982689 (sáu số cuối của số 293972367²)

Năm số cuối của P là :

$$P = 1019739 - 82689 = \mathbf{37050}$$

Ta thấy kết quả P = **526837050** (chắc chắn số 8 đã không bị làm tròn vì sau số 8 là số 3 nên số 8 không thể làm tròn)

3. Tìm USCLN và BSCNN

* Tìm USCLN:

- Dạng 1: Số không quá lớn

$$\text{USCLN}(a, b) = m \Rightarrow \begin{cases} a = m \cdot x \\ b = m \cdot y \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{x}{y} \Rightarrow m = \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

VD: Tìm USCLN (3456; 1234)

HD: Bấm 3456/1234 (a/b)=1728/617(x/y)

Vậy: USCLN(3456; 1234) = 3456/1728 = 2.

- Dạng 2: Số quá lớn:

C1. $USCLN(a, b) = \begin{cases} USCLN(a - b, b) & \text{vì } a > b \\ USCLN(a, b - a) & \text{vì } a < b \end{cases}$
Cứ tiếp tục đến khi $a = b$ đó là m

C2. $USCLN(a, b) = \begin{cases} USCLN(Mod(a, b), b) & \text{vì } a > b \\ USCLN(a, Mod(b, a)) & \text{vì } a < b \end{cases}$
Cứ tiếp tục đến khi số dư bằng không thì $b = m$.

* Tìm BSCNN

$$BSCNN(a, b) = \frac{a.b}{USCLN(a, b)}$$

VD: Cho $a = 1408884$ và $b = 7401274$. Tìm $USCLN(a; b)$, $BSCNN(a, b)$

$$7401274 = 5 \times 1408884 + 356854$$

$$1408884 = 3 \times 356854 + 338322$$

$$356854 = 1 \times 338322 + 18532$$

$$338322 = 18 \times 18532 + 4746$$

$$18532 = 3 \times 4746 + 4294$$

$$4294 = 1 \times 4294 + 452$$

$$4294 = 9 \times 452 + 226$$

$$452 = 226 \times 2 + 0$$

Vậy $USCLN(a; b) = 226$

$$\begin{aligned} BSCNN(a, b) &= \frac{a.b}{USCLN(a; b)} = \frac{1408884 \times 7401274}{226} \\ &= 6234 \times 7401274 \\ &= 6234 \times (7401 \times 10^3 + 274) \\ &= 46137834 \times 10^3 + 1708116 \\ &= 46139542116. \end{aligned}$$

4. Tìm số dư:

* Dạng 1: Thông thường.

$$Mod(a, b) = a - b.[a, b]$$

VD: Tìm số dư của 56789 và 54321

ĐS:

* Dạng 2: Số chữ số lớn hơn 10 chữ số: Ta dùng phương pháp chia để trị.

- Cắt ra thành nhóm đầu 9 chữ số (kể từ bên trái) tìm số dư của số này với số bị chia.

- Viết liên tiếp sau số dư các số còn lại của số chia tới đa đủ 9 chữ số, rồi tìm số dư lần 2.

- Tiếp tục như vậy đến hết.

VD 1: Tìm số dư: 506507508506507508 : 2006

HD:

Thực hiện Tìm số dư : 5065075086 : 2006 dư : 1313

Thực hiện Tìm số dư : 1313065075 : 2006 dư : 1667

Thực hiện Tìm số dư : 166708 : 2006 dư : 210

⇒ Đây cũng là số dư của bài

VD 2: Tìm số dư 103200610320061032006 : 2010

ĐS: 396

* Dạng 3: Tìm số dư của một lũy thừa bậc cao cho một số.

Bài toán: Tìm số dư khi chia a^n cho m ($a \in \mathbb{Z}; m, n \in \mathbb{N}^*$)

Trường hợp 1: Khi $m = p$ là số nguyên tố

+) Áp dụng định lý Fermat.

Trường hợp 2: $m = p.q$ (ở đó $(p, q) = 1$)

*) Giả sử a^n chia cho p dư r_1 , a^n chia cho q dư r_2 ($0 \leq r_1 < p$; $0 \leq r_2 < q$).

Tìm số dư khi chia a^n cho $p.q$?

❖ Nếu $r_1 = r_2$ thì $a^n \equiv r_1 \pmod{pq}$?

❖ Nếu $r_1 \neq r_2$, giả sử $a^n \equiv r_0 \pmod{pq}$ ($0 \leq r_0 < pq$)

$$\Rightarrow \begin{cases} r_0 \equiv r_1 \pmod{p} \Rightarrow r_0 = r_1 + pt \\ r_0 \equiv r_2 \pmod{q} \end{cases} \quad (\text{ta phải đi tìm } t)$$

? Ta đi tìm t để $r_1 + pt \equiv r_2 \pmod{q}$

(Cho t lần lượt các giá trị từ 0 đến $q-1$, khi đó $r_1 + pt$ có q số dư khác nhau đối với q . Nên tồn tại t_0 để: $r_1 + pt_0 \equiv r_2 \pmod{q}$)

suy ra t_0 là giá trị cần tìm.

Trường hợp 3

$m = p^2$ (p là số nguyên tố)

*) $(a, p) = 1$ $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow a^{p(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^2}$

*) ta đi tìm số dư khi chia n cho $p(p-1)$

Phương pháp: quan sát xem có nằm trong dạng Fermat không?

Nếu không, hãy quan sát chu kỳ số dư

Nếu không có chu kỳ số dư hãy làm từng bước: lấy cơ số lũy thừa lên vài bậc (không tràn máy), tìm số dư rồi tiếp tục lũy thừa lên cho đến khi số mũ nhỏ dần. Chú ý sử dụng tính chất: phép chia a^n cho b và phép $(b-a)^n$ cho b có cùng số dư với $a < b$ để làm nhỏ a lại, tạo điều kiện tính nhanh hơn.

VD 1: Tìm số dư 9^{1999} cho 12.

Áp dụng $\begin{cases} a \equiv m \pmod{p} \\ b \equiv n \pmod{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab \equiv mn \pmod{p} \\ a^n \equiv m^n \pmod{p} \end{cases}$

Ta có: $9^1 \equiv 9 \pmod{12}$; $9^2 \equiv 9 \pmod{12}$; $9^3 \equiv 9 \pmod{12}$

$$\Rightarrow 9^9 \equiv 9 \pmod{12} \quad \Rightarrow 9^{10} \equiv 9 \pmod{12}$$

$$\Rightarrow 9^{100} = (9^{10})^{10} \equiv 9^{10} \pmod{12} \equiv 9 \pmod{12}$$

$$\Rightarrow 9^{1000} = (9^{100})^{10} \equiv 9^{100} \pmod{12} \equiv 9 \pmod{12}$$

$$\Rightarrow 9^{900} = (9^9)^{100} \equiv 9^9 \pmod{12} \equiv 9 \pmod{12}$$

$$\Rightarrow 9^{90} = (9^9)^{10} \equiv 9^9 \pmod{12} \equiv 9 \pmod{12}$$

$$\text{Vậy: } 9^{1999} = 9^{1000} \cdot 9^{900} \cdot 9^{90} \cdot 9^9 \equiv 9^3 \pmod{12} \equiv 9 \pmod{12}$$

Hay 9^{1999} chia cho 9 dư 9.

VD 2: Tìm số dư 9^{1999} cho 33.

Ta có: $9^1 \equiv 9 \pmod{33}$

$$9^6 \equiv 9 \pmod{33}$$

$$9^2 \equiv 15 \pmod{33}$$

$$9^7 \equiv 15 \pmod{33}$$

$$9^3 \equiv 3 \pmod{33}$$

$$9^8 \equiv 3 \pmod{33}$$

$$9^4 \equiv 27 \pmod{33}$$

$$9^9 \equiv 27 \pmod{33}$$

$$9^5 \equiv 12 \pmod{33}$$

$$9^{10} \equiv 12 \pmod{33}$$

$\Rightarrow$

Vậy: $9^{1999} = 9^{5 \cdot 399 + 4} \equiv 27 \pmod{33}$. Hay 9^{1999} chia cho 33 dư 27.

VD 3: Tìm số dư 2004^{376} cho 1975

HD: Biết $376 = 6 \cdot 62 + 4$

$$2004^2 \equiv 841 \pmod{1975}$$

$$2004^4 \equiv 481^2 \equiv 231$$

$$2004^{12} \equiv 231^3 \equiv 416$$

$$2004^{48} \equiv 416^2 \equiv 536$$

$$2004^{60} \equiv 536 \times 416 \equiv 1776$$

$$2004^{62} \equiv 1776 \times 841^2 \equiv 516$$

$$2004^{62 \times 3} \equiv 516^3 \equiv 1171$$

$$2004^{62 \times 6} \equiv 1171^2 \equiv 591$$

$$2004^{62 \times 6 + 4} \equiv 591 \times 231 \equiv 246$$

VD 4: Tìm số dư $A = 2^{100} + 2^{201} + \dots + 2^{2007}$ chia cho 2007.

BÀI TOÁN HAY và KHÓ đối với học sinh THCS

Cho $A = 2^{100} + 2^{101} + 2^{102} + \dots + 2^{2007}$. Tìm số dư khi chia A cho 2007
ĐS : 1557

(Trích bài 4 đề thi máy tính CASIO chọn đội tuyển cấp THCS tại Tp.HCM ngày 28/1/2007)

Người giải : Trần Minh Thế - Bộ phận Đầu tư giáo dục

Lời giải chi tiết : Ta thấy A là tổng cấp số nhân với công bội là $q = 2$,

$$u_1 = 2^{100}$$

Ta có tổng $S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$ với $n = 1908$ (từ 100 đến 2007 có 1908 số hạng)

$$\text{Suy ra } S_{1908} = \frac{2^{100} \times (1-2^{1908})}{1-2} = 2^{100}(2^{1908} - 1)$$

Bây giờ chỉ cần tìm số dư khi chia $2^{100}(2^{1908} - 1)$ cho 2007

+ Trước tiên tìm số dư khi chia 2^{100} cho 2007

$$2^{20} = 1048576 \equiv 922 \pmod{2007}$$

Ta có : $2^{100} = (2^{20})^5 \equiv 922^5$

Lúc này chỉ cần tìm số dư khi chia 922^5 cho 2007

$$922^3 \equiv 1801 \pmod{2007}$$

$$922^2 \equiv 1123 \pmod{2007} \text{ suy ra } 922^5 \equiv 1801 \times 1123 \equiv 1474 \pmod{2007}$$

Vậy số dư khi chia 2^{100} cho 2007 là 1474

+ Tiếp tục tìm số dư khi chia $2^{1908} - 1$ cho 2007

$$\text{Đã có } 2^{100} \equiv 1474 \pmod{2007}$$

$$2^{1900} \equiv 1474^{19} \equiv 610 \pmod{2007} \text{ tính như sau}$$

$$1474^3 \equiv 685 \pmod{2007}$$

$$1474^9 \equiv 685^3 \equiv 82 \pmod{2007}$$

$$1474^9 = 1474^{18} \times 1474 \equiv (1474^9)^2 \times 1474 \equiv 82^2 \times 1474 \equiv 610 \pmod{2007}$$

Tính tiếp

$$2^8 \equiv 256 \pmod{2007}$$

$$2^{1908} \equiv 610 \times 256 \equiv 1621 \pmod{2007}$$

$$\text{Suy ra } 2^{1908} - 1 \equiv 1621 - 1 \equiv 1620 \pmod{2007}$$

$$\text{Cuối cùng ta có } 2^{100} \times (2^{1908} - 1) \equiv 1474 \times 1620 \equiv 1557 \pmod{2007}$$

ĐÁP SỐ : 1557

* Dạng 4: Tìm số dư khi chia đa thức P(x) cho $(ax + b)$

Phương pháp: Tính $P(-b/a)$. KQ là số dư.

VD: Tìm số dư khi chia đa thức $x^2 + 10 + (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ cho $(10x-3)$

$$\text{ĐS: } -45,78407$$

5. Tìm số các chữ số:

* Dạng a^n : Phương pháp: Số các chữ số của a^x là $[x \cdot \lg a] + 1$.

CM:

G/s $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ ta chứng minh $[\lg A] + 1 = n$ hay $[\lg A] = n - 1$

Do đó $n - 1 \leq \lg A < n$. Thật vậy.

$$A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n \Rightarrow \lg A \geq n - 1$$

$$A \leq \overline{9 a_1 a_2 \dots a_n} = 9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \dots + 9 \Rightarrow \lg A < n$$

Đó là điều phải chứng minh.

VD 1: Tìm số chữ số của 2^{22425} .

$$HD: [22425.lg2] + 1 = [22425.0,30103] + 1 = [6750,597] + 1 = 6751.$$

VD 2: Tìm số chữ số của 465^{26} .

ĐS: 70.

VD 3: Tìm số chữ số của $123!$

$$[Lg123!]+1 = [Lg(1.2.3...123)]+1 = [Lg1+Lg2+...+Lg123] + 1 = ...$$

BT: Dùng bao nhiêu chữ số để viết số: 453^{246} , 209^{237} . ĐS: 657, 550

6. Tìm số chữ số cuối :

Tính chất 1 :

a) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6 khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

b) Các số có chữ số tận cùng là 4, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

c) Các số có chữ số tận cùng là 3, 7, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n$ (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 1.

d) Các số có chữ số tận cùng là 2, 4, 8 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n$ (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 6.

Việc chứng minh tính chất trên không khó, xin dành cho bạn đọc. Như vậy, muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$, trước hết ta xác định chữ số tận cùng của a .

- Nếu chữ số tận cùng của a là 0, 1, 5, 6 thì x cũng có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6.

- Nếu chữ số tận cùng của a là 3, 7, 9, vì $a^m = a^{4n+r} = a^{4n} \cdot a^r$ với $r = 0, 1, 2, 3$ nên từ tính chất 1c $\Rightarrow$ chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của a^r .

- Nếu chữ số tận cùng của a là 2, 4, 8, cũng như trường hợp trên, từ tính chất 1d $\Rightarrow$ chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của $6 \cdot a^r$.

Bài toán 1 : Tìm chữ số tận cùng của các số : a) 7^{99} b) 14^{1414} c) 4^{567}

Lời giải :

a) Trước hết, ta tìm số dư của phép chia 99 cho 4 :

$$9^9 - 1 = (9 - 1)(9^8 + 9^7 + \dots + 9 + 1) \text{ chia hết cho } 4$$

$$\Rightarrow 99 = 4k + 1 \text{ (k thuộc N)} \Rightarrow 7^{99} = 7^{4k+1} = 7^{4k} \cdot 7$$

Do 7^{4k} có chữ số tận cùng là 1 (theo tính chất 1c) $\Rightarrow 7^{99}$ có chữ số tận cùng là 7.

b) Dễ thấy $14^{14} = 4k$ (k thuộc N) $\Rightarrow$ theo tính chất 1d thì $14^{1414} = 14^{4k}$ có chữ số tận cùng là 6.

c) Ta có $5^{67} - 1$ chia hết cho 4 $\Rightarrow 5^{67} = 4k + 1$ (k thuộc N)

$$\Rightarrow 4^{567} = 4^{4k+1} = 4^{4k} \cdot 4, \text{ theo tính chất 1d, } 4^{4k} \text{ có chữ số tận cùng là 6 nên } 4^{567} \text{ có chữ số tận cùng là 4.}$$

Tính chất sau được $\Rightarrow$ từ tính chất 1.

Tính chất 2 : Một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 1$ (n thuộc N) thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

Chữ số tận cùng của một tổng các lũy thừa được xác định bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng.

Bài toán 2 : Tìm chữ số tận cùng của tổng $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2004^{8009}$.

Lời giải :

Nhận xét : Mọi lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+1}$, n thuộc $\{2, 3, \dots, 2004\}$).

Theo tính chất 2, mọi lũy thừa trong S và các cơ số tương ứng đều có chữ số tận cùng giống nhau, bằng chữ số tận cùng của tổng :

$$(2 + 3 + \dots + 9) + 199 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) + 1 + 2 + 3 + 4 = 200(1 + 2 + \dots + 9) + 9 = 9009.$$

Vậy chữ số tận cùng của tổng S là 9.

Từ tính chất 1 tiếp tục $\Rightarrow$ tính chất 3.

Tính chất 3 :

a) Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 7 ; số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 3.

b) Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 8 ; số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ có chữ số tận cùng là 2.

c) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9, khi nâng lên lũy thừa bậc $4n + 3$ sẽ không thay đổi chữ số tận cùng.

Bài toán 3 : Tìm chữ số tận cùng của tổng $T = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2004^{8011}$.

Lời giải :

Nhận xét : Mọi lũy thừa trong T đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 3 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+3}$, n thuộc $\{2, 3, \dots, 2004\}$).

Theo tính chất 3 thì 2^3 có chữ số tận cùng là 8 ; 3^7 có chữ số tận cùng là 7 ; 4^{11} có chữ số tận cùng là 4 ; ...

Như vậy, tổng T có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của tổng : $(8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 199.(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 1 + 8 + 7 + 4 = 200(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 8 + 7 + 4 = 9019$.

Vậy chữ số tận cùng của tổng T là 9.

* Trong một số bài toán khác, việc tìm chữ số tận cùng dẫn đến lời giải khá độc đáo.

Bài toán 4 : Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000} .

Lời giải : 1995^{2000} tận cùng bởi chữ số 5 nên chia hết cho 5. Vì vậy, ta đặt vấn đề là liệu $n^2 + n + 1$ có chia hết cho 5 không ?

Ta có $n^2 + n = n(n + 1)$, là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên chữ số tận cùng của $n^2 + n$ chỉ có thể là 0 ; 2 ; 6 $\Rightarrow n^2 + n + 1$ chỉ có thể tận cùng là 1 ; 3 ; 7 $\Rightarrow n^2 + n + 1$ không chia hết cho 5.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000} .

Sử dụng tính chất “*một số chính phương chỉ có thể tận cùng bởi các chữ số 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9*”, ta có thể giải được bài toán sau :

Bài toán 5 : Chứng minh rằng các tổng sau không thể là số chính phương :

a) $M = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k$ (với k chẵn)

b) $N = 2004^{2004k} + 2003$

Sử dụng tính chất “*một số nguyên tố lớn hơn 5 chỉ có thể tận cùng bởi các chữ số 1 ; 3 ; 7 ; 9*”, ta tiếp tục giải quyết được bài toán :

Bài toán 6 : Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng : $p^{8n} + 3.p^{4n} - 4$ chia hết cho 5.

* Các bạn hãy giải các bài tập sau :

Bài 1 : Tìm số dư của các phép chia :

a) $2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2003^{8005}$ cho 5

b) $2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2003^{8007}$ cho 5

Bài 2 : Tìm chữ số tận cùng của X, Y :

$X = 2^2 + 3^6 + 4^{10} + \dots + 2004^{8010}$

$Y = 2^8 + 3^{12} + 4^{16} + \dots + 2004^{8016}$

Bài 3 : Chứng minh rằng chữ số tận cùng của hai tổng sau giống nhau :

$U = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2005^{8013}$

$V = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2005^{8015}$

Bài 4 : Chứng minh rằng không tồn tại các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn :

$19^x + 5^y + 1980z = 1975^{430} + 2004$.

* Các bạn thử nghiên cứu các tính chất và phương pháp tìm nhiều hơn một chữ số tận cùng của một số tự nhiên, chúng ta sẽ tiếp tục trao đổi về vấn đề này.

*** Tìm hai chữ số tận cùng**

Nhận xét : Nếu $x \in \mathbb{N}$ và $x = 100k + y$, trong đó $k ; y \in \mathbb{N}$ thì hai chữ số tận cùng của x cũng chính là hai chữ số tận cùng của y.

Hiển nhiên là $y \leq x$. Như vậy, để đơn giản việc tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên x thì thay vào đó ta đi tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên y (nhỏ hơn).

Rõ ràng số y càng nhỏ thì việc tìm các chữ số tận cùng của y càng đơn giản hơn.

Từ nhận xét trên, ta đề xuất phương pháp tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$ như sau :

Trường hợp 1 : Nếu a chẵn thì $x = a^m : 2^m$. Gọi n là số tự nhiên sao cho $a^{n-1} : 25$.

Viết $m = p^n + q$ ($p ; q \in \mathbb{N}$), trong đó q là số nhỏ nhất để $a^q : 4$ ta có :

$x = a^m = a^q(a^{p^n} - 1) + a^q$.

Vì $a^{n-1} : 25 \Rightarrow a^{p^n} - 1 : 25$. Mặt khác, do $(4, 25) = 1$ nên $a^q(a^{p^n} - 1) : 100$.

Vậy hai chữ số tận cùng của a^m cũng chính là hai chữ số tận cùng của a^q . Tiếp theo, ta tìm hai chữ số tận cùng của a^q .

Trường hợp 2 : Nếu a lẻ, gọi n là số tự nhiên sao cho $a^{n-1} : 100$.

Viết $m = u^n + v$ ($u, v \in \mathbb{N}, 0 \leq v < n$) ta có :

$$x = a^m = a^v(a^{un} - 1) + a^v.$$

$$\text{Vì } a^n - 1 : 100 \Rightarrow a^{un} - 1 : 100.$$

Vậy hai chữ số tận cùng của a^m cũng chính là hai chữ số tận cùng của a^v . Tiếp theo, ta tìm hai chữ số tận cùng của a^v .

Trong cả hai trường hợp trên, chìa khóa để giải được bài toán là chúng ta phải tìm được số tự nhiên n . Nếu n càng nhỏ thì q và v càng nhỏ nên sẽ dễ dàng tìm hai chữ số tận cùng của a^q và a^v .

Bài toán 7 : Tìm hai chữ số tận cùng của các số : a) a^{2003} b) 7^{99}

Lời giải : a) Do 2^{2003} là số chẵn, theo trường hợp 1, ta tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $2^n - 1 : 25$.

$$\text{Ta có } 2^{10} = 1024 \Rightarrow 2^{10} + 1 = 1025 : 25 \Rightarrow 2^{20} - 1 = (2^{10} + 1)(2^{10} - 1) : 25 \Rightarrow 2^3(2^{20} - 1) : 100.$$

Mặt khác :

$$2^{2003} = 2^3(2^{2000} - 1) + 2^3 = 2^3((2^{20})^{100} - 1) + 2^3 = 100k + 8 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Vậy hai chữ số tận cùng của 2^{2003} là 08.

b) Do 7^{99} là số lẻ, theo trường hợp 2, ta tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho $7^n - 1 : 100$.

$$\text{Ta có } 7^4 = 2401 \Rightarrow 7^4 - 1 : 100.$$

$$\text{Mặt khác : } 9^9 - 1 : 4 \Rightarrow 9^9 = 4k + 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\text{Vậy } 7^{99} = 7^{4k+1} = 7(7^{4k} - 1) + 7 = 100q + 7 \quad (q \in \mathbb{N}) \text{ tận cùng bởi hai chữ số } 07.$$

Bài toán 8 : Tìm số dư của phép chia 3^{517} cho 25.

Lời giải : Trước hết ta tìm hai chữ số tận cùng của 3^{517} . Do số này lẻ nên theo trường hợp 2, ta phải tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $3^n - 1 : 100$.

$$\text{Ta có } 3^{10} = 9^5 = 59049 \Rightarrow 3^{10} + 1 : 50 \Rightarrow 3^{20} - 1 = (3^{10} + 1)(3^{10} - 1) : 100.$$

$$\text{Mặt khác : } 5^{16} - 1 : 4 \Rightarrow 5(5^{16} - 1) : 20$$

$$\Rightarrow 5^{17} = 5(5^{16} - 1) + 5 = 20k + 5 \Rightarrow 3^{517} = 3^{20k+5} = 3^5(3^{20k} - 1) + 3^5 = 3^5(3^{20k} - 1) + 243, \text{ có hai chữ số tận cùng là } 43.$$

Vậy số dư của phép chia 3^{517} cho 25 là 18.

Trong trường hợp số đã cho chia hết cho 4 thì ta có thể tìm theo cách gián tiếp.

Trước tiên, ta tìm số dư của phép chia số đó cho 25, từ đó suy ra các khả năng của hai chữ số tận cùng. Cuối cùng, dựa vào giả thiết chia hết cho 4 để chọn giá trị đúng.

Các thí dụ trên cho thấy rằng, nếu $a = 2$ hoặc $a = 3$ thì $n = 20$; nếu $a = 7$ thì $n = 4$.

Một câu hỏi đặt ra là : Nếu a bất kì thì n nhỏ nhất là bao nhiêu ? Ta có tính chất sau đây (bạn đọc tự chứng minh).

Tính chất 4 : Nếu $a \in \mathbb{N}$ và $(a, 5) = 1$ thì $a^{20} - 1 : 25$.

Bài toán 9 : Tìm hai chữ số tận cùng của các tổng :

$$\text{a) } S_1 = 1^{2002} + 2^{2002} + 3^{2002} + \dots + 2004^{2002}$$

$$\text{b) } S_2 = 1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + \dots + 2004^{2003}$$

Lời giải :

a) Dễ thấy, nếu a chẵn thì a^2 chia hết cho 4; nếu a lẻ thì $a^{100} - 1$ chia hết cho 4; nếu a chia hết cho 5 thì a^2 chia hết cho 25.

Mặt khác, từ tính chất 4 ta suy ra với mọi $a \in \mathbb{N}$ và $(a, 5) = 1$ ta có $a^{100} - 1 : 25$.

Vậy với mọi $a \in \mathbb{N}$ ta có $a^2(a^{100} - 1) : 100$.

$$\text{Do đó } S_1 = 1^{2002} + 2^2(2^{2000} - 1) + \dots + 2004^2(2004^{2000} - 1) + 2^2 + 3^2 + \dots + 2004^2.$$

Vì thế hai chữ số tận cùng của tổng S_1 cũng chính là hai chữ số tận cùng của tổng $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2004^2$. áp dụng công thức :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

$$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + 2004^2 = 2005 \times 4009 \times 334 = 2684707030, \text{ tận cùng là } 30.$$

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S_1 là 30.

$$\text{b) Hoàn toàn tương tự như câu a, } S_2 = 1^{2003} + 2^3(2^{2000} - 1) + \dots + 2004^3(2004^{2000} - 1) + 2^3 + 3^3 +$$

$$2004^3. \text{ Vì thế, hai chữ số tận cùng của tổng } S_2 \text{ cũng chính là hai chữ số tận cùng của } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2004^3.$$

áp dụng công thức :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$\Rightarrow 1^3 + 2^3 + \dots + 2004^3 = (2005 \times 1002)^2 = 4036121180100$, tận cùng là 00.

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S_2 là 00.

Trở lại bài toán 5 (TTT2 số 15), ta thấy rằng có thể sử dụng việc tìm chữ số tận cùng để nhận biết một số không phải là số chính phương. Ta cũng có thể nhận biết điều đó thông qua việc tìm hai chữ số tận cùng.

Ta có tính chất sau đây (bạn đọc tự chứng minh).

Tính chất 5 : Số tự nhiên A không phải là số chính phương nếu :

- + A có chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8 ;
- + A có chữ số tận cùng là 6 mà chữ số hàng chục là chữ số chẵn ;
- + A có chữ số hàng đơn vị khác 6 mà chữ số hàng chục là lẻ ;
- + A có chữ số hàng đơn vị là 5 mà chữ số hàng chục khác 2 ;
- + A có hai chữ số tận cùng là lẻ.

Bài toán 10 : Cho $n \in \mathbb{N}$ và $n - 1$ không chia hết cho 4. Chứng minh rằng $7^n + 2$ không thể là số chính phương.

Lời giải : Do $n - 1$ không chia hết cho 4 nên $n = 4k + r$ ($r \in \{0, 2, 3\}$). Ta có $7^4 - 1 = 2400 : 100$. Ta viết $7^n + 2 = 7^{4k+r} + 2 = 7^r(7^{4k} - 1) + 7^r + 2$.

Vậy hai chữ số tận cùng của $7^n + 2$ cũng chính là hai chữ số tận cùng của $7^r + 2$ ($r = 0, 2, 3$) nên chỉ có thể là 03, 51, 45. Theo tính chất 5 thì rõ ràng $7^n + 2$ không thể là số chính phương khi n không chia hết cho 4.

* Tìm ba chữ số tận cùng

Nhận xét : Tương tự như trường hợp tìm hai chữ số tận cùng, việc tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên x chính là việc tìm số dư của phép chia x cho 1000.

Nếu $x = 1000k + y$, trong đó $k, y \in \mathbb{N}$ thì ba chữ số tận cùng của x cũng chính là ba chữ số tận cùng của y ($y \leq x$).

Do $1000 = 8 \times 125$ mà $(8, 125) = 1$ nên ta đề xuất phương pháp tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$ như sau :

Trường hợp 1 : Nếu a chẵn thì $x = a^m$ chia hết cho 2^m . Gọi n là số tự nhiên sao cho $a^n - 1$ chia hết cho 125.

Viết $m = p^n + q$ ($p, q \in \mathbb{N}$), trong đó q là số nhỏ nhất để a^q chia hết cho 8 ta có :

$$x = a^m = a^q(a^{p^n} - 1) + a^q.$$

Vì $a^n - 1$ chia hết cho 125 $\Rightarrow a^{p^n} - 1$ chia hết cho 125. Mặt khác, do $(8, 125) = 1$ nên $a^q(a^{p^n} - 1)$ chia hết cho 1000.

Vậy ba chữ số tận cùng của a^m cũng chính là ba chữ số tận cùng của a^q . Tiếp theo, ta tìm ba chữ số tận cùng của a^q .

Trường hợp 2 : Nếu a lẻ, gọi n là số tự nhiên sao cho $a^n - 1$ chia hết cho 1000.

Viết $m = u^n + v$ ($u, v \in \mathbb{N}, 0 \leq v < n$) ta có :

$$x = a^m = a^v(a^{u^n} - 1) + a^v.$$

Vì $a^n - 1$ chia hết cho 1000 $\Rightarrow a^{u^n} - 1$ chia hết cho 1000.

Vậy ba chữ số tận cùng của a^m cũng chính là ba chữ số tận cùng của a^v . Tiếp theo, ta tìm ba chữ số tận cùng của a^v .

Tính chất sau được suy ra từ tính chất 4.

Tính chất 6 :

Nếu $a \in \mathbb{N}$ và $(a, 5) = 1$ thì $a^{100} - 1$ chia hết cho 125.

Chứng minh : Do $a^{20} - 1$ chia hết cho 25 nên $a^{20}, a^{40}, a^{60}, a^{80}$ khi chia cho 25 có cùng số dư là

1 $\Rightarrow a^{20} + a^{40} + a^{60} + a^{80} + 1$ chia hết cho 5. Vậy $a^{100} - 1 = (a^{20} - 1)(a^{80} + a^{60} + a^{40} + a^{20} + 1)$ chia hết cho 125.

Bài toán 11 : Tìm ba chữ số tận cùng của 123^{101} .

Lời giải : Theo tính chất 6, do $(123, 5) = 1 \Rightarrow 123^{100} - 1$ chia hết cho 125 (1).

Mặt khác :

$$123^{100} - 1 = (123^{25} - 1)(123^{25} + 1)(123^{50} + 1) \Rightarrow 123^{100} - 1 \text{ chia hết cho } 8 \quad (2).$$

Vì $(8, 125) = 1$, từ (1) và (2) suy ra : $123^{100} - 1$ chỉ hết cho 1000

$$\Rightarrow 123^{101} = 123(123^{100} - 1) + 123 = 1000k + 123 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Vậy 123^{101} có ba chữ số tận cùng là 123.

Bài toán 12 : Tìm ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$.

Lời giải : Theo tính chất 6, do $(9, 5) = 1 \Rightarrow 9^{100} - 1$ chỉ hết cho 125 (1).

Tương tự bài 11, ta có $9^{100} - 1$ chia hết cho 8 (2).

Vì $(8, 125) = 1$, từ (1) và (2) suy ra : $9^{100} - 1$ chia hết cho 1000 $\Rightarrow 3^{399 \dots 98} = 9^{199 \dots 9} = 9^{100p + 99} = 9^{99}(9^{100p} - 1) + 9^{99} = 1000q + 9^{99} \quad (p, q \in \mathbb{N})$.

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$ cũng chính là ba chữ số tận cùng của 9^{99} .

Lại vì $9^{100} - 1$ chia hết cho 1000 $\Rightarrow$ ba chữ số tận cùng của 9^{100} là 001 mà $9^{99} = 9^{100} : 9 \Rightarrow$ ba chữ số tận cùng của 9^{99} là 889 (để kiểm tra chữ số tận cùng của 9^{99} là 9, sau đó dựa vào phép nhân

$??9 \times 9 = \dots 001$ để xác định $??9 = 889$).

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$ là 889.

Nếu số đã cho chia hết cho 8 thì ta cũng có thể tìm ba chữ số tận cùng một cách gián tiếp theo các bước : Tìm dư của phép chia số đó cho 125, từ đó suy ra các khả năng của ba chữ số tận cùng, cuối cùng kiểm tra điều kiện chia hết cho 8 để chọn giá trị đúng.

Bài toán 13 : Tìm ba chữ số tận cùng của 2004^{200} .

Lời giải : do $(2004, 5) = 1$ (tính chất 6)

$$\Rightarrow 2004^{100} \text{ chia cho } 125 \text{ dư } 1$$

$$\Rightarrow 2004^{200} = (2004^{100})^2 \text{ chia cho } 125 \text{ dư } 1$$

$\Rightarrow 2004^{200}$ chỉ có thể tận cùng là 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876. Do 2004^{200} chia hết cho 8 nên chỉ có thể tận cùng là 376.

Từ phương pháp tìm hai và ba chữ số tận cùng đã trình bày, chúng ta có thể mở rộng để tìm nhiều hơn ba chữ số tận cùng của một số tự nhiên.

Sau đây là một số bài tập vận dụng :

Bài 1 : Chứng minh $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ chia hết cho 5 khi và chỉ khi n không chia hết cho 4.

Bài 2 : Chứng minh $9^{20002003}, 7^{20002003}$ có chữ số tận cùng giống nhau.

Bài 3 : Tìm hai chữ số tận cùng của : a) 3^{999} b) 11^{1213}

Bài 4 : Tìm hai chữ số tận cùng của : $S = 2^3 + 2^{23} + \dots + 2^{40023}$

Bài 5 : Tìm ba chữ số tận cùng của : $S = 1^{2004} + 2^{2004} + \dots + 2003^{2004}$

Bài 6 : Cho $(a, 10) = 1$. Chứng minh rằng ba chữ số tận cùng của a^{101} cũng bằng ba chữ số tận cùng của a .

Bài 7 : Cho A là một số chẵn không chia hết cho 10. Hãy tìm ba chữ số tận cùng của A^{200} .

Bài 8 : Tìm ba chữ số tận cùng của số : $1993^{19941995 \dots 2000}$

Bài 9 : Tìm sáu chữ số tận cùng của 5^{21} .

7. Bài toán về đa thức:

1. Một số tính chất cơ bản: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$$+ P(x) : (x - a) \Leftrightarrow P(a) = 0.$$

$$+ P(x) \text{ chia cho } (x - a) \text{ có số dư là } P(a).$$

$$+ P(x) \text{ chia cho } (ax - b) \text{ có số dư là } \frac{1}{a} P\left(\frac{b}{a}\right).$$

+ Nếu đa thức với hệ số hữu tỉ và nếu $P(x)$ có nghiệm hữu tỉ thì tử là ước của a_0 và mẫu là ước của a_n .

+ Nếu đa thức $P(x)$ chia cho $Q(x)$ và có số dư là $R(x)$ thì bậc của $R(x)$ bé hơn bậc $Q(x)$.

2. Các dạng toán:

a. Tìm hệ số của đa thức:

Phương pháp giải: Dựa về hệ phương trình để giải hoặc phương pháp cân bằng hệ số.

b. Tính giá trị của đa thức:

Phương pháp giải: Dùng máy tính nhập đa thức vào rồi tính các giá trị cần tính.

c. Các bài toán liên quan đến phép chia trong đa thức:

Phương pháp giải: Dùng phép chia thông thường và định lý Bozu.

*** Ví dụ:** Cho đa thức: $P(x) = 2009x^{12} - 2008x^{11} + 2007x^5 - 2006x^4 + 12$. Tìm số dư của phép chia :

a/ $P(x)$ cho $x-2$.

b/ $P(x)$ cho $2x-3$.

c/ $P(x)$ cho $x^2 - 3x + 2$.

*** Giải:**

Nhập đa thức $P(x)$ vào màn hình.

a/ Ấn CACL tại $x=2$, ta được số dư là: 4148620.

b/ Ấn CACL tại $x=3/2$, sau đó lấy kết quả chia cho 2 ta được số dư là: 46035,28821.

c/ Ta viết: $P(x) = (x^2 - 3x + 2).Q(x) + (ax+b)$. ($ax+b$ là số dư, $Q(x)$ là thương).

Cho $x=1$, ta được: $14=a+b$ (1).

Cho $x=2$, ta được: $4148620=2a+b$ (2).

Từ (1) và (2), ta có: $a=4148606$; $b=-4148592$.

Vậy số dư là $4148606.x-4148592$.

(Ở đây ta phải chú ý rằng $x=1$ và $x=2$ là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x + 2=0$)

d. Tìm đa thức thỏa mãn một số điều kiện nào đó:

Dùng các tính chất trên để giải.

e. Tính tổng của một vài hệ số của đa thức:

Dùng tính chất của đa thức, nhị thức Newton và đạo hàm (chỉ dùng cho lớp 12).

Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

$$\sum_{k=0}^n a_k = P(1).$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = P(-1).$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2k} = \frac{P(1) + P(-1)}{2}.$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2k+1} = \frac{P(1) - P(-1)}{2}.$$

$$\sum_{k=0}^n k a_k = P'(1)$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k a_k = P'(-1)$$

Ví dụ: Cho khai triển $(x^2 - x + 1)^{2007}$ thành đa thức $P(x)$
 $= a_{4014} x^{4014} + a_{4013} x^{4013} + \dots + a_1 x + a_0$.

a. Tính tổng các hệ số của đa thức trên.

b. Tính tổng các hệ số thứ chẵn của đa thức trên.

c. $\sum_{k=1}^{4014} k a_k$.

8. Số tự nhiên tuần hoàn - Dấu hiệu chia hết.

9. Dãy số.

I. Một số tính chất của một vài dãy số:

1. Cấp số cộng:

a. Định nghĩa: Là một dãy số sao cho số hạng liền sau hơn số hạng liền trước d đơn vị (d không đổi và ta gọi d là công bội).

b. Tính chất:

- Cấp số cộng có thể định nghĩa trực tiếp như sau:
$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + d \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Số hạng tổng quát của cấp số cộng là: $u_n = u_1 + (n-1)d$.

- Tổng $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = n \left[u_1 + \frac{(n-1)d}{2} \right]$

* $u_n - u_k = (n-k)d$

* $u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n$

* $u_{n-k} + u_{n+k} = 2u_n$

2. Cấp số nhân:

a. Định nghĩa: Là một dãy số mà số hạng liền sau gấp q lần số hạng đứng liền trước (q không đổi và ta gọi q là công bội)

b. Tính chất:

- Cấp số nhân còn được định nghĩa: $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = qu_n \end{cases}$

- Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 q^{n-1}$

- Tổng $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

* $\frac{u_n}{u_k} = q^{n-k}$

* $u_{n-1} u_{n+1} = u_{n-k} u_{n+k} = u_n^2$

3. Dãy số cho bởi công thức truy hồi:

a. Dãy tuyến tính cấp hai thuần nhất: $\begin{cases} u_1, u_2 \\ u_n = a.u_{n-1} + b.u_{n-2} \end{cases} \quad \forall n \geq 3$

Số hạng tổng quát: $u_n = C_1 \cdot \alpha^n + C_2 \cdot \beta^n$ (1) trong α, β là hai nghiệm phân biệt của phương trình: $x^2 - ax - b = 0$ (phương trình này được gọi là phương trình đặc trưng của dãy số)

Sau đó thay n=1 và n=2 vào (1), đưa về hệ phương trình để tìm C_1, C_2 .

* Nếu phương trình $x^2 - ax - b = 0$ có nghiệm kép $\alpha = \beta$ thì số hạng tổng quát của dãy có dạng: $u_n = (C_1 + nC_2) \beta^n$. Sau đó thay vào dãy số để tìm C_1, C_2 .

* Quy trình bấm phím để tìm số hạng tổng quát:

+ Gán $u_1 = A, u_2 = B, D=3$ (đây là biến đếm của dãy số, bắt đầu tính từ số hạng thứ 3).

+ Lập quy trình tính như sau: $C=a.B+b.A : A=B : B=C : D=D+1$.

+ Đối với máy MS thì chỉ cần bấm dấu bằng liên tục thì được kết quả cần tìm (phải chú ý biến đếm), còn đối với máy ES thì trước khi bấm dấu bằng thì phải bấm phím CACL.

b. Dãy tuyến tính cấp hai thuần nhất: $\begin{cases} u_1, u_2, u_3 \\ u_n = a.u_{n-1} + b.u_{n-2} + c.u_{n-3} \end{cases} \quad \forall n \geq 4$

Số hạng tổng quát: $u_n = C_1 \cdot \alpha^n + C_2 \cdot \beta^n + C_3 \cdot \gamma^n$ (1) trong α, β, γ là ba nghiệm phân biệt của phương trình: $x^3 - ax^2 - bx - c = 0$ (phương trình này được gọi là phương trình đặc trưng của dãy số)

Sau đó thay $n=1$, $n=2$ và $n=3$ vào (1), đưa về hệ phương trình để tìm C_1, C_2, C_3 .

*** Quy trình bấm phím để tìm số hạng tổng quát:**

Làm tương tự như trên, nhưng chỉ cần thêm một biến gán nữa.

c. Hệ dãy số cấp hai:

$$\begin{cases} u_{n+1} = a.u_n + b.v_n & (1) \\ v_{n+1} = c.u_n + d.v_n & (2) \end{cases} \quad \text{ở đây } u_1, v_1 \text{ cho trước.}$$

*** Tìm số hạng tổng quát:**

- Từ (2) ta có: $v_n = c.u_{n-1} + d.v_{n-1}$ thay vào (1), ta được:

$$u_{n+1} = a.u_n + b(c.u_{n-1} + d.v_{n-1}) \quad \text{hay} \quad u_{n+1} = a.u_n + bc.u_{n-1} + d.b.v_{n-1}$$

(*)).

Mặc khác từ (1) ta lại có: $b.v_{n-1} = u_n - a.u_{n-1}$. Thay vào (*), ta được:

$$u_{n+1} = a.u_n + bc.u_{n-1} + d.(u_n - a.u_{n-1}).$$

Vậy $u_{n+1} = (a + d).u_n + (bc - ad).u_{n-1}$. Đây là dãy tuyến tính cấp 2 mà ta đã biết.

- Làm tương tự như trên ta được: $v_{n+1} = (b + c).v_n + (ad - bc).v_{n-1}$.

*** Lập quy trình bấm phím để tính số hạng tổng quát:**

- Gán $u_1 = A$, $v_1 = B$, $D=2$ (đây là biến đếm của dãy số, bắt đầu tính từ số hạng thứ 2).
- Lập quy trình tính như sau: $X=a.A+b.B : Y=c.A+d.B : A=X : B=Y : D=D+1$. (Ở đây X là giá trị của dãy (u) và Y là giá trị của dãy (v)).
- Đối với máy MS thì chỉ cần bấm dấu bằng liên tục thì được kết quả cần tìm (phải chú ý biến đếm), còn đối với máy ES thì trước khi bấm dấu bằng thì phải bấm phím CACL.

d. Hệ dãy số cấp hai chắn lẻ:

$$\begin{cases} u_n = a.u_{n-1} + b.u_{n-2} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ v_n = c.u_{n-1} + d.u_{n-2} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases} \quad \text{ở đây } u_1, v_1 \text{ cho trước.}$$

*** Tìm số hạng tổng quát:**

- Đặt $\begin{cases} a_n = u_{2n-1} \\ b_n = u_{2n} \end{cases}$ khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} b_n = a.a_{n-1} + b.b_{n-1} \\ a_n = c.b_{n-1} + d.a_{n-1} \end{cases}$ và $\begin{cases} a_1 = u_1 \\ b_1 = u_2 \end{cases}$.

Đây chính là hệ dãy số cấp hai ở dạng trên. Nên ta dễ dàng tính được số hạng tổng quát.

*** Quy trình bấm phím để tính số hạng tổng quát:**

- Gán $u_1 = A$, $u_2 = B$, $D=3$ (đây là biến đếm của dãy số, bắt đầu tính từ số hạng thứ 3).
- Lập quy trình tính như sau: $X=a.B+b.A : D=D+1 : Y=c.X+d.B : A=X : B=Y : D=D+1$. (Ở đây X là giá trị của dãy (u) lẻ và Y là giá trị của dãy (u) chẵn).
- Đối với máy MS thì chỉ cần bấm dấu bằng liên tục thì được kết quả cần tìm (phải chú ý biến đếm), còn đối với máy ES thì trước khi bấm dấu bằng thì phải bấm phím CACL.

II. Một số dạng toán:

1. Lập quy trình bấm phím để tính số hạng bất kì của dãy số:

Cũng như các dãy số trên, đối với các dãy số bất kỳ ta cũng lập một quy trình bấm phím tương tự nhưng phải chú ý đến cách gán giá trị để quy trình cho kết quả chính xác.

- Ví dụ:** Lập quy trình bấm phím để tính các giá trị của dãy số:

$$u_1 = 1; u_n = \frac{2008u_{n-1}}{2009 - u_{n-1}}.$$

2. Tìm giá trị liên quan đến các số hạng của dãy số:

Phương pháp giải: Tìm số hạng tổng quát của dãy hoặc dùng quy trình bấm máy trên máy tính.

- Tính tổng và tích các số hạng của dãy số: Lập quy trình bấm phím tính các số hạng của dãy số, đồng thời thêm một biến vào để tính tổng và tích.
- Các bài toán liên quan đến các số hạng của dãy số:

3. Một số bài toán liên quan đến tính tuần hoàn của dãy số:

Phương pháp giải: Dùng công thức số hạng tổng quát để chứng minh hoặc dùng quy trình bấm trên máy tính rồi tổng quát lên.

- **Ví dụ:** Cho dãy số: $u_1 = 1; u_2 = 2; u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2}$. Lập quy trình để tìm số dư của phép chia u_n cho 11. Tìm số dư của phép chia u_{2008} cho 11.

- **Giải:**

❖ Tìm chu kì của số dư: Gọi a_n là số dư của phép chia u_n cho 11.

Khi đó ta có: $a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 2a_2 + 3a_1 = 8; a_4 = 2a_3 + 3a_2 = 0$.

Tương tự ta được: $a_5 = 2; a_6 = 4; a_7 = 3; a_8 = 7; a_9 = 1; a_{10} = 1; a_{11} = 5; a_{12} = 2; a_{13} = 8; a_{14} = 0; a_{15} = 2; a_{16} = 4; a_{17} = 3;$

Như vậy các số dư lập thành một dãy: 1,2,8,0,2,4,3,7,1,1,5,2,8,0,2,4,3,... Là một dãy tuần hoàn bắt đầu từ số hạng thứ hai với chu kì là 10.

Và từ trên ta có: $a_{2008} = a_8 = 7$.

4. Tính giới hạn của dãy số và hàm số:

- **Đối với dãy số:** Ta nhập quy trình bán phím để tính giá trị của các số hạng, sau đó bấm dấu bằng liên tục sao cho giá trị trên màn hình không thay đổi thì ta được giá trị giới hạn.
- **Đối với hàm số:** Nhập hàm số vào máy tính, rồi bấm nút CACL tại một điểm gần với biên giới hạn thì ta có kết quả.

- **Ví dụ:** Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x+4} - \sqrt{3x-2}}{x-2}$.

+ Nhập vào máy tính hàm số trên và ấn nút CACL tại $x=1,9999999$ thì ta được kết quả là $-7/12$. (cách tính này đôi lúc không chính xác, ta nên kiểm tra lại bằng cách tính sau).

+ Tính đạo hàm hàm số ở tử tại $x=2$ ta được kết quả là $-0.5833333333333333 = -7/12$.

III. ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

1. Phương trình bậc I, II, III, bậc cao và quy về bậc I, II, III, bậc cao.

1.1 Phương trình bậc I

VD1: Giải phương trình $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{5}}\right)x - \left(\frac{1-\sqrt{6}}{3+\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{7}}{4-\sqrt{3}}\right) = \frac{15-\sqrt{11}}{2\sqrt{3}-5}$

(Đề thi chọn HSG TP HCM năm 2004)

ĐS: $x = 1,4492$.

VD2:
$$\frac{1}{2 + \frac{3}{4 + \frac{5}{6 + \frac{7}{8}}}} = \frac{1}{3 + \frac{2}{5 + \frac{3}{7 + \frac{4}{9}}}} + x \left[4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} \right]$$

ĐS: $x = \frac{301}{16714}$

VD3: Giải phương trình
$$3 + \frac{5}{a + \frac{2}{7 + \frac{6}{5}}} = \frac{5685}{1342}$$

ĐS: $a=9$

VD4: Tìm giá trị trung bình cộng của x và y (chính xác đến 9 chữ số thập phân):

DS:

VD5: Tìm x biết :

HD:

ấn liên tiếp $x^{-1} \times 3 - 8$ và ấn 9 lần phím $=$.

KO : x = - 1.11963298

VD1: TỶnh g©n ®óng vi 5 ch÷ s¸ th¸p ph©n c¸a t¸ng l¸p ph¸ng c¸c nghiÖm c¸a ph¸ng tr¸nh:

$$x_1^3 + x_2^3 \approx -103.26484$$

VD3: Giải pt: $\sin \frac{\pi}{5} x^2 - 25\sqrt[4]{e^{2,73}} x - 7 \log_{4,8} 254 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx 5,626 \\ x_2 \approx -0,498 \end{cases}$

(Trích đề thi KV BTHPT 2006)

$$\text{VD: } 385x^3 + 261x^2 - 157x - 105 = 0$$

$\text{DS: } -5/7; -3/5; 7/11$

1.4 Phương trình bậc cao.

$$\text{VD: } 72x^4 + 84x^3 - 46x^2 - 13x + 3 = 0$$

DS: -3/2; -1/3; 1/6; 1/2

1.5 Quy về phương trình bậc I, II, III.

VD1: Giải phương trình: $5^{\sin^2 x} - 5^{\cos^2 x} = 0$

VD2: Giải phương trình: $\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} 9^x + 3\sqrt[5]{2 + 3\sqrt{3}} 3^3 - 4\sqrt[7]{3 - \sqrt{2}} = 0$

VD3: Giải phương trình: $3\log_5(3x+1) - (2\sqrt{3}+1)\log_5(3x+1) - 5\sqrt{3}+3=0$

1.6 Phương trình vô tỉ.

VD1: Giải phương trình: $\sqrt{130307 + 140307\sqrt{1+x}} = 1 + \sqrt{130307 - 140307\sqrt{1+x}}$

(trích đề thi KV THCS 2007)

DS: -0,99999338

VD2: Giải phương trình:

$$\sqrt{x+178408256-26614\sqrt{x+1332007}}+\sqrt{x+178381643-26612\sqrt{x+1332007}}=1$$

(trích đề thi KV THCS 2007)

ĐS: $x_1=175744242$; $x_2=175717629$

VD3: 1) Giải phương trình: $\sqrt{a+b\sqrt{1-x}} = 1 + \sqrt{a-b\sqrt{1-x}}$ theo a, b

(trích đề thi KV THCS 2004)

$$\text{ĐS: } x = \frac{4b^2 - 4a + 1}{4b^2}$$

2) Tính với a = 250204; b=260204

ĐS: 0,999996304

2. Giải phương trình dùng **SHIFT SOLVE**

VD1: Tìm 1 nghiệm pt: $x^9 - 2x^7 + x^4 + 5x^3 + x - 12 = 0$

HD: Nhập công thức: Shifts Solve; X? nhập 1 để dò; Shift Solve

ĐS: 1,26857 (45,85566667)

VD2: Tìm 1 nghiệm pt: $x^{60} + x^{20} - x^{12} + 8x^9 + 4x - 15 = 0$

ĐS: Dò với x = 1: 1,011458; Dò với x = 10: -1.05918

3. Giải phương trình bằng phương pháp lặp

GPT: $f(x) = 0$ đưa về $x = g(x)$ - hội tụ.

- Lấy mốc x_0 tính $x_1 = g(x_0)$; $x_2 = g(x_1)$;

* **Dạng 1:**

1) $x - \sqrt[8]{x} = 1 \Rightarrow x = 1 + \sqrt[8]{x}$

2) $x - \ln x = 0 \Rightarrow x = e^{-x}$.

3) $\cos x - \tan x = 0 \Rightarrow x = \arctg(\cos x)$

4) $2^x + 3^x + 5^x = 7^x \Rightarrow x = \frac{\lg(2^x + 3^x + 5^x)}{\lg 7}$

5) $\sqrt{x+1} = \frac{3}{x-1} \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{x+1}} + 1$ ĐS: $x \approx 2,584543981$

* **Dạng 2:** Tìm giới hạn.

1) $x = \sin(a - \sin(a - \dots - \sin a))$, (n - lần)

VD: a = 2, 1/3, 5/5,

2) $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = bu_n + \frac{c}{u_n} \end{cases}; (n \geq 1)$

VD: Cho $\begin{cases} U_1 = 2; \\ U_{n+1} = \frac{3 + \frac{2}{U_n}}{5 - \frac{3}{U_n + 1}}; (n \geq 1) \end{cases}$

Tìm gần đúng đến 9 chữ số thập phân giới hạn của dãy số.

ĐS:

* **Dạng 3:** $a^x = bx + c \sin x$

Có 2 nghiệm $\begin{cases} x = \frac{\ln(bx + c \sin x)}{\ln a} \\ \sin y = \frac{a^{-y} + by}{c} \end{cases}$

VD: $2^x = x + 2 \sin x$

* **Dạng 4:** $a^x = bx + c \cos x$

Có 2 nghiệm $\begin{cases} x = \frac{\ln(bx + c \cos x)}{\ln a} \\ \cos y = \frac{a^{-y} + by}{c} \end{cases}$

VD: $3^x = x + 2 \cos x$

* **Dạng 5:** $a^x = bx + c$

VD: 1) $3^x = 4x + 5$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = \frac{\ln(4x+5)}{\ln 3} \\ x = \frac{3^x - 5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \approx 2,453653788 \\ x \approx 1,81750117 \end{cases}$$

$$2) 3^x - x - 5 = 0$$

* Dạng 6: $x^x = a \Rightarrow x = \frac{\ln a}{\ln x}; (a > 0)$

4. Phương trình lượng giác

VD1: Tất cả các nghiệm gần đúng với 5 chữ số thập phân(tính bằng radian) của phương trình : $3 \sin 2x + 4 \cos 2x = 5 \sin x$ là:

$$x_1 \approx -0,92730 + k2\pi \quad x_2 \approx 0,73810 + k\frac{2\pi}{3}$$

VD2: Tìm các nghiệm gần đúng (bằng radian) của pt:

$$4,3 \sin^2 x - \sin 2x - 3,5 \cos^2 x = 1,2; x \in (0; \pi)$$

(trích thi chọn HSG TPHCM 2006)

$$\text{ĐS: } 1,0109; 2,3817$$

VD3: Tìm nghiệm gần đúng theo (độ, phút, giây) của pt:

$$\sin x \cos x + 3(\sin x - \cos x) = 2 \text{ (Trích đề thi KV THPT 2007)}$$

ĐS:

$$x_1 \approx 67^\circ 54' 33'' + k360^\circ; x_2 \approx 202^\circ 5' 27'' + k360^\circ$$

VD4: Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình:

$$\sin \pi x^2 = \sin(\pi(x^2 + 2x)) \text{ (Trích đề thi KV THPT 2004)}$$

$$\text{ĐS: } x=1; x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}; x \approx 0,3660$$

VD5: Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình:

$$\cos \pi x^2 = \cos \pi(x^2 + 2x + 1) \text{ (Trích đề thi KV THPT 2006)}$$

$$\text{ĐS: } x=0,5; x \approx 0,3660$$

VD6: Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình:

$$\sin \pi x^3 = \cos(\pi(x^3 + 2x^2)) \text{ (Trích đề thi HSG 12 Thừa Thiên Huế 2006)}$$

$$\text{ĐS: } x \approx 0,4196433776$$

5. Phương trình, hệ phương trình mũ và logarit.

5.1 Phương trình, hệ phương trình mũ.

VD1: Giải phương trình: $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x + (\sqrt{7-\sqrt{48}})^x = 14$

VD2: Giải phương trình: $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 2^x$

VD3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3^x + 4^y = 5 \\ 9^x + 16^y = 19 \end{cases}$ (Trích đề thi KV THPT 2007)

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x_1 \approx 1,3283 \\ y_1 \approx -0,2602 \end{cases}; \begin{cases} x_2 \approx -0,3283 \\ y_2 \approx 1,0526 \end{cases}$$

VD4: Giải phương trình: $3^{2x+1} = 3^{x+2} + \sqrt{1-6 \cdot 3^x} + 3^{2(x+1)}$

$$\text{HD: Đặt } 3^x = t \Rightarrow x = \log_3 \frac{6 + \sqrt{33}}{2}$$

5.2 Phương trình, hệ phương trình logarit.

VD1: Giải phương trình: $x^{\frac{\lg x + 5}{3}} = 10^{5 + \lg x}$

HD: Logarit hóa, đưa về phương trình bậc 2.

VD2: Giải hệ: $\begin{cases} x \log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 x \\ x \log_2 12 + \log_3 x = y + \log_2 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \approx 2,4094 \\ y \approx 4,8188 \end{cases}$

VD3: Giải hệ: $\begin{cases} x + \log_2 y = y \log_2 3 + \log_2 x \\ x \log_2 72 + \log_2 x = 2y + \log_2 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \approx 0,4608 \\ y \approx 0,9217 \end{cases}$

(Trích đề thi KV THPT 2007)

5.2 Phương trình, hệ phương trình mũ và logarit.

VD1: Giải hệ
$$\begin{cases} 4x + 3\log_5 y = 51 \\ 5.4x - \frac{71}{2} \cdot \log_5 y = 14 \end{cases}$$

ĐS: $x \approx 1,78483; y \approx 2166,10066$

VD2: Giải hệ:
$$\begin{cases} 9^{\log_2(xy)} = 3 + 2(xy)^{\log_2 3} \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 3x + 3y + 6 \quad (2) \end{cases}$$

HD: (1) $3^{2\log_2(xy)} = 3 + 2.3^{\log_2(xy)} \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow xy = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{5 \mp \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

6. Hệ phương trình bậc nhất 2, 3 ẩn.

VD1: Giải hệ
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0 \\ x^2 + y^2 - 5x + 8y - 4 = 0 \end{cases}$$

(4,33085; 0,78518)	(-1,13085; -0,38518)
--------------------	----------------------

VD2: Giải hệ phương trình.

$$\begin{cases} 3x^2 + 2.3^y - 5 \cdot \log_5 z = \frac{2}{3} \\ \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{3} \cdot 3^y + \frac{2}{3} \cdot \log_5 z = 3\frac{2}{5} \\ 3.21x^2 - 3.32.3^y - 2.13 \cdot \log_5 z = 3,253 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \approx \pm 2,115296646 \\ y \approx 0,280169373 \\ z \approx 145,7736364 \end{cases}$$

7. Tích phân, đạo hàm.

VD1: Cho $f(x) = 2^{2x+5\lg x-3} + 5^{3x^2+3\cos x-2}$

1) Tính giá trị của hàm số tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{7}$

2) Gọi $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm A(1; -2) và tiếp xúc với $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{7}$

. Tìm giá trị a, b, c.

$f(\frac{\pi}{7}) \approx 8,267035509$		
$a \approx -67,68964813$	$b \approx 79,44202941$	$c \approx -13,75238128$

VD2: Cho $f(x) = 3^{x^3+3\lg x-5} + 2^{2x^2+\cos x-1}$.

1) Tính giá trị của hàm số tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{5}$ chính xác đến 5 chữ số thập phân.

ĐS: $f(\frac{\pi}{5}) \approx 1,51701$

2) Gọi $y = Ax^2 + Bx + C$ đi qua điểm M(1;2) và tiếp xúc với $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{5}$.

Hãy tìm các giá trị của A, B, C chính xác đến 5 chữ số thập phân.

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ \frac{2\pi}{5} (A+B) = f(\frac{\pi}{5}) \\ \frac{\pi^2}{25} (A+\frac{\pi}{5}B+C) = f(\frac{\pi}{5}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=2 \\ A+B=2,03091 \\ A+\frac{\pi}{5}B+C \approx 1,51701 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \approx -1,86781 \\ B \approx 2,86781 \\ C \approx 0,86781 \end{cases}$$

8. Hàm số.

8.1 Hàm số:

Một số dạng thường gặp:

Cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n} = \dots$

1) Đi qua 3 điểm A, B, C. Tìm các hệ số của f(x).

2) Tìm tọa độ cực trị của f(x).

- 3) Viết phương trình đường thẳng đi qua cực trị của $f(x)$.
- 4) Tính khoảng cách giữa cực đại và cực tiểu.
- 5) Cho $y = Q(x) = kx + p = kx^2 + px + q = \dots$ tiếp xúc với $f(x)$ tại $x = x_0$. Tìm các hệ số của $Q(x)$.
- 6) Viết phương trình tiếp tuyến của $f(x)$ tại $x = x_0$.
- 7) Tìm các hệ số của $Q(x)$ tiếp xúc với đồ thị và đi qua điểm A, B.
- 8) Tìm tọa độ giao điểm của $f(x)$ và $g(x)$.

VD1: Tính gần đúng giá trị của a, b nếu $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y =$

$$\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$$
 tại tiếp điểm có hoành độ $x = 1 + \sqrt{2}$

(trích đề thi KV THPT 2004)

ĐS: $a \approx -0,046037833; b \approx 0,743600694$

VD2: Tính khoảng cách gần đúng giữa các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y =$

$$\frac{x^2+5x+1}{3x-2}$$
 (trích đề thi KV THPT 2004)

ĐS: $d \approx 5,254040186$

VD3: Cho $y = \frac{a \sin x + b \cos x}{c \cos x + 1}$ đi qua A(1; 3/2); B(-1; 0); C(-2; -2). Tính gần đúng a, b, c.

(Trích đề thi KV THPT 2004)

ĐS: $x \approx 1,077523881; b \approx 1,678144016; c \approx 0,386709636$

VD4: Tìm gần đúng giá trị CĐ, CT của hs: $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 1}{x^2 + 4x + 5}$

(Trích đề thi KV THPT 2007)

ĐS: $f_{CD} \approx -0,4035; f_{CT} = 25,4035$

VD5: Cho hs: $y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 2}$. Tìm tích khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đồ thị đến 2 đường

tiệm cận với độ chính xác cao nhất.

(Trích đề thi HSG Phú Thọ 2004)

ĐS: $d_1 d_2 = \frac{9}{\sqrt{2}} = 6,3639961031$

VD6: Cho $y = \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - x + 1}$

(Trích đề thi chọn HSG 12 Thừa Thiên Huế 2006)

1. Xác định CĐ, CT và khoảng cách giữa các điểm CĐ và CT hàm số.

ĐS: $\begin{cases} x_1 = 1,204634926 \\ y_1 = -0,02913709779 \end{cases}; \begin{cases} x_2 = -0,1277118491 \\ y_2 = 3,120046189 \end{cases}; d = 3,41943026$

2. Xác định tọa độ điểm uốn của đồ thị

$\begin{cases} x_1 = 1,800535877 \\ y_1 = 0,05391214491 \end{cases}; \begin{cases} x_2 = 0,2772043294 \\ y_2 = 1,854213065 \end{cases}; \begin{cases} x_3 = -0,4623555914 \\ y_3 = 2,728237897 \end{cases}$

8.2 Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số lượng giác.

Dạng 1:

- 1) $f(x) = a \cos 2x + b \cos x + c$
- 2) $f(x) = a \cos 2x + b \sin x + c$
- 3) $f(x) = a \sin 2x + b(\sin x + \cos x) + c$
- 4) $f(x) = m(\sin^3 x + \cos^3 x) + n \sin 2x + p$
- 5) $f(x) = m(\sin^3 x \pm \cos^3 x) + n \sin x \cos x + p$

Dạng 2:

- 1) $f(x) = ax + b \sin x + c; x \in (0; 2\pi)$
- 2) $f(x) = ax + b \cos x + c; x \in (0; 2\pi)$

Dạng 3:

$$f(x) = \frac{a \sin x + b \cos x + c}{m \sin x + n \cos x + p}$$

VD:

- 1) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x - \sin 2x$
- 2) $f(x) = \sin x \cos x + \sin x - \cos x + 1$
- 3) $f(x) = 4 \cos 2x + 5 \cos x + \sqrt{3}$

4) $f(x) = 2x + 3\cos x; x \in (0; 2\pi)$

5) $f(x) = \frac{2\sin x + 3\cos x - 1}{\cos x + 2}$ (trích đề thi KV THPT 2004)

ĐS: -4,270083225; 0,936749892

Dạng 4: Tính $f'(x)$

VD: Tìm Max, Min: $f(x) = 2x + 3 + \sqrt{3x - x^2} + 2$

ĐS: Max $\approx 10,6098$; Min $\approx 1,8769$

8.3 Tìm độ dài cung, diện tích, thể tích.

Tính độ dài cung của đường biểu diễn hàm số $y = f(x)$

Với máy CASIO fx 570 ta có thể đưa bài toán tính độ dài cung của đường biểu diễn hàm số $y = f(x)$ cho học sinh lớp 12 PTTH được chăng?

Ví dụ:

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ có đồ thị (C)

a. Vẽ đồ thị (C) của hàm số.

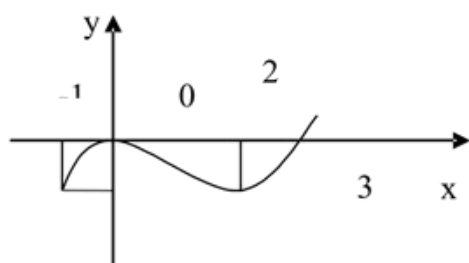
b. Tính thể tích (kết quả lấy 3 chữ số thập phân) vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi (C) và đường $y=0$ quay quanh Ox.

c. Tính độ dài cung (L) của (C) từ $x=0$ đến $x=3$.

d. Tính diện tích mặt tròn xoay sinh ra bởi cung (L) quay quanh Ox.

Giải

a. Đồ thị (C)



b. Thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi (C) và đường $y=0$ quay quanh Ox.

$$V = \pi \int_0^3 y^2 dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right)^2 dx$$

Ghi vào màn hình $\pi \int ((1 \div 3)x^3 - x^2)^2, 0, 3)$ và ấn $\Rightarrow$

Kết quả $V=7.271$ (kết quả đúng là $S = \frac{81\pi}{35}$)

(máy tính đạo hàm và tích phân có sai số nhỏ)

c. Độ dài cung (L) được xác định bởi công thức

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

trong đó $y' = f'(x)$ và đơn vị chọn trên hai trục bằng nhau.

Cụ thể độ dài cung của đường biểu diễn hàm số

$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ từ $(0,0)$ đến $(3,0)$ là

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + (x^2 - 2x)^2} dx = 4.2203$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + (x^2 - 2x)^2} dx = 4.2203$$

Ghi vào màn hình $\int \sqrt{1 + (x^2 - 2x)^2} dx$, 0,3 và ấn =

d. Diện tích mặt tròn xoay sinh ra bởi cung (L) quay quanh Ox được xác định bởi công thức

$$\zeta = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$\text{Do đó } \zeta = 2\pi \int_0^3 (x^2 - \frac{1}{3}x^3) \sqrt{1 + (x^2 - 2x)^2} dx = 18.8276$$

(Phải đổi lại $x^2 - \frac{1}{3}x^3$ vì từ 0 đến 3 ta có $y \leq 0$)

Với máy CASIO fx 570 MS thì ta ghi vào màn hình

$$2\pi \int ((x^2 - x^3 - 3) \sqrt{1 + (x^2 - 2x)^2} dx, 0, 3 \text{ và ấn } =$$

9. Phương trình hàm.

VD1: Cho $f(x) = 3x - 1$; $g(x) = \frac{2}{x}$ ($x \neq 0$)

(trích đề thi KV THPT 2005)

a) Tính $f(g(x))$, $g(f(x))$ tại $x = \sqrt{3}$.

$f(g(x)) \approx 2,4641$	$g(f(x)) \approx 0,4766$
--------------------------	--------------------------

b) Tìm x thỏa mãn $f(g(x)) = g(f(x))$.

$x \approx 0,3782; 5,2885$

VD2: Cho $\begin{cases} (x - y)f(x + y) - (x + y)f(x - y) = 4xy(x^2 - y^2) \\ f(2) = 2\sqrt{3} \end{cases}$

1) Lập công thức tính $f(x)$

2) Tính $f(10)$

$$1) \text{ Đặt } \begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u + v}{2} \\ y = \frac{u - v}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow v.f(u) - u.f(v) = (u^2 - v^2)uv$$

$$\Leftrightarrow v[f(u) - u^3] = u[f(v) - v^3]$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(u) - u^3}{u} = \frac{f(v) - v^3}{v} = k$$

$$\Rightarrow f(x) = kx - x^3$$

$$\text{Thay } f(2) = 2\sqrt{3} \Rightarrow k = \sqrt{3} - 4$$

$$\Rightarrow f(x) = (\sqrt{3} - 4)x - x^3$$

$$2) \Rightarrow f(10) = -1022,679492$$

VD3: Cho $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 + 1}$; $g(x) = \frac{2 \sin x}{1 + \cos^4 x}$

(trích đề thi chọn HSG THPT Thừa Thiên Huế)

1. Tính $g(f(x))$ và $f(g(x))$ tại $x = \sqrt[3]{5}$

ĐS: $g(f(x)) \approx 1,997746736$; $f(g(x)) \approx 1,784513102$

2. Tìm các nghiệm gần đúng của $f(x) = g(x)$ trên $(-6; 6)$

ĐS: $x_1 \approx -5,445157771$; $x_2 \approx -3,751306384$;

$x_3 \approx -1,340078802$; $x_4 \approx 1,982768713$

10. Giải tích tổ hợp.

VD1: Tính 1) $\frac{4! \cdot 7!}{6!} \left(\frac{8!}{3!+4!} - \frac{7!}{5!} \right) \Rightarrow DS : 218736$

2) $\frac{P_9 \cdot P_7 - P_5 \cdot P_8}{P_3 + P_6}$

3) $\frac{A_8^6 + P_7}{A_6^3 \cdot P_5} \quad DS: 7/4$

4) $A_{x^2}^7 - C_{10}^x - P_{(2x+3)} - 17740590 = 0 \Rightarrow x = 4$

VD2: 1) Tìm hệ số x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt[5]{x}\right)^n$ biết $C_{n+4}^{n-1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$

ĐS: $C_{12}^8 = 495$

1) Tìm hệ số x^{12} , x^{23} , x^{45} trong khai triển $\left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x^7}\right)^{16}$

ĐS: 12870; 8008; 120

VD3: Tìm số nguyên dương n để $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243$

HD $3^n = (1+2)^n = VT = 243$

VD4: Khai triển $(1 + x\sqrt{7})^2 (1 + ax)^8$ dưới dạng $1 + 10x + bx^2 + \dots$ Hãy tìm a, b .

(trích đề thi KV THPT 2006)

ĐS: $a \approx 0,5886$; $b \approx 41,6144$

IV. HÌNH HỌC

A. Một số công thức hay sử dụng:

a) Véc tơ:

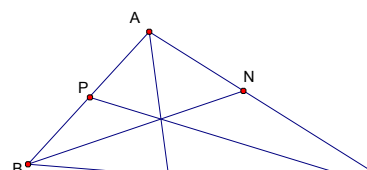
- Cộng trừ véc tơ.

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \pm 1$

- Công thức trọng tâm: $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$; $\vec{MO} = \frac{1}{3}(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC})$

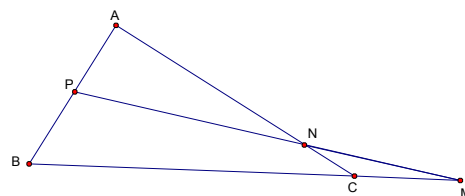
b) Định lý Ceva: AM, BN, CP đồng quy

$$\frac{\vec{MB}}{\vec{NC}} \cdot \frac{\vec{NC}}{\vec{NA}} \cdot \frac{\vec{PA}}{\vec{PB}} = -1$$



c) Định lý Menclait: M, N, P thẳng hàng

$$\frac{\vec{MB}}{\vec{NC}} \cdot \frac{\vec{NC}}{\vec{NA}} \cdot \frac{\vec{PA}}{\vec{PB}} = 1$$



d) Công thức lượng giác:

*) Tam giác vuông:

$$BA^2 = BH \cdot BC$$

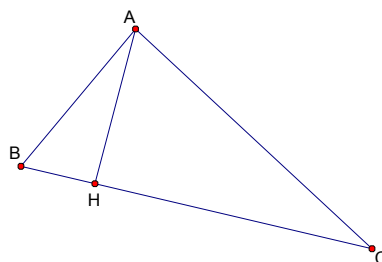
$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

$$AH^2 = HB \cdot HC$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

*) Tam giác thường:

- Trung tuyến: $AM^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) - \frac{BC^2}{4}$



- Định lý hs Sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

- Định lý hs Cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

- Diện tích: $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab \sin C = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$= (p-a)r_a = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \overrightarrow{AC}^2 - [\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}]^2}$$

- Đường phân giác: $l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$

*) Tam giác đều: Diện tích, chiều cao: $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

*) Diện tích hình quạt: $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$

e) Diện tích, thể tích:

- Hình chóp: $V = \frac{1}{3} Bh$

- Hình nón: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h; S_{xq} = \pi R l$

- Hình chóp cụt: $V = \frac{1}{3} (B + \sqrt{BB'} + B') h$

- Hình nón cụt: $V = \frac{1}{3} \pi (R^2 + RR' + R'^2) h; S_{xq} = \pi (R + R') l$

- Hình lăng trụ: $V = Bh; S_{xq} = \text{Chu vi thiết diện phẳng} \times l$

- Hình cầu: $V = \frac{4}{3} \pi R^3; S_{xq} = 4\pi R^2$

- Hình trụ: $V = \pi R^2 h; S_{xq} = 2\pi R h$

- Hình chỏm cầu: $V = \pi h^2 (R - \frac{h}{3}); S = 2\pi R h$

- Hình quạt cầu: $V = \frac{2}{3} \pi R^2 h$

B. Một số dạng tính toán:

1. Hệ thức lượng giác trong tam giác.

VD1: Cho tam giác ABC biết AB = 5dm; BC = 4dm; CA = 8dm tính các góc.

ĐS: $A \approx 24^\circ 8' 49''; B \approx 125^\circ 5' 59''; C \approx 30^\circ 45' 12''$

VD2: Cho tam giác ABC biết AB = 5dm; AC = 4dm; góc A = $46^\circ 34' 25''$

1. Tính chu vi.

ĐS: $2p \approx 12,67466\text{dm}$

2. Tính gần đúng diện tích đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

ĐS: $S \approx 20,10675\text{dm}^2$.

VD3: Cho tam giác ABC biết AB = 6dm; góc A = $84^\circ 13' 38''; B = 34^\circ 51' 33''$.

Tính diện tích tam giác.

ĐS: $S \approx 20,49315\text{dm}^2$.

VD4: Tính diện tích tam giác ABC biết A(8; -3); B(-5; 2); C(5; 7).

Tính diện tích tam giác.

ĐS: $S = 75,7 \text{ ĐVDT}$.

VD5: Tính diện tích tứ giác ABCD biết A(-3; 4); B(2; 3); C($\sqrt{2}$; 5); D(-4; -3).

$S \approx 37,46858 \text{ ĐVDT}$.

VD6: Tính gần đúng diện tích và chu vi của đa giác 50 cạnh nội tiếp đường tròn bán kính

1dm.

ĐS: $S \approx 3,13333 \text{ dm}^2; C \approx 6,27905\text{dm}$

VD7: Cho tam giác ABC có AB = 8 cm; BC = 7 cm; CA = 5 cm. Vẽ 3 đường cao AA';

BB'; CC'. Tính diện tích tam giác A'B'C'.

HD: $\frac{S'}{S} = 1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) = 2 \cos A \cos B \cos C = 1,9441\text{cm}^2$.

2. Hệ thức lượng trong đường tròn.

VD: Hai dây cung AB và CD cắt nhau tại I nằm trong đường tròn (O). Tính IA, IB biết IC = 15, 3cm; ID = 17,5 cm; AB = 34,7cm.

$$\text{HD: } \begin{cases} IA \cdot IB = IC \cdot ID \\ IA + IB = AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA = 11,6\text{cm} \\ IB = 23,1\text{cm} \end{cases}$$

3. Véc tơ.

VD1: Cho véc tơ $\vec{a}=(2; 7)$; $\vec{b}=(-3;4)$; $\vec{c}=(0; 7)$. Tính $\vec{g}=5\vec{a}+7\vec{b}-3\vec{c}$

VD2: Cho véc tơ $\vec{a}=(2; 7; 5)$; $\vec{b}=(-3;4; 7)$; $\vec{c}=(0; -7;-3)$. Tính $\vec{g}=5\vec{a}+7\vec{b}-3\vec{c}$ VD3: Cho M(-2; 2); N(4; 1) . Tính góc MON.

ĐS: $120^{\circ}57'50''$

4. Đường thẳng:

4.1 Góc giữa 2 đường thẳng

$$\cos(d1; d2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

VD: D1: $2x - 3y - 1 = 0$

D2: $5x - 2y + 4 = 0$. Tìm giao và góc giữa 2 đường thẳng này.

ĐS: $(-14/11; -13/11)$ và $\cos(D1; D2) = 34^{\circ}30'30''$

4.2 Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

Khoảng cách từ M_1 đến đường thẳng D qua M_0 và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}$

$$(d): \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$(d'); \frac{x - x'_0}{a'} = \frac{y - y'_0}{b'} = \frac{z - z'_0}{c'};$$

$$\vec{u} = (a, b, c); \vec{u}' = (a', b', c'); M(x_0; y_0; z_0); M'(x'_0; y'_0; z'_0)$$

$$\Rightarrow d = \frac{Abs(\vec{M_0 M' u})}{Abs(\vec{u})}$$

4.3 Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau.

$$d = \frac{|(\vec{uxu'}) \cdot \vec{MM'}|}{Abs(\vec{uxu'})}$$

*) Phương trình đường vuông góc chung.

$$\begin{cases} [\vec{ux}(\vec{uxu'})] \cdot \vec{MM_0} = 0 \\ [\vec{ux}(\vec{uxu'})] \cdot \vec{M'M} = 0 \end{cases}$$

Trong đó M là một điểm thuộc đường vuông góc chung.

5. Mặt phẳng.

VD: Trong không gian Oxyz cho M(1;3;2); N(4;0;2); P(0;4;-3); Q(1;0;3).

1. Viết phương trình mặt phẳng (MNP).

2. Tính diện tích tam giác MNP.

3. Tính thể tích hình chóp QMNP.

ĐS: 1) $x + y - 4 = 0$

2) $S = 10,6066$ (đvdt)

$$2) V = \left| \frac{1}{6} (\vec{MN} \times \vec{MP}) \cdot \vec{MQ} \right| = \frac{15}{2} \text{ (đvtt)}$$

6. Đường tròn:

- Biết tâm và bán kính.

- Đi qua 3 điểm.

VD: Viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm M(1; 20); N(5; 2); P(1; 3)

ĐS: $x^2 + y^2 - 6x + y - 1 = 0$

7. Mặt cầu.

- Biết tâm và bán kính.

- Đi qua 4 điểm.

VD: Viết phương trình mặt cầu

1) Biết tâm: I ($\frac{2}{3}; -3; \frac{4}{5}$) và đi qua điểm M(-4; 5; 7)

2) Đi qua 4 điểm: A(9; -1; 2; 9); B(2; -4; 0); C(1; -7; 9); D(-2; 0; -4)

$$\text{HD: } 1) R=IM \Rightarrow (x - \frac{2}{3})^2 + (y + 3)^2 + (z - \frac{4}{5})^2 = \frac{27949}{225}$$

$$2) \begin{cases} IA=IB \\ IB=IC \\ IC=ID \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - \frac{2}{3})^2 + (y + 3)^2 + (z - \frac{4}{5})^2 = (x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 0)^2 \\ (x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 0)^2 = (x - 1)^2 + (y + 7)^2 + (z - 9)^2 \\ (x - 1)^2 + (y + 7)^2 + (z - 9)^2 = (x + 2)^2 + (y - 0)^2 + (z + 4)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4y^2 - 4z^2 - 12x + 20y - 16z - 158793 = 0 \\ 4x^2 - 4y^2 - 4z^2 - 12x + 20y - 16z - 158793 = 0 \\ 4x^2 - 4y^2 - 4z^2 - 12x + 20y - 16z - 158793 = 0 \end{cases}$$

8. Elíp.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

VD: Viết phương trình Elíp đi qua 2 điểm $M(\sqrt{3}; \frac{3\sqrt{13}}{4}); N(\sqrt{5}; \frac{3\sqrt{11}}{4})$

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

9. Hypebol.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (tương tự)}$$

10. Parabol.

$$y^2 = 2px \text{ (tương tự)}$$

11. Tìm giao của các đường.

VD1: Gọi M là giao điểm có cả hai tọa độ dương của Parabol $y^2 = 7x$ và Hypebol

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

1. Tính tọa độ điểm M.

$$\text{ĐS: } M(13,61925; 9,76395)$$

2. Tiếp tuyến của hypebol tại M cắt Parabol tại điểm N khác với M. Tính tọa độ điểm N.

$$\text{ĐS: } N(0,10134; -0,84225)$$

VD2: Tính giá trị gần đúng của b để $y = 2x + b$ là tiếp tuyến của elíp $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

$$\text{ĐS: } b_1 \approx 7,21110; b_2 \approx -7,21110$$

VD3: Tính giá trị gần đúng của a, b để $y = ax + b$ đi qua A(1; 2) và là tiếp tuyến của hypebol

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} a_1 = -1; b = 3 \\ a_1 = \frac{5}{6}; b = \frac{7}{6} \end{cases}$$

VD4: Tìm giao điểm và độ dài dây cung AB của 2 đường tròn: $x^2 + y^2 + 5x - 4y + 3 = 0$ và $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 1 = 0$.

$$\text{ĐS: } (0,19090; 2,09545); (-4,19089; -0,09544); AB \approx$$

12. Tứ diện – hình chóp.

VD1: Tính thể tích khối chóp S.ABCD biết đáy ABCD là hình chữ nhật và cạnh AB = 6dm; AD = $4\sqrt{3}$ dm; cạnh SA = 8dm và tạo với đáy một góc 40° .

$$\text{ĐS: } V \approx 71,25381 \text{ dm}^3$$

VD2: Tính gần đúng thể tích khối tứ diện ABCD biết AB = AC = AD = 5dm; BC = BD = CD = 4dm.

$$\text{ĐS: } V \approx 10,24153 \text{ dm}^3$$

VD3: Tính thể tích khối chóp S.ABCD biết đáy ABCD là hình chữ nhật và cạnh AB = 8dm; AD = $3\sqrt{2}$ dm; cạnh SA = 8dm và chân đường cao là giao điểm của 2 đường chéo của đáy.

$$\text{ĐS: } V \approx 60,39868 \text{ dm}^3$$

VD4: Tính thể tích tứ diện ABCD biết AB = AC = AD = CD = 5dm; góc CBD = 90° ; BCD = $40^\circ 15' 27''$.

$$\text{ĐS: } V \approx 8,89777 \text{ dm}^3$$

VD5: Tính gần đúng diện tích toàn phần tứ diện ABCD AB = AC = AD = CD = 7dm; góc CBD = 90° ; góc BCD = $45^\circ 38' 13''$. ĐS: S $\approx 65,87243 \text{ dm}^2$

13. Một số bài toán tham khảo.

VD1

Tam giác nhỏ hơn

Cho tam giác ABC (có ba góc nhọn A, B, C cho chấc) có ba cạnh là a, b, c

1. - Vẽ ba phân giác AA', BB', CC'. Tính diện tích S' tam giác A'B'C',
2. - Vẽ ba đường cao AA'', BB'', CC''. Tính diện tích S'' tam giác A''B''C''.

Giải

Gọi S là diện tích tam giác ABC

$$S' = \frac{2abcS}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$S'' = (1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C))S = 2S \cos A \cos B \cos C$$

TH1: Tam giác nhọn

$$BC = a, AC = b, AB = c$$

$$\text{Ta có công thức tính diện tích tam giác: } S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}a(b \cdot \sin C) = \frac{1}{2}ab \sin C$$

(sẽ áp dụng ở phần sau)

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác (SGK lớp 8):

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{BA}{CA} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow \frac{BA_1}{CA_1} + 1 = \frac{c}{b} + 1 \Leftrightarrow \frac{BC}{CA_1} = \frac{b+c}{b} \Leftrightarrow CA_1 = \frac{ab}{b+c}$$

$$\text{Tương tự } CB_1 = \frac{ab}{a+c}$$

Từ đó suy ra:

$$S_{CA_1B_1} = \frac{1}{2} \times CA_1 \times CB_1 \times \sin C = \frac{1}{2} \times \frac{ab}{(b+c)} \times \frac{ab}{(a+c)} \times \frac{S_{ABC}}{\frac{ab}{ab}} = \frac{S_{ABC} \times ab}{(a+c)(b+c)} \quad (1)$$

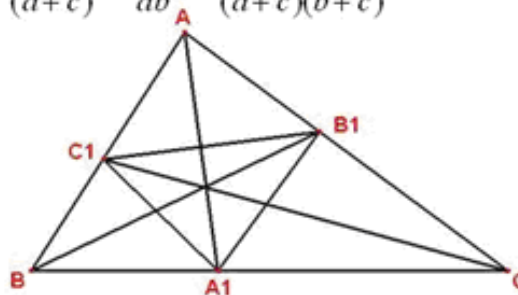
$$S_{AB_1C_1} = \frac{S_{ABC} \times bc}{(a+c)(a+b)} \quad (2)$$

$$\text{Tương tự: } S_{BC_1A_1} = \frac{S_{ABC} \times ac}{(a+b)(b+c)} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$\begin{aligned} S_{A_1B_1C_1} &= S_{ABC} - S_{CA_1B_1} - S_{AB_1C_1} - S_{BC_1A_1} = \\ &= S_{ABC} - \frac{S_{ABC} \times ab}{(a+c)(b+c)} - \frac{S_{ABC} \times bc}{(a+c)(a+b)} - \frac{S_{ABC} \times ac}{(a+b)(b+c)} = \\ &= S_{ABC} \times \left(1 - \frac{ab}{(a+c)(b+c)} - \frac{bc}{(a+c)(a+b)} - \frac{ac}{(a+b)(b+c)} \right) = \\ &= \frac{S_{ABC} \times 2abc}{(a+b)(b+c)(a+c)} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S' = \frac{2abcS}{(a+b)(b+c)(c+a)} \text{ (đpcm)}$$



Có thể chứng minh được: $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AB_2C_2}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AB_2}{AB}\right)^2 = \cos^2 A$$

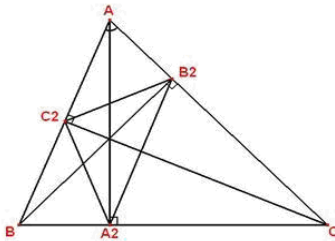
$$\Rightarrow S_{\triangle AB_2C_2} = S_{\triangle ABC} \times \cos^2 A \quad (1)$$

$$S_{\triangle BC_2A_2} = S_{\triangle ABC} \times \cos^2 B \quad (2)$$

$$\text{Trương tự: } S_{\triangle CA_2B_2} = S_{\triangle ABC} \times \cos^2 C \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$\begin{aligned} S_{\triangle A_2B_2C_2} &= S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle AB_2C_2} + S_{\triangle BC_2A_2} + S_{\triangle CA_2B_2}) \\ &= S_{\triangle ABC} [1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) \\ &= 1 - [\cos^2 A + \frac{1}{2}(1 + \cos 2B + 1 + \cos 2C)] \\ &= 1 - [\cos^2 A + 1 + \cos(B+C) \cdot \cos(B-C)] \\ &= -\cos^2 A - \cos(B+C) \cdot \cos(B-C) \\ &= -\cos^2 A + \cos A \cdot \cos(B-C) \\ &= \cos A [\cos(B-C) - \cos A] \\ &= \cos A [\cos(B-C) + \cos(B+C)] \\ &= 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S_{\triangle A_2B_2C_2} = S_{\triangle ABC} \cdot (2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$

$$\text{Hay } S'' = 2 \cdot S \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \text{ (đpcm).}$$

(Các công thức lượng giác có thể tham khảo thêm SGK Đại Số 10 Nâng cao trang 208)

TH2: Trường hợp tính S'' với tam giác ABC tù:

Xét trường hợp tam giác ABC tù ($\hat{A} > 90^\circ$)

(Đề cho gọn viết $\widehat{CAB} = \hat{A}, \widehat{ABC} = \hat{B}, \widehat{BCA} = \hat{C}$)

Khi đó:

$$S_{\triangle A_2B_2C_2} = 2S_{\triangle OBC} \cdot \cos \angle BOC \cdot \cos \angle OBC \cdot \cos \angle BCO \quad (*)$$

Có thể tính được các góc của tam giác OBC (sử dụng các tính chất của các tứ giác nội tiếp):

$$\widehat{COB} = 180^\circ - \hat{A}$$

$$\widehat{OBC} = 90^\circ - \hat{C}$$

$$\widehat{BCO} = 90^\circ - \hat{B}$$

Đến đây áp dụng định lý hàm sin vào $\triangle OBC$ tính được các cạnh:

$$BC = a \quad (gt)$$

$$OB = a \cdot \frac{\sin \angle BCO}{\sin \angle COB} = a \cdot \frac{\sin(90^\circ - \hat{B})}{\sin(180^\circ - \hat{A})} = a \cdot \frac{\cos B}{\sin A}$$

$$OC = a \cdot \frac{\sin \angle OBC}{\sin \angle COB} = a \cdot \frac{\sin(90^\circ - \hat{C})}{\sin(180^\circ - \hat{A})} = a \cdot \frac{\cos C}{\sin A}$$

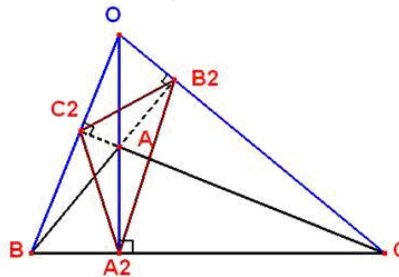
Thay vào (*) được:

$$S_{\triangle A_2B_2C_2} = 2\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} \cdot \cos(180^\circ - \hat{A}) \cdot \cos(90^\circ - \hat{C}) \cdot \cos(90^\circ - \hat{B})$$

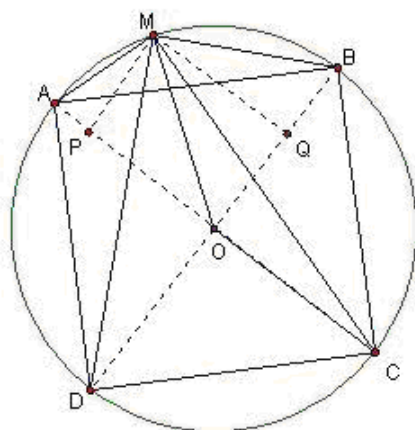
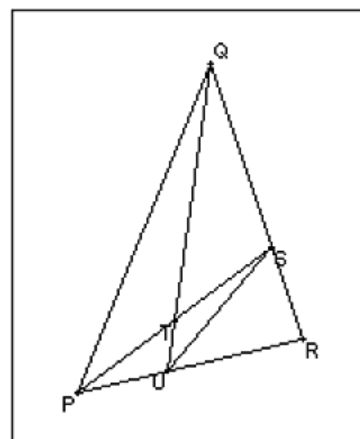
$$(x = BC = a, y = OB = a \frac{\cos B}{\sin A}, z = OC = a \frac{\cos C}{\sin A}, p = \frac{x+y+z}{2})$$

$$\Rightarrow S_{\triangle A_2B_2C_2} = 2\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} \cdot (-\cos A) \cdot \sin C \cdot \sin B$$

$$= -2\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} \cdot \cos A \cdot \sin B \cdot \sin C$$



VD2: Từ đỉnh B của hình bình hành ABCD kẻ các đường cao BK, BI vuông góc với CD và AD. Gọi H là trực tâm của tam giác BIK. Tính BH biết BD = 17 cm; IK = 15 cm.



$$\begin{aligned}
 MA^4 + MB^4 + MC^4 + MD^4 &= \\
 &= (MA^2 + MC^2)^2 + (MB^2 + MD^2)^2 - 2[(MA \cdot MC)^2 + (MB \cdot MD)^2] \\
 &= (AC^4 + BD^4) - 2[(MP \cdot AC)^2 + (MQ \cdot BD)^2] \\
 &= 32R^4 - 8R^2 \cdot (MP^2 + MQ^2) = 32R^4 - 8R^2 \cdot MO^2 \\
 &= 32R^4 - 8R^4 = 24R^4 = 24 \cdot 12^4
 \end{aligned}$$

VD4: Cho tam giác PQR, gọi S là 1 điểm thuộc cạnh QR, U là 1 điểm thuộc cạnh PR, giao điểm của PS và QU là T. Cho biết $PT = TS$, $QS = 2RS$ và diện tích tam giác PQR là 150. Tính diện tích tam giác PSU.

$$S(\text{PSR}) = S(\text{PQR})/3 = 50$$

Vẽ SK (không có trong hình) song song với QU (K thuộc PR)

$$\Rightarrow RK=RU/3, PU=PK$$

$$\Rightarrow PU=2/5*PR$$

$$\Rightarrow S(PSU)=2/5*S(PSR)=20 \text{ (dvd)}$$

14. Một số bài toán đa giác và đường tròn.

Hệ quả 1. Nếu $ABCD$ là tứ giác lồi nội tiếp thì $\frac{B+D}{2}=90^\circ$ nên

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Ta nhận lại được công thức trong định lý 1 bài 3.41.

Hệ quả 2. Nếu $d=0$, tức là tứ giác suy biến thành tam giác thì ta có hệ thức Heron:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Áp dụng: Diện tích tứ giác lồi $ABCD$ có các cạnh là 18, 34, 56, 27 (cm) và $B+D=210^\circ$ được tính như sau:

$$18 \div 34 \div 56 \div 27 \div 2 \div \text{Min} - 18 \div \text{MR} - 34 \div \text{MR}$$

$$\div \text{MR} - 56 \div \text{MR} - 27 \div \text{MR} \div - 18 \div 34 \div 56 \div 27 \div [210 \div 2] \cos \text{SHIFT} x^2 \div \sqrt{} (842.8188673)$$

Đáp số: $S=842,8 \text{ cm}^2$.

5. Đa giác và hình tròn

Bài 3.44. (Sở GD & ĐT Đồng Nai, 1998, vòng Tỉnh, cấp PTTH & PTCS)

Một ngôi sao năm cánh có khoảng cách giữa hai đỉnh không liên tiếp là $9,651 \text{ cm}$. Tìm bán kính đường tròn ngoại tiếp (qua 5 đỉnh).

Giải: Ta có công thức tính khoảng cách

giữa hai đỉnh không kề nhau của ngôi sao năm cánh đều (hình vẽ):

$$AC=d=2R\cos 18^\circ=\frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}.$$

Công thức $d=2R\cos 18^\circ$ là hiển nhiên.

Công thức $\cos 18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$ có thể chứng minh như sau:

$$\text{Ta có: } 1-\sin^2 18^\circ=\cos^2 18^\circ=\frac{1+\cos 36^\circ}{2}=\frac{1+\sin 54^\circ}{2}=\frac{1+3\sin 18^\circ-4\sin^3 18^\circ}{2}.$$

$$\text{hay } 4\sin^3 18^\circ-2\sin^2 18^\circ-3\sin 18^\circ+1=0.$$

Suy ra $\sin 18^\circ$ là nghiệm của phương trình:

$$4x^3-2x^2-3x+1=(x-1)(4x^2+2x-1)=0.$$

$$\text{Vậy } \sin 18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{Từ đây ta có: } \cos^2 18^\circ=1-\sin^2 18^\circ=1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}.$$

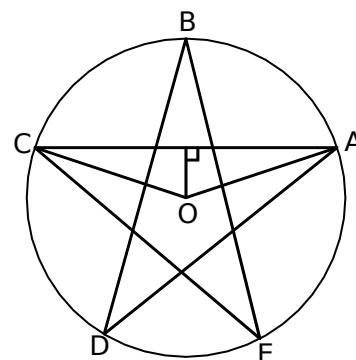
$$\text{hay } \cos 18^\circ=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

$$\text{Suy ra } d=2R\cos 18^\circ=\frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$$

$$\text{và } R=\frac{d}{2\cos 18^\circ}=\frac{2d}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Cách giải 1: $9.651 \div 2 \div 18 \div \text{cos} \div \text{SHIFT} \sqrt{} (5.073830963)$

Cách giải 2: $2 \div 9.651 \div \left[\left(10 \div 2 \div 5 \sqrt{} \right) \sqrt{} \right] \div \text{SHIFT} \sqrt{} (5.073830963)$



Đáp số: 5,073830963.

Bài 3.45. (Sở GD & ĐT TP Hồ Chí Minh, 1996, vòng 1)

Tính khoảng cách giữa hai đỉnh không liên tiếp của một ngôi sao 5 cánh nội tiếp trong đường tròn bán kính $R = 5,712 \text{ cm}$.

Cách giải 1: Ta có công thức tính khoảng cách giữa hai đỉnh không kề nhau của ngôi sao năm cánh (xem hình vẽ và chứng minh bài 3.44):

$$d = 2R \cos 18^\circ = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}.$$

Tính: $\boxed{\text{MODE}} \boxed{4} \boxed{2} \boxed{\times} 5.712 \boxed{\times} 18 \boxed{0,.,} \boxed{\cos} \boxed{=}$ (10.86486964)

Cách giải 2: $\boxed{10} \boxed{+} 2 \boxed{\times} 5 \boxed{\sqrt{}} \boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{}} \boxed{=}$ $\boxed{\times} 5.712 \boxed{=}$ $\boxed{\div} 2 \boxed{=}$ (10,86486964)

Đáp số: 10,86486964.

Bài 3.46. Cho đường tròn tâm O , bán kính $R = 11,25 \text{ cm}$. Trên đường tròn đã cho, đặt các cung $AB = 90^\circ$, $BC = 120^\circ$ sao cho A và C nằm cùng một phía đối với BO .

a) Tính các cạnh và đường cao AH của tam giác ABC .

b) Tính diện tích tam giác ABC (chính xác đến 0,01).

Giải: a) Theo hình vẽ:

$$\text{sđ } \widehat{AC} = \text{sđ } \widehat{BC} - \text{sđ } \widehat{AB} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ.$$

Tính các góc nội tiếp ta được:

$$\widehat{ABC} = 15^\circ; \widehat{ACB} = 45^\circ. \text{ Suy ra: } \widehat{BAC} = 120^\circ; \widehat{CAH} = 45^\circ; \widehat{BAH} = 75^\circ.$$

$$\text{Ta có: } AB = R\sqrt{2}; BC = R\sqrt{3}.$$

Vì $\triangle AHC$ vuông cân, nên $AH = HC$ (đặt $AH = x$).

Theo định lý Pitago ta có: $AH^2 = AB^2 - HB^2$.

$$\text{Do đó: } x^2 + (R\sqrt{3} - x)^2 = (R\sqrt{2})^2 \text{ hay } 2x^2 - 2R\sqrt{3}x + R^2 = 0.$$

$$\text{Suy ra: } x_1 = \frac{R\sqrt{3} - R}{2}; x_2 = \frac{R\sqrt{3} + R}{2}.$$

Vì $AH < AC < R$, nên nghiệm $x_2 = \frac{R\sqrt{3} + R}{2}$ bị loại.

$$\text{Suy ra: } AC = AH\sqrt{2} = \frac{R(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}}.$$

Gọi diện tích $\triangle ABC$ là S , ta có:

$$S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3} - R}{2} \cdot R\sqrt{3} = \frac{R^2(3 - \sqrt{3})}{4}.$$

Ấn phím: $11.25 \boxed{\text{Min}} \boxed{\times} 2 \boxed{\sqrt{}} \boxed{=}$ $\boxed{\text{MODE}} \boxed{7} \boxed{2} \boxed{=}$ (15.91) Vậy $AB \approx 15,91 \text{ cm}$.

Ấn tiếp phím: $\boxed{\text{MR}} \boxed{\times} 3 \boxed{\sqrt{}} \boxed{=}$ **Kết quả:** 19.49 Vậy: $BC \approx 19,49 \text{ cm}$.

Ấn phím: $\boxed{\text{MR}} \boxed{\times} \boxed{3} \boxed{\sqrt{}} \boxed{-} 1 \boxed{=}$ $\boxed{\div} 2 \boxed{\sqrt{}} \boxed{=}$ (5.82) Vậy $AC \approx 5,82 \text{ cm}$.

Ấn tiếp phím: $\boxed{\text{MR}} \boxed{\times} \boxed{3} \boxed{\sqrt{}} \boxed{-} 1 \boxed{=}$ $\boxed{\div} 2 \boxed{=}$ (4.12) Vậy: $AH \approx 4,12 \text{ cm}$.

Ấn tiếp phím: $\boxed{\text{MR}} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x^2} \boxed{\times} \boxed{3} \boxed{-} 3 \boxed{\sqrt{}} \boxed{=}$ $\boxed{\div} 4 \boxed{=}$

Kết quả: $S \approx 40,12 \text{ cm}^2$.

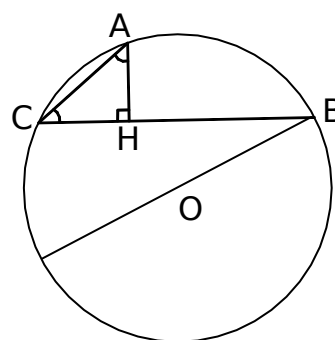
Bài 3.47. (Thi trắc nghiệm học sinh giỏi toán toàn nước Mỹ, 1972)

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 12. Vẽ đoạn AE với E là điểm trên cạnh CD và $DE = 5 \text{ cm}$.

Trung trực của AE cắt AE , AD và BC tại M , P và Q . Tỷ số độ dài đoạn PM và MQ là: (A) 5:12; (B) 5:13; (C) 5:19; (D) 1:4; (E) 5:21.

Giải: Vẽ RS qua M song song với cạnh AB, CD .

$$\text{Ta có: } \frac{MP}{MQ} = \frac{MR}{MS}.$$



Vì RM là đường trung bình của tam giác ADE nên $MR = \frac{DE}{2}$.

Mà: $MS = RS - MR$.

$$\text{Vậy: } \frac{MP}{MQ} = \frac{MR}{MS} = \frac{\frac{DE}{2}}{RS - \frac{DE}{2}}.$$

Áp dụng bằng số với $DE = 5 \text{ cm}$, $RS = 12 \text{ cm}$:

$$5 \boxed{a^{b/c}} 2 \boxed{=} \boxed{\text{Min}} \boxed{\div} \boxed{[(12 - \boxed{\text{MR}})]} \boxed{=} \left(\frac{5}{19}\right)$$

Đáp số (C) là đúng.

Chú ý: Nếu không sử dụng phân số ($5 \boxed{a^{b/c}} 2$) mà dùng ($5 \boxed{\div} 2$) thì máy sẽ cho đáp số dưới dạng số thập phân.

Hãy tính: $5 \boxed{\div} 2 \boxed{=} \boxed{\text{Min}} \boxed{\div} \boxed{[(12 - \boxed{\text{MR}})]}$ (0.2631579)

So sánh: $5 \boxed{a^{b/c}} 19 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{a^{b/c}} \boxed{a^{b/c}}$ Kết quả: 0.2631579

Như vậy, hai kết quả như nhau, nhưng một kết quả được thực hiện dưới dạng phân số (khi khai báo $5 \boxed{a^{b/c}} 2$), còn một kết quả được thực hiện dưới dạng số thập phân (khi khai báo $5 \boxed{\div} 2$).

Bài 3.48. Trên đường tròn tâm O, bán kính $R = 15,25 \text{ cm}$, người ta đặt các cung liên tiếp: $\widehat{AB} = 60^\circ$, $\widehat{BC} = 90^\circ$, $\widehat{CD} = 120^\circ$.

a) Tứ giác $ABCD$ là hình gì?

b) Chứng minh $AC \perp BD$.

c) Tính các cạnh và đường chéo của $ABCD$ theo R chính xác đến 0,01.

d) Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

Giải: a) số $\widehat{AD} = 360^\circ - (\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD})$
 $= 360^\circ - (60^\circ + 90^\circ + 120^\circ) = 90^\circ$.

Suy ra: $\widehat{AD} = \widehat{BC}$, $\widehat{ABD} = \widehat{BDC} = 45^\circ$ (vì cùng bằng $\frac{90^\circ}{2}$).

Từ đó ta có: $AB \parallel CD$. Vậy $ABCD$ là hình thang.

Mặt khác, $\widehat{ADB} = \widehat{BCD}$ (cùng bằng $\frac{60^\circ + 90^\circ}{2}$).

Vậy $ABCD$ là hình thang cân (đpcm).

b) Vì $\widehat{ABD} = \widehat{BAC} = 45^\circ$ (vì cùng bằng $\frac{90^\circ}{2}$).

Suy ra $\widehat{AEB} = 90^\circ$, vậy $AC \perp BD$ (đpcm).

c) Theo cách tính cạnh tam giác đều, tứ giác đều, lục giác đều nội tiếp trong đường tròn bán kính R , ta có:

$$AB = R; \quad AD = BC = R\sqrt{2}; \quad DC = R\sqrt{3}.$$

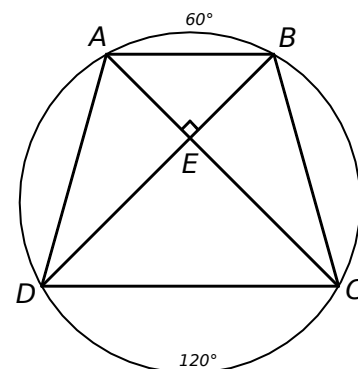
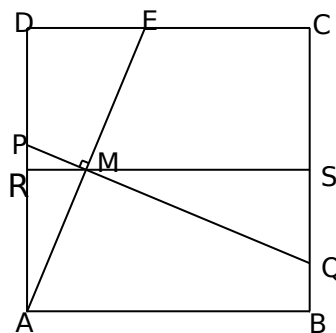
Các tam giác AEB, CED vuông cân, suy ra $AE = \frac{AB}{\sqrt{2}}$, $CE = \frac{CD}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Vậy: } AE = \frac{R}{\sqrt{2}}, \quad CE = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}. \quad \text{Suy ra } AC = AE + EC = \frac{R + R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{R(1 + \sqrt{3})}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{d) } S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot DB = \frac{1}{2} AC^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2(1 + \sqrt{3})^2}{2} = \frac{R^2(1 + \sqrt{3})^2}{4} = \left[\frac{R(1 + \sqrt{3})}{2}\right]^2.$$

$$\text{Tính: } \boxed{\text{MR}} \boxed{\times} \boxed{[(1 + 3\sqrt{3})]} \boxed{=} \boxed{\div} 2 \boxed{=} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x^2} \boxed{\text{MODE}} \boxed{7} \boxed{2} (433.97).$$

$$\text{Vậy } S_{ABCD} \approx 433,97 \text{ cm}^2.$$



Ấn tiếp: 15.25 $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{=}$ Kết quả: 21.57

Vậy $AD = BC \approx 21,57 \text{ cm}$.

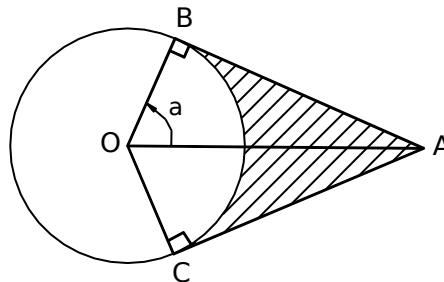
Ấn tiếp phím: $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{=}$ (26.41) Vậy: $CD \approx 26,41 \text{ cm}$.

Ấn tiếp phím: $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{[1+]}$ 3 $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{=}$ (29.46)

Vậy $AC = BD \approx 29,46 \text{ cm}$.

Bài 3.49. Cho đường tròn tâm O , bán kính $R = 3,15 \text{ cm}$. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là hai tiếp điểm thuộc (O)). Tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi hai tiếp tuyến và cung tròn nhỏ BC biết rằng

$AO = a = 7,85 \text{ cm}$ (chính xác đến 0,01 cm).



Giải: Ta có: $\cos \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{a} = \frac{3,15}{7,85}$.

$$S_{ABOC} = 2S_{AOB} = a.R.\sin \alpha;$$

$$S_{\text{quạt OBC}} = \frac{\pi R^2 \cdot 2\alpha}{360} = \frac{\pi R^2 \alpha}{180}.$$

$$S_{\text{gạch xọc}} = S_{ABOC} - S_{\text{quạt OBC}} = aR \sin \alpha - \frac{\pi R^2 \alpha}{180}.$$

Tính trên máy: $3.15 \boxed{\div} 7.85 \boxed{=}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\cos^{-1}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\frac{\pi}{\circ, \text{min}, \text{sec}}}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{\times}$

$$7.85 \boxed{\times} 3.15 \boxed{-}$$
 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\times} 3.15 \boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\div}$ 180 $\boxed{=}$ (11.16)

Đáp số: $S_{\text{gạch xọc}} = 11,16 \text{ cm}^2$.

Bài 3.50. Tính diện tích hình có 4 cạnh cong (hình gạch xọc) theo cạnh hình vuông $a = 5,35$ chính xác đến 0,0001 cm.

Giải: Diện tích hình gạch xọc $MNPQ$ (S_{MNPQ}) bằng diện tích hình vuông

$ABCD$ (S_{ABCD}) trừ đi 4 lần diện tích của $\frac{1}{4}$ hình tròn bán kính $R = \frac{a}{2}$.

$$S_{MNPQ} = a^2 - 4 \frac{\pi R^2}{4} = a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{a^2(4 - \pi)}{4} = \frac{5,35^2(4 - \pi)}{4}.$$

Ấn phím: $5.35 \boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{[4-]}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{MODE}}$ 7 2 (6.14)

Kết luận: $S_{MNPQ} \approx 6,14 \text{ cm}^2$.

Bài 3.51. Tính diện tích phần hình phẳng (phần gạch xọc) giới hạn bởi các cung tròn và các cạnh của tam giác đều ABC (xem hình vẽ), biết: $AB = BC = CA = a = 5,75 \text{ cm}$.

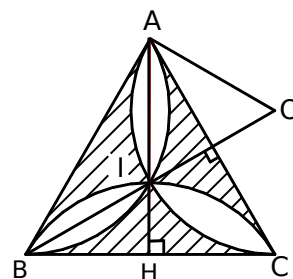
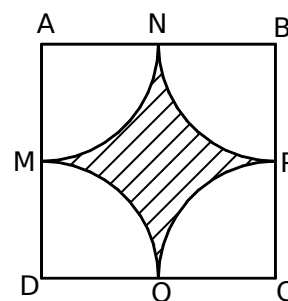
Giải: $R = OA = OI = IA = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\angle AOI = 60^\circ$.

Diện tích hình gạch xọc bằng diện tích tam giác ABC trừ diện tích hình hoa 3 lá (gồm 6 hình viên phân có bán kính R và góc ở tâm bằng 60°).

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; \quad S_{\Delta O_1 A I} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{Diện tích một viên phân: } \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}.$$



Tính theo a , diện tích một viên phân bằng: $\frac{a^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{36}$;

$$S_{\text{gạch xọc}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - 6 \cdot \frac{a^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{36} = \frac{a^2(9\sqrt{3} - 4\pi)}{12} = \frac{5,75^2(9\sqrt{3} - 4\pi)}{12}$$

Bấm tiếp: $5,75 \text{ [SHIFT] } [x^2] \times [(9 \times 3 \sqrt{3}) - 4 \times \text{[SHIFT] } [\pi]] \div 12 =$

Kết quả: $S_{\text{gạch xọc}} \approx 8,33 \text{ cm}^2$.

Bài 3.52. Viên gạch cạnh $a = 30 \text{ cm}$ có hoa văn như hình vẽ.

a) Tính diện tích phần gạch xọc của hình đã cho, chính xác đến 0,01 cm.

b) Tính tỉ số phần trăm giữa diện tích phần gạch xọc và diện tích viên gạch.

Giải: a) Gọi R là bán kính hình tròn.

Diện tích S một hình viên phân bằng:

$$S = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{4}(\pi - 2) = \frac{a^2}{16}(\pi - 2).$$

Vậy diện tích hình gồm 8 viên phân bằng $\frac{a^2}{2}(\pi - 2)$.

Diện tích phần gạch xọc bằng: $a^2 - \frac{a^2(\pi - 2)}{2} = \frac{a^2(4 - \pi)}{2}$.

Tính trên máy: $30 \text{ [SHIFT] } [x^2] \text{ [Min] } \times [(4 - \text{[SHIFT] } [\pi]]) \div 2 =$

$\text{[MODE] } [7] [2] (386,28)$ Vậy $S_{\text{gạch xọc}} \approx 386,28 \text{ cm}^2$.

Ấn phím tiếp: $\div \text{[MR] [SHIFT] } [\%] (42,92)$

Tỉ số của diện tích phần gạch xọc và diện tích viên gạch là 42,92%.

Đáp số: $386,28 \text{ cm}^2$; 42,92 %.

Bài 3.53. Nhân dịp kỷ niệm 990 năm Thăng Long, người ta cho lát lại đường ven hồ Hoàn Kiếm bằng các viên gạch hình lục giác đều. Dưới đây là viên gạch lục giác đều có 2 màu (các hình tròn cùng một màu, phần còn lại là màu khác).

Hãy tính diện tích phần gạch cùng màu và tỉ số diện tích giữa hai phần đó, biết rằng $AB = a = 15 \text{ cm}$.

Giải: Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều là: $R = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Diện tích mỗi hình tròn là: $\pi R^2 = \frac{\pi a^2}{12}$. Diện tích 6 hình tròn là: $\frac{\pi a^2}{2}$.

Tính trên máy: $15 \text{ [SHIFT] } [x^2] \times \pi \div 2 = \text{[Min] } (353,4291)$

Diện tích toàn bộ viên gạch là: $6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

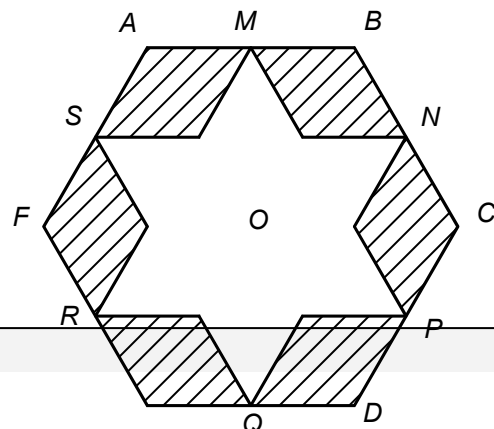
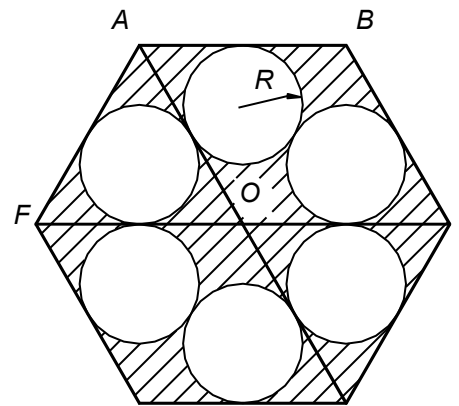
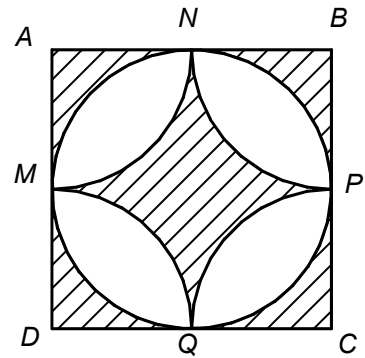
Diện tích phần gạch xọc là: $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi a^2}{2}$.

Bấm tiếp phím: $3 \times 15 \text{ [SHIFT] } [x^2] \times 3 \sqrt{3} \div = - \text{[MR] } = (231,13797)$

Ấn tiếp phím: $\div \text{[MR] [SHIFT] } [\%] \text{ Kết quả: } 65,40$

Đáp số: $353,42 \text{ cm}^2$ (6 hình tròn); $231,14 \text{ cm}^2$ (phần gạch xọc); 65,40 %

Bài 3.54. Viên gạch hình lục giác đều ABCDEF có hoa văn hình sao như hình vẽ, trong đó các đỉnh hình sao M, N, P, Q, R, S là trung điểm các cạnh của lục giác. Viên gạch được tô bằng hai màu (màu của hình sao và màu của phần còn lại). Biết rằng cạnh của lục giác đều



là $a = 16,5$ cm. Tính diện tích mỗi phần (chính xác đến 0,01). Tính tỉ số phần trăm giữa hai diện tích đó.

Giải: Diện tích lục giác $ABCDEF$ bằng:

$$S_1 = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Lục giác nhỏ có cạnh là $b = \frac{a}{2}$, 6 cánh sao là các tam giác đều cũng có cạnh là $b = \frac{a}{2}$. Từ đó suy ra:

Diện tích lục giác đều cạnh b là S_2 bằng: $S_2 = \frac{3b^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{8}.$

Diện tích 6 tam giác đều cạnh b là S_3 : $S_3 = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{8}.$ *Tính trên máy:* $3 \times 16.5 \text{ [SHIFT] } [x^2] \times 3$

$[\sqrt{}] \div 8 \times 2 \text{ [MODE] } [7] [2] (353.66) \text{ [Min]}$

Án tiếp phím: $3 \times 16.5 \text{ [SHIFT] } [x^2] \times 3 \text{ [sqrt] } \div 2 \text{ [=] } [-] \text{ [MR] } [=] (353.66)$

Án tiếp phím: $\div \text{ [MR] } \text{ [SHIFT] } [\%] \text{ Kết quả: } 100.$

Vậy diện tích hai phần bằng nhau.

Lời bình: Có thể chứng minh mỗi phần có 12 tam giác đều bằng nhau, do đó diện tích hai phần bằng nhau. Từ đó chỉ cần tính diện tích lục giác đều và chia đôi.

Bài 3.55. Cho lục giác đều cấp 1 $ABCDEF$ có cạnh $AB = a = 36$ mm. Từ các trung điểm của mỗi cạnh dựng một lục giác đều $A'B'C'D'E'F'$ và hình sao 6 cánh cũng có đỉnh là các trung điểm A', B', C', D', E', F' (xem hình vẽ). Phần trung tâm của hình sao là lục giác đều cấp 2 $MNPQRS$.

Với lục giác này ta lại làm tương tự như đối với lục giác ban đầu $ABCDEF$ và được hình sao mới và lục giác đều cấp 3. Đối với lục giác cấp 3, ta lại làm tương tự như trên và được lục giác đều cấp 4. Đến đây ta dừng lại. Các cánh hình sao cùng được tô bằng một màu (gạch xọc), còn các hình thoi trong hình chia thành 2 tam giác và tô bằng hai màu: màu gạch xọc và màu "trắng". Riêng lục giác đều cấp 4 cũng được tô màu trắng.

a) Tính diện tích phần được tô bằng màu "trắng" theo a .

b) Tính tỉ số phần trăm giữa diện tích phần "trắng" và diện tích hình lục giác ban đầu.

Giải: a) Chia lục giác thành 6 tam giác đều có cạnh là a bằng 3 đường chéo đi qua 2 đỉnh đối xứng qua tâm, từ đó

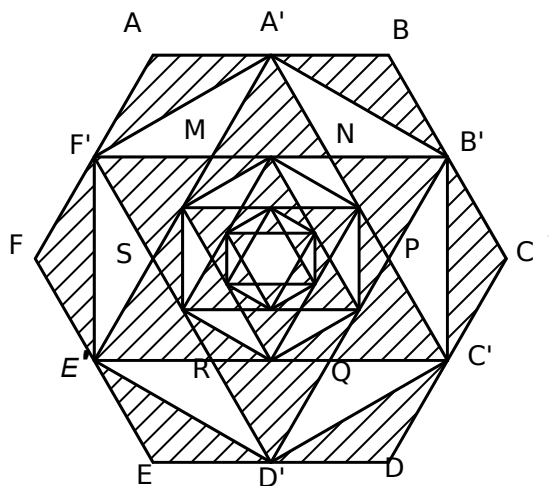
ta có $S = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}.$

Chia lục giác $ABCDEF$ thành 24 tam giác đều có cạnh bằng $\frac{a}{2}$. Mỗi tam giác đều cạnh $\frac{a}{2}$ có diện tích bằng diện tích tam giác "trắng" $A'NB'$ (xem hình vẽ). Suy ra diện tích 6 tam giác trắng vòng ngoài bằng $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ diện tích lục giác cấp 1 $ABCDEF$.

Vậy diện tích 6 tam giác trắng vòng ngoài là: $\frac{1}{4} \cdot \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}.$ (1)

b) Tương tự với cách tính trên ta có: $MN = b = \frac{a}{2}; c = \frac{b}{2}.$

Diện tích 6 tam giác trắng của lục giác cấp 2 $MNPQRS$ là: $\frac{1}{4} \cdot \frac{3b^2 \sqrt{3}}{2}.$ (2)



Diện tích 6 tam giác trắng của lục giác cấp 3 là: $\frac{1}{4} \cdot \frac{3c^2\sqrt{3}}{2}$. (3)

Diện tích lục giác trắng trong cùng bằng (với $d = \frac{c}{2}$): $\frac{3d^2\sqrt{3}}{2}$. (4)

Tóm lại ta có:

$$S_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2^3}; \quad S_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3b^2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2 \cdot 2^2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2^5};$$

$$S_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3c^2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2 \cdot 4^2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2^7}; \quad S_4 = \frac{3d^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2 \cdot 8^2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2^7}.$$

$$S_{\text{trắng}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 3a^2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{2}{2^7} \right) = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2^4 + 2^2 + 2}{2^6}.$$

Ấn phím: $3 \times 36 \text{ [SHIFT] } [x^2] \times 3 \text{ [sqrt] } \div 2 \text{ [MODE] } [7] [2] (3367.11) \text{ [Min]}$

Vậy $S_{\text{ABCDEF}} = 3367,11 \text{ mm}^2$.

Ấn tiếp phím: $2 \text{ [SHIFT] } [x^y] 4 \text{ [÷] } 2 \text{ [SHIFT] } [x] \text{ [÷] } 2 \text{ [÷] } 2 \text{ [SHIFT]}$

$[x^y] 6 \text{ [MR] } [=] (1157.44)$ Vậy $S_{\text{trắng}} \approx 1157,44 \text{ mm}^2$.

Ấn tiếp phím: $\div \text{ [MR] [SHIFT] [%] } (34.38)$ Vậy $\frac{S_{\text{trắng}}}{S_{\text{ABCDEF}}} \approx 34,38\%$.

Đáp số: $1157,44 \text{ mm}^2$ và $34,38\%$.

Bài 3.56. Cho hình vuông cấp một $ABCD$ với độ dài cạnh là $AB = a = 40 \text{ cm}$. Lấy A, B, C, D làm tâm, thứ tự vẽ các cung tròn bán kính bằng a , bốn cung tròn cắt nhau tại M, N, P, Q . Tứ giác $MNPQ$ cũng là hình vuông, gọi là hình vuông cấp 2. Tương tự như trên, lấy M, N, P, Q làm tâm vẽ các cung tròn bán kính MN , được 4 giao điểm E, F, G, H là hình vuông cấp 3.

Tương tự làm tiếp được hình vuông cấp 4 $XYZT$ thì dừng lại (xem hình vẽ).

a) Tính diện tích phần hình không bị tô màu (phần để trắng theo a).

b) Tìm tỉ số phần trăm giữa hai diện tích tô màu và không tô màu.

Giải: a) Tính diện tích 4 cánh hoa trắng cấp 1 (bằng 4 viên phân trừ đi 2 lần diện tích hình vuông cấp 2).

$$S_1 = 4 \cdot \left(\frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \right) - 2b^2 \quad (b \text{ là cạnh hình vuông cấp 2}).$$

Tương tự, tính diện tích 4 cánh hoa trắng cấp 2 và cấp 3:

$$S_2 = 4 \left(\frac{\pi b^2}{4} - \frac{b^2}{2} \right) - 2c^2 \quad (c \text{ là cạnh hình vuông cấp 3}).$$

$$S_3 = 4 \left(\frac{\pi c^2}{4} - \frac{c^2}{2} \right) - 2d^2 \quad (d \text{ là cạnh hình vuông cấp 4}).$$

Rút gọn: $S_1 = a^2(\pi - 2) - 2b^2$; $S_2 = b^2(\pi - 2) - 2c^2$; $S_3 = c^2(\pi - 2) - 2d^2$; $S_{\text{trắng}} = S_1 + S_2 + S_3 = \pi(a^2 + b^2 + c^2) - 4(b^2 + c^2) - 2(a^2 + d^2)$.

b) Ta có: $\angle MCQ = 30^\circ$; $b = QM = MK = 2a \cdot \sin 15^\circ = a(2\sin 15^\circ)$.

Tương tự: $c = 2b \cdot \sin 15^\circ = a(2\sin 15^\circ)^2$; $d = 2c \cdot \sin 15^\circ = a(2\sin 15^\circ)^3$.

Ký hiệu $x = 2\sin 15^\circ$, ta có: $b = ax$; $c = ax^2$; $d = ax^3$.

Thay vào công thức tính diện tích $S_{\text{trắng}}$ ta được:

$$S_{\text{trắng}} = \pi(a^2 + a^2 x^2 + a^2 x^4) - 4(a^2 x^2 + a^2 x^4) - 2(a^2 + a^2 x^6)$$

$$= \pi a^2(1 + x^2 + x^4) - 4a^2(x^2 + x^4) - 2a^2(1 + x^6)$$

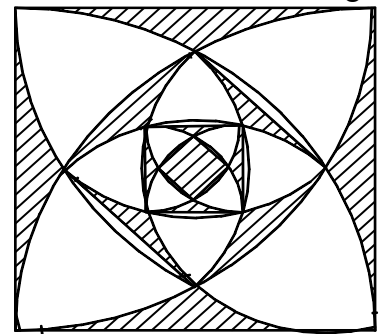
Ấn phím: $15 \text{ [o,,] } [\sin] \times 2 \text{ [Min] [SHIFT] } [x^y] 4 \text{ [÷] [MR] [SHIFT] } [x^2]$

$\text{[+]} 1 \text{ [=] } \times \text{ [SHIFT] } [\pi] \times 40 \text{ [SHIFT] } [x^2] \text{ [-]} 4 \times 40 \text{ [SHIFT] } [x^2] \times$

$[(\text{[MR] [SHIFT] } [x^2] \text{ [+]} \text{ [MR] [SHIFT] } [x^y] 4)] \text{ [-]} 2 \times 40 \text{ [SHIFT] } [x^2] \times$

$[(\text{[1] [÷] [MR] [SHIFT] } [x^y] 6) \text{ [MODE] } [7] [2] (1298.36) \text{ [Min]}$

Vậy $S_{\text{trắng}} \approx 1298,36 \text{ cm}^2$.



Bấm tiếp phím: 40 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ (301.64)

Vậy $S_{\text{gạch xọc}} \approx 301,64 \text{ cm}^2$.

Bấm tiếp phím: $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\%}$ (23.23)

Vậy $\frac{S_{\text{gạch xọc}}}{S_{\text{trang}}} \approx 23,23\%$.

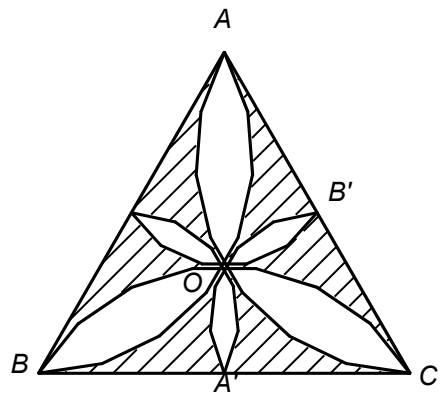
Đáp số: $1298,36 \text{ cm}^2$; $23,23\%$.

Bài 3.57. Cho tam giác đều ABC có cạnh là $a = 33,33 \text{ cm}$ và tâm là O . Vẽ các cung tròn qua hai đỉnh và trọng tâm O của tam giác được hình 3 lá. Gọi A', B', C' là các trung điểm các cạnh BC, CA và AB . Ta lại vẽ các cung tròn qua hai trung điểm và điểm O , ta cũng được hình 3 lá nhỏ hơn.

a) Tính diện tích phần cắt bỏ (hình gạch xọc) của tam giác ABC để được hình 6 lá còn lại.

b) Tính tỉ số phần trăm giữa phần cắt bỏ và diện tích của tam giác ABC .

Giải: $A'B'C'$ cũng là tam giác đều nhận O làm tâm (vì AA', BB', CC' cũng là các đường cao, đường trung tuyến của $\Delta A'B'C'$). 6 chiếc lá chỉ có điểm chung duy nhất là O , nghĩa là không có phần diện tích chung.



Mỗi viên phân có góc ở tâm bằng 60° , bán kính bằng $\frac{2}{3}$

đường cao tam giác đều. Gọi S_1 là diện tích 1 viên phân. Khi ấy

$$S_1 = \frac{\pi OA^2}{6} - \frac{OA^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{OA^2}{12} (2\pi - 3\sqrt{3}).$$

$$\text{Ta có: } OA = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Gọi S là diện tích 3 lá lớn, S' là diện tích 3 lá nhỏ. Khi ấy:

$$S = 6S_1 = \frac{OA^2}{2} (2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{a^2}{6} (2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Gọi cạnh tam giác đều $A'B'C'$ là b , tương tự ta cũng có:

$$S' = \frac{b^2}{6} (2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{a^2}{24} (2\pi - 3\sqrt{3}).$$

$$\text{Tổng diện tích 6 lá là: } S + S' = (2\pi - 3\sqrt{3}) \left(\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{24} \right).$$

Diện tích phần gạch xọc (phần cắt bỏ) là S'' .

$$S'' = S_{\Delta ABC} - (S + S') = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} - (2\pi - 3\sqrt{3}) \left(\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{24} \right) = \left(\frac{7\sqrt{3}}{8} - \frac{5}{12}\pi \right) a^2.$$

$$\text{Tính } S_{\Delta ABC}: 33.33 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x^2} \boxed{\times} 3 \boxed{\sqrt{}} \boxed{\div} 4 \boxed{=}$$
 (481.0290040) $\boxed{\text{Min}}$

$$\text{Tính } S'': 7 \boxed{\times} 3 \boxed{\sqrt{}} \boxed{\div} 8 \boxed{-} 5 \boxed{\div} 12 \boxed{\times} \pi \boxed{=}$$
 $\boxed{\times} 33.33 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x^2} \boxed{=}$ (229.4513446)

Vậy $S'' \approx 229,45 \text{ cm}^2$.

Ấn tiếp phím để tính $\frac{S''}{S_{\Delta ABC}}$: $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\%}$ Kết quả: 47.70

Đáp số: $S'' \approx 229,45 \text{ cm}^2$; $\frac{S''}{S_{\Delta ABC}} \approx 47,70 \%$.

6. Hình học không gian

Bài 3.58. (Sở GD&ĐT Hà Nội, 1996, vòng trường, lớp 10)

1) Tính thể tích V của hình cầu bán kính $R = 3,173$.

2) Tính bán kính của hình cầu có thể tích $V = 137,45 \text{ dm}^3$.

Giải: 1) Ta có công thức tính thể tích hình cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Tính trên máy: $3.173 \text{ [SHIFT] } [x^y] 3 \text{ [X] } 4 \text{ [X] } \pi \text{ [÷] } 3 \text{ [=]} (133.8131596)$

2) Từ công thức $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ suy ra $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

Áp dụng: $3 \text{ [X] } 137.45 \text{ [÷] } 4 \text{ [÷] } \pi \text{ [=] [SHIFT] } [x^y] 1 \text{ [a^{b/c}] } 3 \text{ [=]} (3.20148673)$

Đáp số: $V = 133.8134725 \text{ dm}^3$; $R = 3.201486733 \text{ dm}$.

Bài 3.59. (Sở GD & ĐT TP HCM, 1998, vòng chung kết, PTTH & PTCB)

Tính góc $\angle HCH$ trong phân tử metan (H : Hydro, C : Carbon).

Giải: Gọi G là tâm tứ diện đều $ABCD$

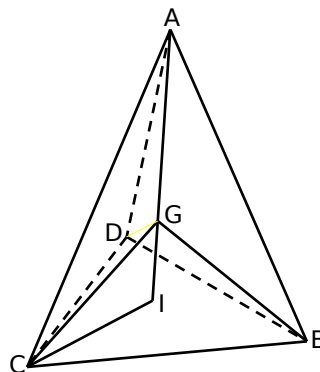
cạnh là a , I là tâm tam giác đều BCD .

Góc $\angle HCH$ trong phân tử metan chính là góc $\angle AGB$ của tứ diện $ABCD$.

Khi ấy ta có: $IB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $AI = \sqrt{AB^2 - IB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

và $BG = AG = \frac{3}{4}AI = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.



Gọi E là điểm giữa AB . Khi ấy $\sin AGE = \frac{AE}{AG} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Tính AGB : $2 \text{ [a^{b/c}] } 3 \text{ [√] [SHIFT] } [\sin^{-1}] \text{ [=] [X] } 2 \text{ [=] [SHIFT] } [0,.,.] (109^\circ 28' 16.39'')$

Đáp số: $109^\circ 28' 16''$.

Bài 3.60. (Sở GD & ĐT TP HCM, 1998, vòng chung kết, PTTH & PTCB)

Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$, biết trung đoạn $d = 3,415 \text{ cm}$, góc giữa cạnh bên và đáy bằng $42^\circ 17'$. Tính thể tích.

Giải: Gọi cạnh đáy của chóp tứ giác đều $SABCD$ là a , chiều

cao là h , φ là góc giữa cạnh bên và đáy. Khi ấy $\frac{SH}{AH} = \tan \varphi$

hay $h = SH = \frac{a\sqrt{2}}{2} \tan \varphi$. Mặt khác,

$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = d^2$ hay $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \tan \varphi\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = d^2$.

Suy ra $a = \frac{2d}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$ và

$h = \frac{a\sqrt{2}}{2} \tan \varphi = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{1 + 2\tan^2 \varphi}} \tan \varphi$.

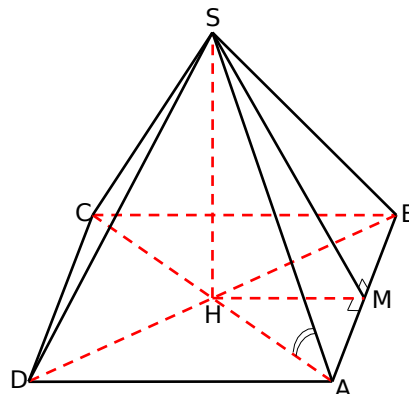
Thể tích tứ diện được tính theo công thức:

$V = \frac{1}{3}ha^2 = \frac{1}{3} \frac{d\sqrt{2}\tan \varphi}{\sqrt{1 + 2\tan^2 \varphi}} \frac{4d^2}{(1 + 2\tan^2 \varphi)} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{d^2 \tan \varphi}{\sqrt{(1 + 2\tan^2 \varphi)^3}}$.

Tính trên máy:

$4 \text{ [X] } 2 \text{ [√] [÷] } 3 \text{ [X] } 3.415 \text{ [SHIFT] } [x^y] 3 \text{ [X] } 42 \text{ [o,.,.] } 17 \text{ [o,.,.] } [\tan] [\text{Min}] \text{ [÷] } [(1 + 2 \text{ [X] } 2 \text{ [MR] [SHIFT] } [x^2])] \text{ [SHIFT] } [x^y] 3 \text{ [a^{b/c}] } 2 \text{ [=]} (15.795231442)$

Đáp số: $V = 15,795 \text{ cm}^3$.



MÔN THI: MÁY TÍNH CASIO

Thời gian : 150 phút

Câu 1. Tìm nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gần đúng với 4 số lẻ thập phân (đơn vị radian) của phương trình :

$$\sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{2} \cdot \cos 2x$$

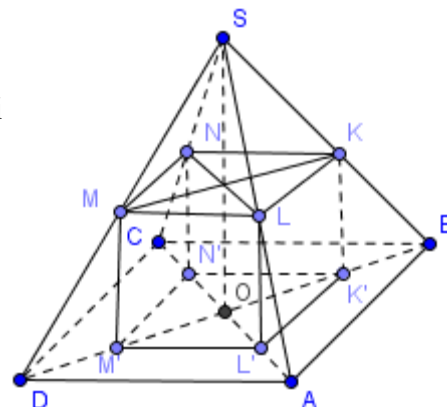
Cách giải	Điểm	Kết quả	Điểm	Cộng
.....				
.....				
.....				
.....				

Câu 2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có $SA = AB = \sqrt{3}$

Nội tiếp trong hình chóp một hình lập phương KLMNK'L'M'N'

Như hình vẽ. Tính gần đúng với 5 số lẻ thập phân thể tích của khối

Lập phương KLMNK'L'M'N'



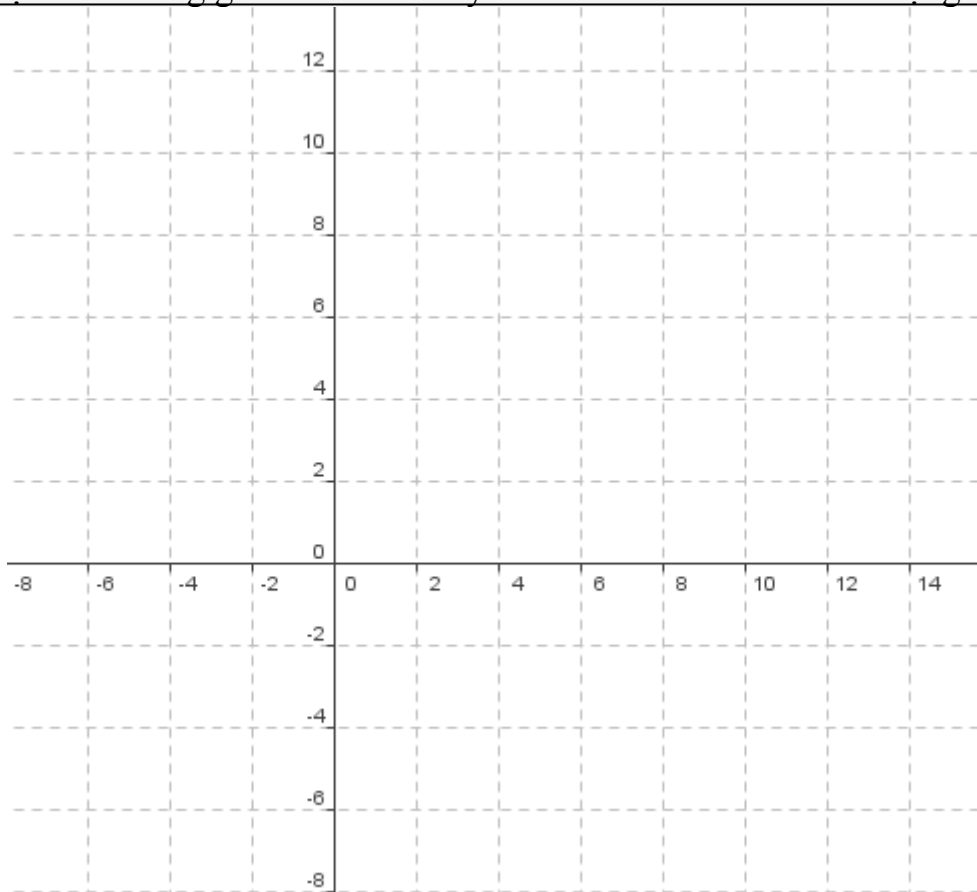
Cách giải	Điểm	Kết quả	Điểm	Cộng
.....				
.....				
.....				
.....				

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{5}(4x^3 - x^4)$

a) Hãy tính các giá trị của f(x) khi $x \in [-2; 5]$ với bước nhảy là 0,5

f(x)	f(-2)	f(-1,5)	f(-1)	f(-0,5)	f(0)	f(0,5)	f(1)	f(1,5)
Giá trị								
f(x)	f(2)	f(2,5)	f(3)	f(3,5)	f(4)	f(4,5)	f(5)	f(5,5)
Giá trị								

b) Vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho trên đoạn $[-2 ; 5]$



Câu 4. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy cho tam giác ABC với A(-2,02; 4,56), B(-2,84; 2,74) , C(-1,2; 3,62).

a) Tính gần đúng giá trị của góc BAC theo đơn vị độ phút giây.

b) Tính gần đúng với 3 số lẻ thập phân khoảng cách từ A đến đường thẳng BC

Cách giải	Điểm	Kết quả	Điểm	Cộng
.....				
.....				
.....				
.....				
.....				

Bài 5. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi I là tâm đối xứng của (C).

Cho điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$, ($x_0 > 1$) và (Δ) là tiếp tuyến của (C) tại M , (Δ) cắt các tiệm cận đứng , xiên của (C) theo thứ tự A, B.

Tính gần đúng tọa độ của M với 9 số lẻ thập phân biết rằng tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất.

Cách giải	Điểm	Kết quả	Điểm	Cộng
.....				
.....				
.....				
.....				
.....				

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 2 , AC = 4 và D là trung điểm của BC. Gọi I , J lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác ABD và ACD. Tính gần đúng 5 số lẻ thập phân khoảng cách giữa 2 điểm I và J

Cách giải	Điểm	Kết quả	Điểm	Cộng
-----------	------	---------	------	------

.....				
.....				
.....				
.....				
.....				

Bài 7. Tính gần đúng với 9 số lẻ thập phân giới hạn sau đây:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3^n + 2^{n+1}}{5n + 3^{n+1}}}$$

Cách giải	Điểm	Kết quả	Điểm	Cộng
.....				
.....				
.....				
.....				
.....				

Bài 8. Tìm nghiệm gần đúng với 8 số lẻ thập phân của phương trình : $\log_x (3.x^{\log_5 x} + 4) = 2\log_5 x$

Cách giải	Điểm	Kết quả	Điểm	Cộng
.....				
.....				
.....				
.....				
.....				

Bài 9. Tìm gần đúng (với 5 số lẻ thập phân) tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) : $2x - 5y + 7 = 0$ với đường tròn (C) có tâm I(2 ; 1) và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Cách giải	Điểm	Kết quả	Điểm	Cộng
.....				
.....				
.....				
.....				
.....				

Bài 10. Hãy chỉ ra một giá trị gần đúng (9 số lẻ thập phân) của x sao cho hàm số:

$$f(x) = (32x^5 - 40x^3 + 10x - 1)^{2008} + (16x^3 - 12x + \sqrt{5} - 1)^{2010}$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Cách giải	Điểm	Kết quả	Điểm	Cộng
.....				
.....				
.....				