Khối THPT chuyên ĐHKHTN-ĐHQGHN

Phương tích-Trục đẳng phương

Lời nói đầu

Phương tích và trục đẳng phương là một vấn đề rất quen thuộc trong hình học phẳng. Kiến thức về chúng cũng khá đơn giản và dễ hiểu, nhưng lại có nhiều ứng dụng trong các bài toán tính yếu tố độ dài, góc, diện tích, chứng minh hệ thức hình học,tập hợp các điểm cùng thuộc một đường tròn , điểm cố định, đường cố định, các bài toán về sự thẳng hàng, đồng quy, vuông góc … Sử dụng phương tích và trục đẳng phương thường đem lại lời giải rất đẹp mắt và thú vị. Vì vậy, nhóm học sinh lớp 10A2 toán khối THPT chuyên ĐHKHTN-ĐHQGHN đã nghiên cứu và viết thành chuyên đề này với hi vọng đem đến cho bạn đọc đầy đủ những ứng dụng của phương tích và trục đẳng phương. Đặc biệt việc khảo sát vị trí của hai đường tròn cũng được đề cập tới với ứng dụng của trục đẳng phương trong các bài toán tọa độ.

Do hoàn thành trong thời gian ngắn, nội dung của bài viết có thể còn nhiều khiếm khuyết, nhóm tác giả rất mong nhận được các ý kiến đóng góp của bạn đọc để chuyên đề được hoàn thiện hơn.

Cuối cùng, chúng em xin chân thành cảm ơn thầy Đỗ Thanh Sơn đã hướng dẫn, đọc bản thảo và cho nhiều ý kiến quý báu.

Hà Nội, tháng 5 năm 2009

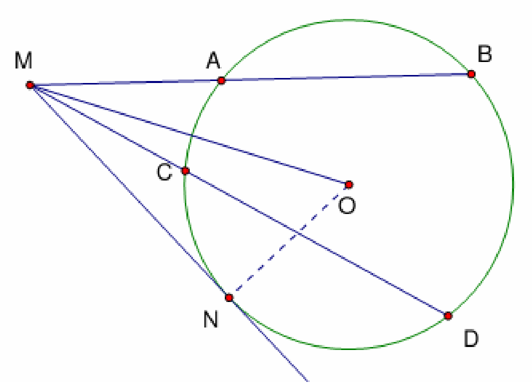
Nhóm thực hiện lớp 10A2 toán:
1.Nguyễn Văn Linh
2.Trần Thị Mai Dung
3.Trần Minh Châu
4.Nguyễn Vũ Dạ My

A.Tóm tắt lý thuyết:

1.Phương tích của một điểm đối với đường tròn

Định lý 1.1:

Cho đường tròn (O,R) và một điểm M trên mặt phẳng cách O một khoảng bằng d.. Từ M kẻ cát tuyến MAB tới (O). Khi đó $\overline{MA}.\overline{MB}=d^2-R^2$ (*)



Hình 1

Định nghĩa: Ta gọi đại lượng d^2-R^2 là phương tích của điểm M đối với (O), kí hiệu là $P_M/(O)=d^2-R^2$

Nhận xét: Nếu $P_M/(O)>0$ thì M nằm ngoài (O),$P_M/(O)=0$ thì M nằm trên biên (O),$P_M/(O)<0$ thì M nằm trong (O).

Trong nhiều bài toán, ta thường sử dụng độ dài đoạn thẳng dạng hình học và viết (*) dưới dạng $MA.MB=|d^2-R^2|$

Định lý 1.2:

Cho (O) và một điểm M trên mặt phẳng. Từ M kẻ 2 cát tuyến MAB, MCD thì $\overline{MA}.\overline{MB}=\overline{MC}.\overline{MD}$ (xem hình 1)

Định lý 1.3:

Cho (O) và một điểm M nằm ngoài (O). Kẻ tiếp tuyến MN, cát tuyến MAB. Ta có $\overline{MA}.\overline{MB}=\overline{MN}^2$ (xem hình 1)

Định lý 1.4:

Cho hai đường thẳng AB,CD cắt nhau tại M (khác A,B,C,D). Nếu $\overline{MA}.\overline{MB}=\overline{MC}.\overline{MD}$ thì 4 điểm A,B,C,D cùng thuộc một đường tròn.

Định lý 1.5:

Cho hai đường thẳng AB,MN cắt nhau tại M. Nếu $\overline{MA}.\overline{MB}=\overline{MN}^2$ thì đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN tiếp xúc với MN tại N.

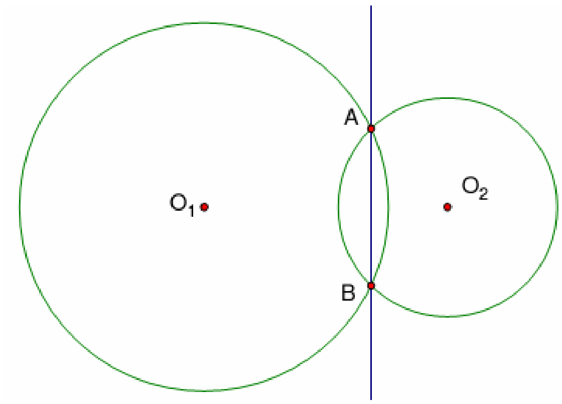
Các định lý trên đều rất đơn giản và quen thuộc, xin dành lại cho bạn đọc chứng minh.

2. Trục đẳng phương của hai đường tròn-tâm đẳng phương:

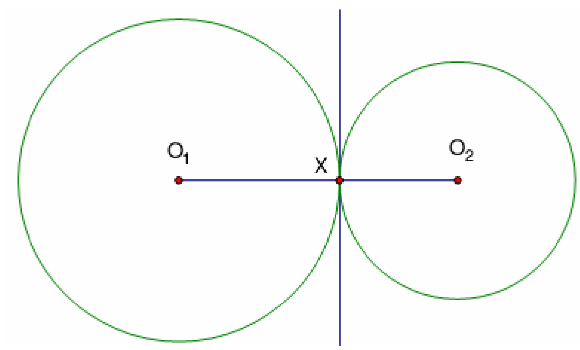
Định lý 2.1: Tập hợp các điểm M có cùng phương tích đối với hai đường tròn không đồng tâm (O_1,R_1),(O_2,R_2) là một đường thẳng vuông góc với đường thẳng nối hai tâm O_1,O_2. Nếu gọi O là trung điểm O_1O_2, H là hình chiếu của M trên O_1O_2 thì

$$\overline{OH}=\frac{R_1^2-R_2^2}{2\overline{O_1O_2}}$$

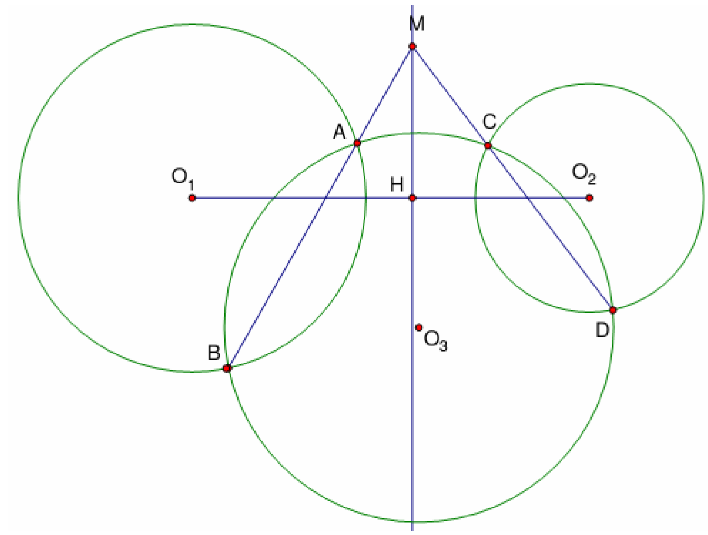
Định nghĩa 2.1: Đường thẳng MH được gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn.
Cách dựng trục đẳng phương:
Trường hợp 1: (O_1) giao (O_2) tại 2 điểm phân biệt A,B. Đường thẳng AB chính là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2)



Trường hợp 2: (O_1) và (O_2) chỉ có một điểm chung X. Tiếp tuyến chung tại X của hai đường tròn là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2)



Trường hợp 3: (O_1) và (O_2) không có điểm chung, dựng đường tròn (O_3) có hai điểm chung với (O_1) và (O_2). Dễ dàng vẽ được trục đẳng phương của (O_1) và (O_3), (O_2) và (O_3). Hai đường thẳng này giao nhau tại M. Từ M kẻ $MH \perp O_1O_2$. MH chính là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2).



Cách dựng này dựa vào định lý sau:

Định lý 2.2:

Cho ba đường tròn (O_1),(O_2),(O_3).l_1,l_2,l_3 theo thứ tự là trục đẳng phương của các cặp hai đường tròn (O_1) và (O_2), (O_2) và (O_3), (O_3) và (O_1)

+Nếu O_1,O_2,O_3 không thẳng hàng thì l_1,l_2,l_3 đồng quy.

+Nếu O_1,O_2,O_3 thẳng hàng thì l_1,l_2,l_3 đôi một song song hoặc trùng nhau.

Định nghĩa 2.2: Điểm đồng quy của các đường thẳng l_1,l_2,l_3 được gọi là tâm đẳng phương của các đường tròn (O_1),(O_2),(O_3)

3.Phương tích, trục đẳng phương trong hệ toạ độ:

Định lý 3.1: Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình:

$C(x,y)=x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ với $a^2+b^2>c$. Khi đó, phương tích của điểm $M(x_o,y_o)$ đối với đường tròn (C) là $P_M/(C)=x_o^2+y_o^2+2ax_o+2by_o+c=C(x_o,y_o)$

Nhận xét: Vị trí của M đối với (C): M nằm ngoài (C) $\Leftrightarrow C(x_o,y_o)>0$, M nằm trên (C) $\Leftrightarrow C(x_o,y_o)=0$, M nằm trong (C) $\Leftrightarrow C(x_o,y_o)<0$

Định lý 3.2: Trục đẳng phương của hai đường tròn không đồng tâm:

(C_1): $x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1=0$

(C_2):$x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c_2=0$, trong đó $(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2\neq 0$, có phương trình:

$$(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+\frac{c_1-c_2}{2}=0$$

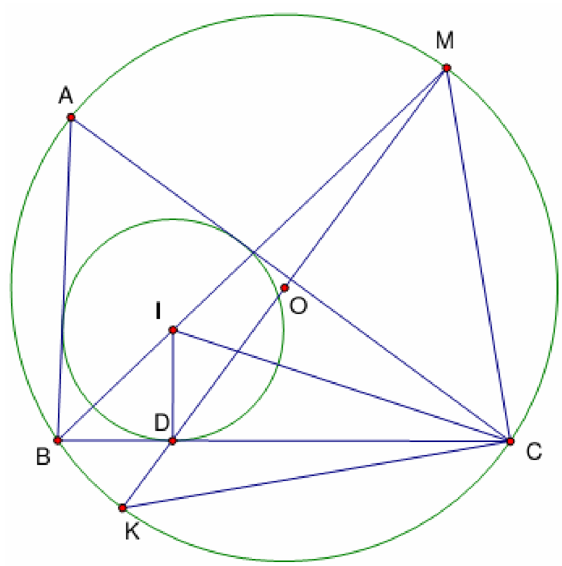
B.Ví dụ:

1. Chứng minh các hệ thức hình học:

Ví dụ 1:

Cho tam giác ABC nội tiếp (O,R), ngoại tiếp (I,r). CMR $OI^2=R^2-2Rr$ (*hệ thức Ơ-le*)

Lời giải:



Kéo dài BI cắt (O) tại M. Kẻ đường kính MK của (O). (I) tiếp xúc với BC tại D.

Ta có $\triangle BDI \sim \triangle KCM\,(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{BI}{KM}=\frac{ID}{MC}=\frac{ID}{MI}$$

$\Rightarrow$ IB.IM=ID.KM=2Rr

Mà $IB.IM=R^2-OI^2$

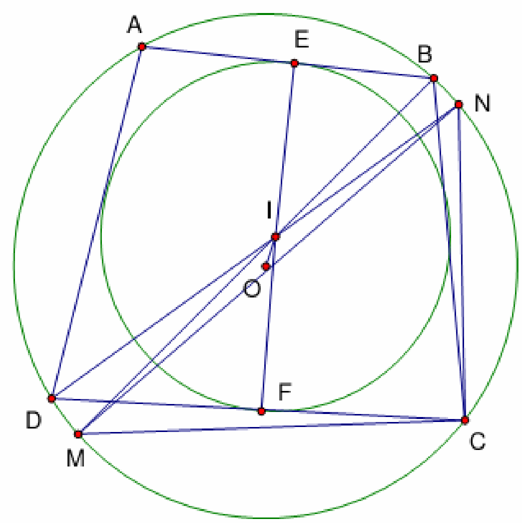
Vậy $OI^2=R^2-2Rr$ (đpcm)

Ví dụ 2:

Cho tứ giác ABCD vừa nội tiếp (O,R), vừa ngoại tiếp (I,r). Đặt OI=d. CMR:

$$\frac{1}{(R-d)^2}+\frac{1}{(R+d)^2}=\frac{1}{r^2}$$ *(Định lý Fuss)*

Lời giải:



Kéo dài BI, DI cắt (O) tại M,N.
Ta có $\angle$MNC=$\angle$IBC, $\angle$NMC=$\angle$IDC
Suy ra $\angle$MNC+$\angle$NMC=$\angle$IBC+$\angle$IDC=1/2($\angle$ADC+$\angle$ABC)=90^o
Suy ra O là trung điểm MN.
Áp dụng công thức tính đường trung tuyến trong tam giác IMN ta có:

$$OI^2=\frac{IM^2}{2}+\frac{IN^2}{2}-\frac{MN^2}{4}=\frac{IM^2}{2}+\frac{IN^2}{2}-R^2$$

Do đó $\frac{1}{(R-d)^2}+\frac{1}{(R+d)^2}=\frac{2(R^2+d^2)}{(R^2-d^2)^2}=\frac{IM^2+IN^2}{(P_I/(O))^2}=\frac{IM^2}{IM^2.IB^2}+\frac{IN^2}{IN^2.ID^2}$

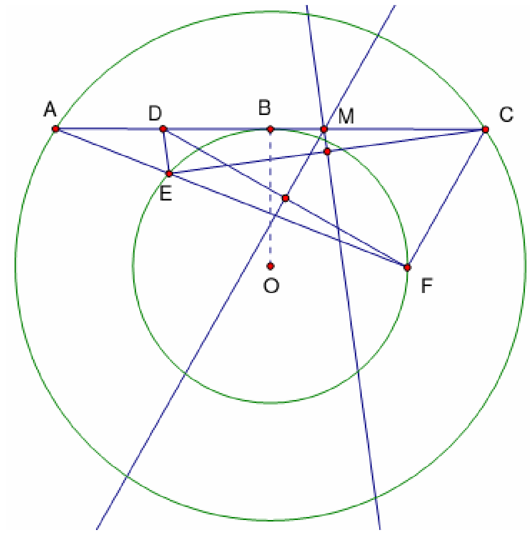
$$=\frac{1}{IB^2}+\frac{1}{ID^2}=\frac{\sin^2\frac{\angle B}{2}}{r^2}+\frac{\sin^2\frac{\angle D}{2}}{r^2}=\frac{1}{r^2}\ \text{(đpcm)}$$

2.Tính các đại lượng hình học:

Ví dụ (USAMO 1998):

Cho 2 đường tròn đồng tâm O (C_1) và (C_2) ((C_2) nằm trong (C_1)). Từ một điểm A nằm trên (C_1) kẻ tiếp tuyến AB tới (C_2). AB giao (C_1) lần thứ 2 tại C. D là trung điểm AB. Một đường thẳng qua A cắt (O_2) tại E,F sao cho đường trung trực của đoạn DF và EC giao nhau tại điểm M nằm trên AC.Tính $\frac{AM}{MC}$?

Lời giải:



Dễ thấy B là trung điểm AC.

Ta có $P_A/(C_2)=\ \overline{AE}.\overline{AF}=AB^2=\frac{1}{2}\overline{AB}.2\overline{AB}=\overline{AD}.\overline{AC}$

Suy ra tứ giác DCFE nội tiếp.Do đó M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác DCFE. Mà M nằm trên AC nên MD=MC=$\frac{1}{2}$DC

Từ đó tính được AM=$\frac{5}{4}$AB và MC=$\frac{3}{4}$AB

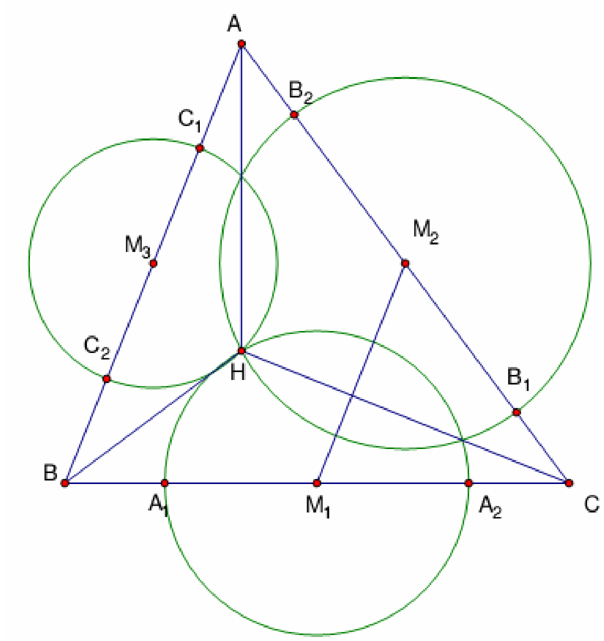
$\Rightarrow \frac{AM}{MC}=\frac{5}{3}$

3. Chứng minh tập hợp điểm cùng thuộc một đường tròn:

Ví dụ 1 (IMO 2008):

Cho tam giác ABC, trực tâm H.M_1,M_2,M_3 lần lượt là trung điểm BC,CA,AB. (M_1,M_1H)$\cap$BC={A_1,A_2 }, (M_2,M_2H)$\cap$AC={B_1,B_2 }, (M_3,M_3H)$\cap$AB={C_1,C_2 }. CMR A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải:

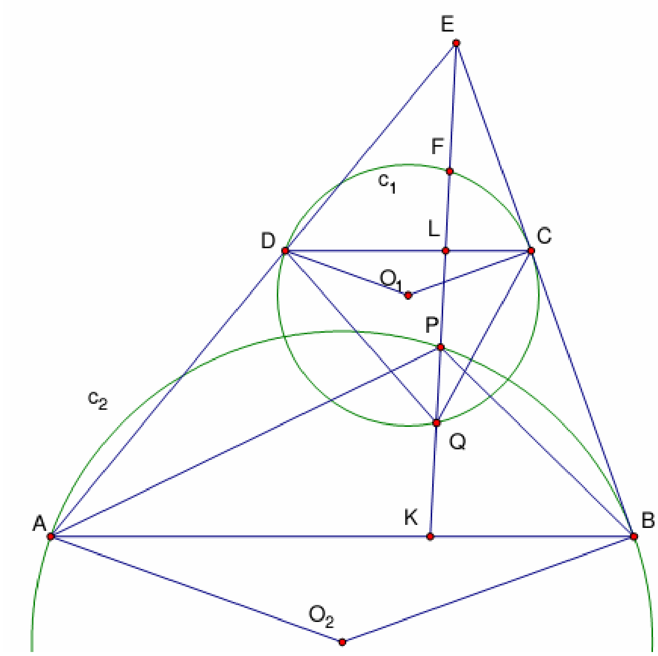


Do M_1M_2//AB và AB$\perp$HC nên $M_1M_2\perp$HC
Suy ra HC là trục đẳng phương của (M_1) và (M_2).
$\Rightarrow \overline{CA_1}.\overline{CA_2} = \overline{CB_1}.\overline{CB_2}$
Suy ra A_1,A_2,B_1,B_2 thuộc đường tròn (W_1)
Tương tự A_1,A_2,C_1,C_2 thuộc đường tròn (W_2), C_1,C_2,B_1,B_2 thuộc đường tròn (W_3)
Nếu 6 điểm A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 không cùng thuộc một đường tròn thì các trục đẳng phương của 3 đường tròn (W_1),(W_2),(W_3) phải đồng quy tại một điểm, nhưng chúng lại cắt nhau tại A,B,C nên vô lý.
Vậy ta có đpcm.

Ví dụ 2 (IMO shortlist 2006):

Cho hình thang ABCD (AB>CD). K,L là hai điểm trên AB,CD sao cho $\frac{AK}{BK} = \frac{DL}{CL}$. Giả sử P,Q nằm trên đoạn thẳng KL sao cho $\angle$APB=$\angle$BCD và $\angle$CQD=$\angle$ABC. CMR bốn điểm P,Q,B,C cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải:



Từ giả thiết, $\frac{AK}{BK}=\frac{DL}{CL}$ suy ra AD,BC,KL đồng quy tại E.

Dựng đường tròn (O_1) đi qua hai điểm C,D và tiếp xúc với BC, (O_2) đi qua hai điểm AB và tiếp xúc với BC. Khi đó $\angle DQC = \angle ABC = \angle DCE$ nên $Q \in (O_1)$, tương tự $P \in (O_2)$.

Gọi F là giao điểm thứ hai của EQ với (O_1). Ta có:

$\overline{EF}.\overline{EQ}=\overline{EC}^2$ (1)

Mặt khác, dễ dàng có $\angle O_1CD = \angle O_2BA$ do đó $\triangle AO_2B \sim \triangle DO_1C$

$\Rightarrow \frac{O_1C}{O_2B}=\frac{DC}{AB}=\frac{EC}{EB}=k \Rightarrow E,O_1,O_2$ thẳng hàng và $\frac{EO_1}{EO_2}=k \Rightarrow \overrightarrow{EO_1}=k\overrightarrow{EO_2}$

Suy ra phép vị tự $H_{(E,k)}$: $(O_1) \rightarrow (O_2)$. Mà E,F,P thẳng hàng, $F \in (O_1)$, $P \in (O_2)$ nên

$\overrightarrow{EF}=k\overrightarrow{EP} \Rightarrow \frac{EF}{EP}=k=\frac{EC}{EB}$ (2)

Từ (1),(2) suy ra $\overline{EP}.\overline{EQ}=\overline{EC}.\overline{EB}$.

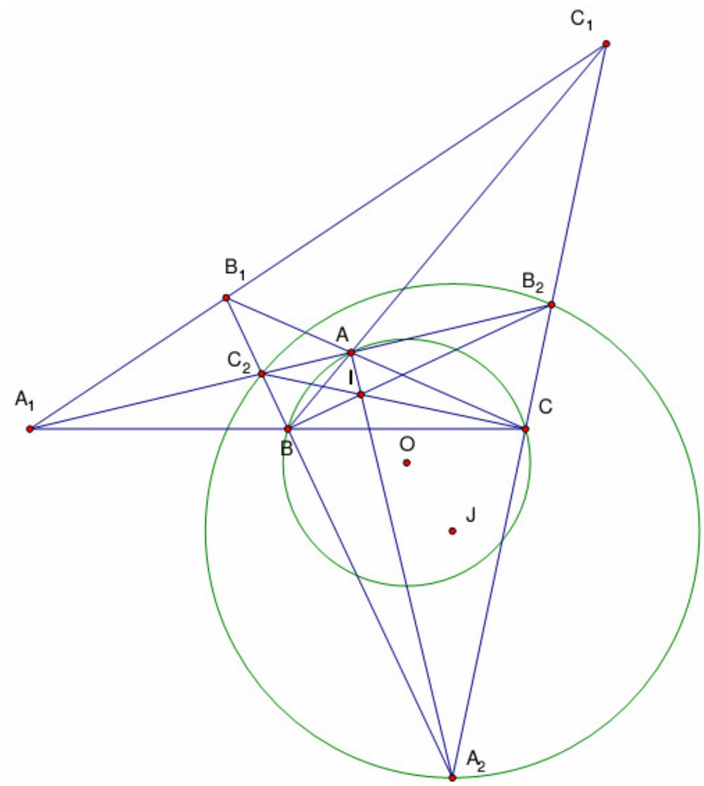
Vậy 4 điểm P,Q,B,C cùng thuộc một đường tròn (đpcm)

4.Chứng minh sự thẳng hàng, đồng quy:

Ví dụ 1:

Cho tam giác ABC. Các phân giác ngoài góc A,B,C lần lượt cắt cạnh đối diện tại A_1,B_1,C_1. CMR A_1,B_1,C_1 thẳng hàng và nằm trên đường vuông góc với đường thẳng nối tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải:



Gọi $A_2B_2C_2$ là tam giác tạo bởi 3 phân giác ngoài góc A,B,C. Dễ dàng có $AA_2 \perp B_2C_2, BB_2 \perp A_2C_2, CC_2 \perp A_2B_2$.

Tứ giác BC_2B_2C nội tiếp nên $\overline{A_1C_2}.\overline{A_1B_2} = \overline{A_1B}.\overline{A_1C}$

Tương tự $\overline{B_1C_2}.\overline{B_1A_2} = \overline{B_1A}.\overline{B_1C}$, $\overline{C_1B_2}.\overline{C_1A_2} = \overline{C_1A}.\overline{C_1B}$

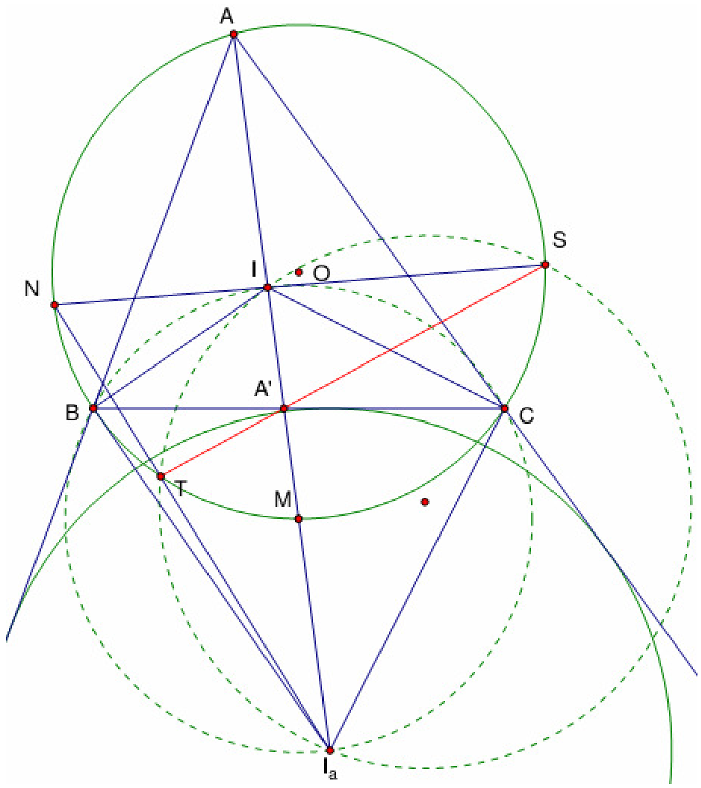
Suy ra A_1,B_1,C_1 cùng nằm trên trục đẳng phương của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC và đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$. Mà (O) là đường tròn Ơ-le của tam giác $A_2B_2C_2$, AA_2,BB_2,CC_2 giao nhau tại trực tâm I của tam giác $A_2B_2C_2$ (cũng đồng thời là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC) suy ra I,O,J thẳng hàng.

Vậy đường thẳng qua A_1,B_1,C_1 vuông góc với OI (đpcm)

<u>Ví dụ 2 (Iran NMO 2001):</u>

Cho tam giác ABC nội tiếp (O). (I), (I_a) lần lượt là đường tròn nội tiếp và bàng tiếp góc A. Giả sử II_a giao BC và (O) lần lượt tại A', M.Gọi N là trung điểm cung MBA. NI, NI_a giao (O) lần lượt tại S,T. CMR S,T,A' thẳng hàng.

<u>Lời giải:</u>



Ta có $\angle$NTS=$\frac{1}{2}\left(sd\,\overparen{NA}+sd\,\overparen{AS}\right)=\frac{1}{2}\left(sd\,\overparen{NM}+sd\,\overparen{AS}\right)=\angle NIM$

$\Rightarrow \angle I_aTS=\angle I_aIS$

Suy ra tứ giác I_aTIS nội tiếp (w_1)

Mặt khác, $\angle$ IBI_a=$\angle$ ICI_a=90^o nên tứ giác IBI_aC nội tiếp (w_2)

Ta thấy II_a là trục đẳng phương của (w_1) và (w_2), BC là trục đẳng phương của (O) và (w_2), TS là trục đẳng phương của (O) và (w_1)

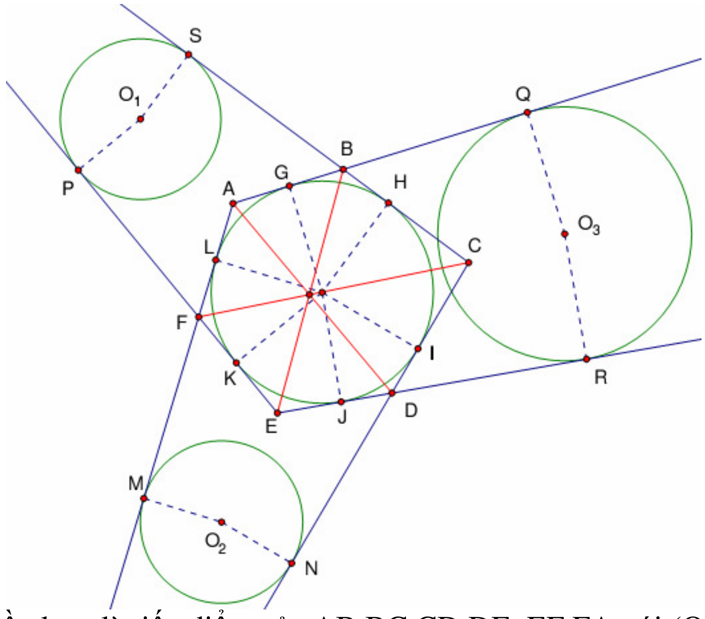
Theo định lý về tâm đẳng phương thì II_a, TS, BC đồng quy tại A'.

Vậy T,A',S thẳng hàng (đpcm)

<u>Ví dụ 3(Định lý Brianchon):</u>

Cho lục giác ABCDEF ngoại tiếp (O). CMR AD,BE,CF đồng quy.

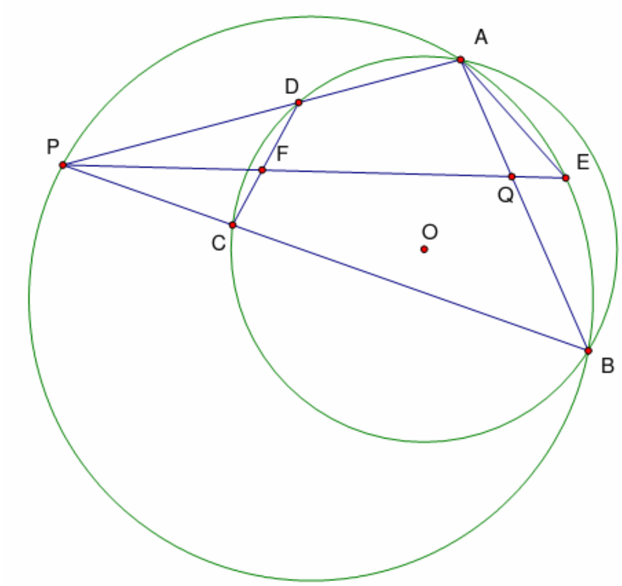
<u>Lời giải:</u>



Gọi G,H,I,J,K,L lần lượt là tiếp điểm của AB,BC,CD,DE, EF,FA với (O).
Trên tia KF,HB, GB, JD, ID, LF lần lượt lấy các điểm P,S, Q,R,N ,M sao cho KP=SH=GQ=JR=IN=LM. Dựng (O_1) tiếp xúc với EF,CB tại P,S, (O_2) tiếp xúc AF,CD tại M,N, (O_3) tiếp xúc AB, ED tại Q,R.
Ta có FP=PK-FK=LM-LF=FM, CS=SH+HC=IN+IC=CN
Suy ra FC là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2).
Tương tự AD là trục đẳng phương của (O_2) và (O_3), BE là trục đẳng phương của (O_3) và (O_1). Áp dụng định lý về tâm đẳng phương ta có AD,BE,CF đồng quy (đpcm)

5.Chứng minh điểm cố định, đường cố định:

Ví dụ 1: Cho (O,R) và hai điểm P,Q cố định (P nằm ngoài (O), Q nằm trong (O)). Dây cung AB của (O) luôn đi qua Q. PA, PB lần lượt giao (O) lần thứ hai tại D,C. CMR CD luôn đi qua một điểm cố định.
Lời giải:



Gọi E là giao điểm thứ hai khác P của PQ với đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB. CD giao PQ tại F.

Ta có $OQ^2 - R^2 = \overline{QA}.\overline{QB} = \overline{QP}.\overline{QE}$, mà P,Q cố định nên $\overline{QP}$ =const, suy ra $\overline{QE}$ =const, do đó E cố định.

Mặt khác $\angle PDC = \angle PBA = \angle PEA$ nên tứ giác DAEF nội tiếp.

Suy ra $PO^2 - R^2 = \overline{PD}.\overline{PA} = \overline{PE}.\overline{PF}$. Do P,E cố định nên $\overline{PE}$=const, suy ra $\overline{PF}$ =const

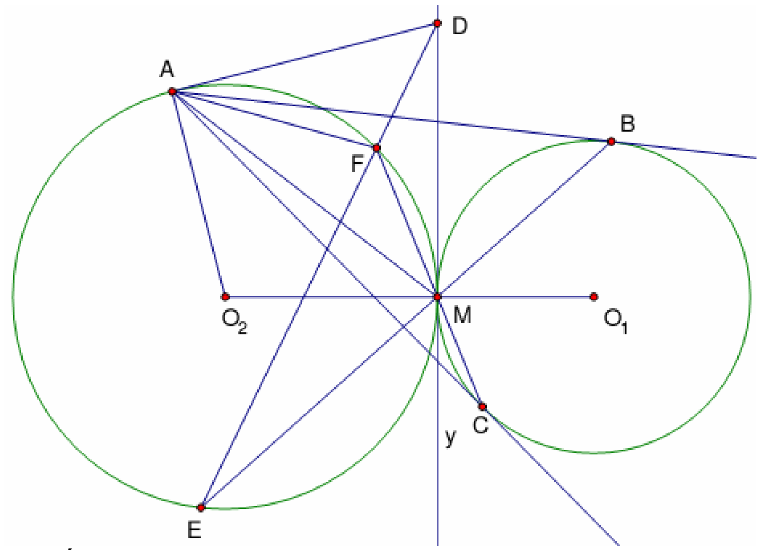
Do đó F cố định.

Vậy CD luôn đi qua điểm F cố định (đpcm)

<u>Ví dụ 2 (Việt Nam 2003):</u>

Cho (O_1,R_1) tiếp xúc ngoài với (O_2,R_2) tại M $(R_2>R_1)$. Xét điểm A di động trên đường tròn sao cho A,O_1,O_2 không thẳng hàng.Từ A kẻ tiếp tuyến AB,AC tới (O_1).Các đường thẳng MB,MC cắt lại (O_2) tại E,F.D là giao điểm của EF với tiếp tuyến tại A của (O_2).CMR D di động trên một đường thẳng cố định.

<u>Lời giải:</u>



Qua M kẻ tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2).

Ta có $\angle MCA = \angle CMy = \angle FMD = \angle FAM$

Do đó $\triangle FAM \sim \triangle FCA$ (g.g) $\Rightarrow FA^2 = \overline{FM}.\overline{FC} = FO_1^2 - R_1^2$ (1)

Tương tự $EA^2 = EO_1^2 - R_1^2$ (2)

Coi (A,0) là đường tròn tâm A, bán kính 0 thì từ (1)(2) ta được EF là trục đẳng phương của (A,0) với (O_1).

Mà D nằm trên EF nên $DA^2=DO_1^2-R_1^2$

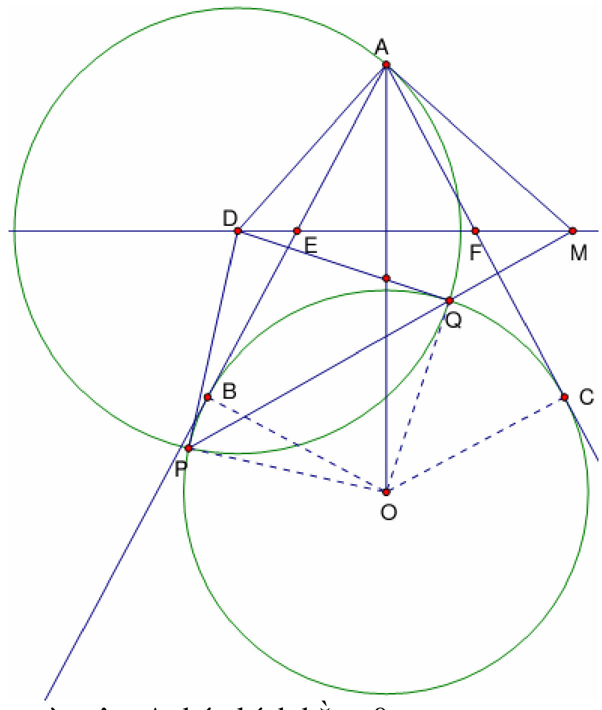
$\Rightarrow P_D/(O_1)=P_D/(O_2)$

Vậy D nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn cố định (O_1) và (O_2)

6.Chứng minh các yếu tố khác:

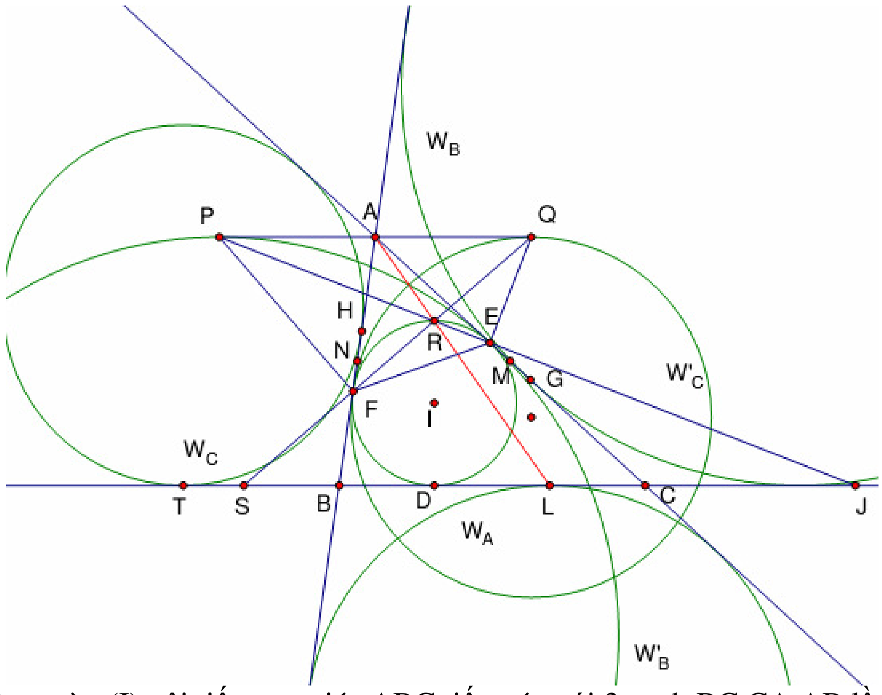
Ví dụ 1: Cho (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ tiếp tuyến AB,AC tới (O). E,F lần lượt là trung điểm AB,AC.D là một điểm bất kì trên EF. Từ D kẻ tiếp tuyến DP,DQ tới (O).PQ giao EF tại M.CMR $\angle DAM = 90^o$

Lời giải:



Kí hiệu (A,0) là đường tròn tâm A, bán kính bằng 0.
Do $EB^2=EA^2-0^2=EA^2$ và $FC^2=FA^2$ nên EF là trục đẳng phương của (A,0) và (O).
$\Rightarrow DA^2=DP^2=DQ^2 \Rightarrow$ D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.
Lại có M nằm trên trục đẳng phương của (A,0) và (O) nên $MA^2=MP.MQ$
Suy ra MA là tiếp tuyến của (D,DA).
Vậy $\angle DAM = 90^o$ (đpcm)

Ví dụ 2 (Russian 2005):
Cho tam giác ABC, W_B, W_C là các đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh B,C. W'_B, W'_C lần lượt là đường tròn đối xứng với W_B, W_C qua trung điểm cạnh AC, AB. CMR trục đẳng phương của W'_B và W'_C chia đôi chu vi tam giác ABC.
Lời giải:



Giả sử đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với 3 cạnh BC,CA,AB lần lượt tại D,E,F. M, N là trung điểm AC,AB. W_B tiếp xúc với AC tại G, W_C tiếp xúc với AB tại H, với BC tại T.

Ta có E đối xứng với G qua M, F đối xứng với H qua N.

Do đó W'_B tiếp xúc với AC tại E, W'_C tiếp xúc với AB tại F và $AE^2=AF^2$ nên A nằm trên trục đẳng phương của W'_B và W'_C

Mặt khác, qua A kẻ đường thẳng d song song với BC. Trên d lấy 2 điểm P,Q thoả mãn AP=AF=AE=AQ. Gọi S là giao của QF với BC, J là giao của PE với BC.$QF\cap PE=\{R\}$

Vì AQ=AF=BH=BT và AQ//BC nên Q đối xứng với T qua N.Suy ra $Q\in W'_C$, tương tự $P\in W'_B$.

Tứ giác PQEF nội tiếp nên $\overline{RP}.\overline{RE}=\overline{RQ}.\overline{RF}$ suy ra R nằm trên trục đẳng phương của W'_B và W'_C.

Do đó AR là trục đẳng phương của W'_B và W'_C. Giả sử AR cắt BC tại L thì L là trung điểm SJ.

Dễ thấy DB=FB=SB, DC=EC=JC. Gọi L' là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC với cạnh BC.

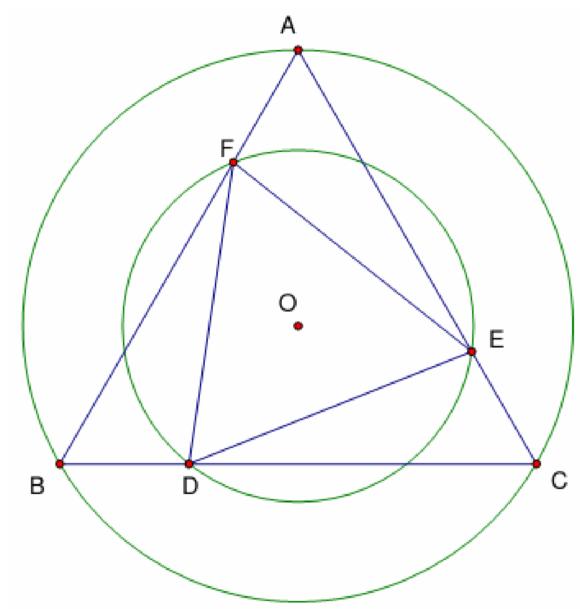
Ta có L'B=DC, L'C=BD nên L'B+BS=L'C+CJ hay L' là trung điểm đoạn SJ $\Rightarrow L'\equiv L$

Mà AL chia đôi chu vi tam giác ABC nên trục đẳng phương của W'_B và W'_C chia đôi chu vi tam giác ABC (đpcm)

<u>Ví dụ 3 (Romani TST 2008):</u>

Cho tam giác ABC. Các điểm D,E,F lần lượt nằm trên 3 cạnh BC,CA,AB sao cho $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{BF}}$. CMR nếu 2 tam giác ABC và DEF có chung trực tâm thì tam giác ABC đều.

<u>Lời giải:</u>



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Ta có: $\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}=\left(\frac{BD}{BC}\overrightarrow{GC}+\frac{CD}{CB}\overrightarrow{GB}\right)+\left(\frac{CE}{CA}\overrightarrow{GA}+\frac{AE}{AC}\overrightarrow{GC}\right)+\left(\frac{\mathrm{AF}}{AB}\overrightarrow{GB}+\frac{BF}{BA}\overrightarrow{GA}\right)$

$=\left(\frac{BD}{BC}+\frac{AE}{AC}\right)\overrightarrow{GC}+\left(\frac{CD}{CB}+\frac{\mathrm{AF}}{AB}\right)\overrightarrow{GB}+\left(\frac{CE}{CA}+\frac{BF}{BA}\right)\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Suy ra hai tam giác ABC và DEF có chung trọng tâm G. Mà chúng lại chung trực tâm H nên dựa vào tính chất của đường thẳng Ơ-le: OH=2OG suy ra chúng có chung tâm đường tròn ngoại tiếp O.

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Do OD=OE nên $P_D/(O)=P_E/(O)$

$\Rightarrow \overline{DB}.\overline{DC}=\overline{EC}.\overline{EA}$

$\Rightarrow \frac{\overline{DB}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{DC}}$

Mặt khác $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}\Rightarrow\frac{\overline{EA}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{EC}}{\overline{DB}}$

$\Rightarrow \frac{\overline{DB}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{EC}}{\overline{DB}}\Rightarrow DB^2=EC^2$

$\Rightarrow DB=EC$

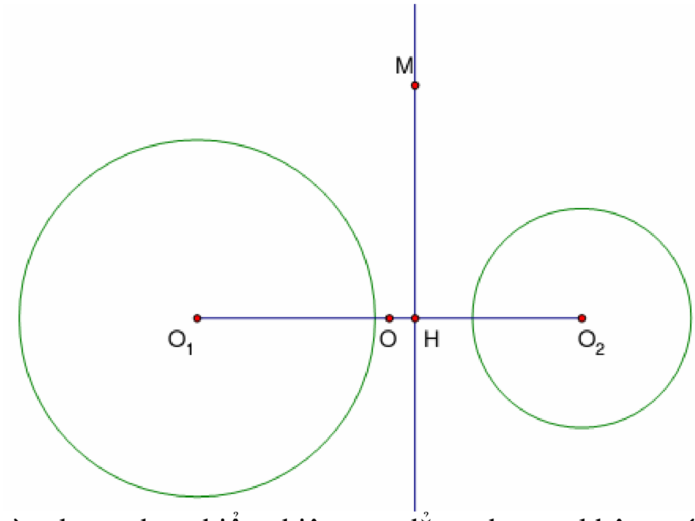
Mà $\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{EC}}{\overline{CA}}\Rightarrow BC=AC$. Tương tự AB=AC suy ra tam giác ABC đều.

7. Khảo sát vị trí hai đường tròn:

Ví dụ 1:

Chứng minh rằng nếu hai đường tròn đựng nhau thì hai đường tròn đó nằm về một phía với trục đẳng phương. Nếu hai đường tròn nằm ngoài nhau thì chúng nằm về hai phía của trục đẳng phương.

<u>Lời giải:</u>



+Nếu hai đường tròn đựng nhau, hiển nhiên trục đẳng phương không có điểm chung với đường tròn lớn vì nếu M là điểm chung thì phương tích từ M tới đường tròn nhỏ phải bằng 0 và hai đường tròn giao nhau tại M, vô lý.

Do đó đường tròn lớn nằm về một phía của trục đẳng phương và mọi điểm trong của đường tròn cũng nằm về phía đó. Vậy hai đường tròn nằm về một phía với trục đẳng phương.

+Nếu hai đường tròn ngoài nhau. Gọi O là trung điểm O_1O_2. M là một điểm nằm trên trục đẳng phương. H là hình chiếu của M trên O_1O_2. Không mất tổng quát giả sử $R_1>R_2$.

Ta có $\overline{OH}=\dfrac{R_1^2-R_2^2}{2\overline{O_1O_2}}$ suy ra $2\overline{O_1O_2}.\overline{OH}=R_1^2-R_2^2>0$, tức là $\overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{O_1O_2}$ cùng hướng, hay H nằm trên tia OO_2.Mặt khác OH=$\dfrac{R_1^2-R_2^2}{2O_1O_2}$<1/2$O_1O_2$ nên H nằm trên đoạn thẳng OO_2.

Vậy O_1,O_2 nằm khác phía đối với H, mà trục đẳng phương không có điểm chung với hai đường tròn nên hai đường tròn (O_1),(O_2) nằm khác phía đối với trục đẳng phương.

<u>Ví dụ 2:</u>

Chứng minh rằng nếu trục đẳng phương của hai đường tròn cắt một trong hai đường tròn thì hai đường tròn đã cho cắt nhau. Nếu trục đẳng phương của hai đường tròn tiếp xúc với một trong hai đường tròn thì hai đường tròn đã cho tiếp xúc nhau.

<u>Lời giải:</u>

Gọi C_1,C_2 là hai đường tròn có trục đẳng phương d và M là điểm chung của C_1 với d.

Ta có $P_M/(C_1)=P_M/(C_2)=0$ chứng tỏ M thuộc C_2. Từ đó suy ra đpcm.

C.Bài tập:

1.Chứng minh các hệ thức hình học:

Bài 1: Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O). $CD \cap AB=\{M\}$, $AD \cap BC=\{N\}$. CMR $MN^2=P_M/(O)+P_N/(O)$

Bài 2(Romani TST 2006): Cho (O) và một điểm A nằm ngoài (O). Từ A kẻ cát tuyến ABC, ADE ($B\in [AC]$, $D\in [AE]$). Qua D kẻ đường thẳng song song với AC cắt (O) lần thứ 2 tại F. AF cắt (O) tại G. EG cắt AC tại M. CMR $\frac{1}{AM}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$

Bài 3: Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O). P nằm trên cung CD không chứa A,B. $PA,PB \cap DC$ lần lượt tại M,N. CMR $\frac{\overline{MD}.\overline{NC}}{\overline{MN}}=const$

Bài 4 (Đề nghị Olympic 30-4): Cho tam giác ABC nội tiếp (O,R). Gọi G là trọng tâm tam giác. Giả sử GA,GB,GC cắt (O) lần thứ hai tại A',B',C'. CMR:

$$\frac{1}{G'A^2}+\frac{1}{G'B^2}+\frac{1}{G'C^2}=\frac{27}{a^2+b^2+c^2}$$

Bài 5: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) tại một điểm thuộc cung BC không chứa A. Từ A,B,C theo thứ tự kẻ tới (O') các tiếp tuyến AA',BB',CC'. CMR: BC.AA''=CA.BB''+AB.CC'' (*<u>định lý Ptô-lê-mê mở rộng</u>*)

Bài 6: Cho tam giác ABC với diện tích S nội tiếp (O,R). Giả sử S_1 là diện tích của tam giác tạo bởi các chân đường vuông góc hạ xuống các cạnh của tam giác ABC từ một điểm M nằm cách O một khoảng d. CMR $S_1=\frac{1}{4}S\left|1-\frac{d^2}{R^2}\right|$ (*<u>Hệ thức Ơ-le</u>*)

2.Tính các đại lượng hình học:

Bài 7: Cho tam giác đều ABC cạnh a nội tiếp (O). Đường tròn (O',R) tiếp xúc với cạnh BC và tiếp xúc với cung BC nhỏ. Tính AO' theo a và R

Bài 8 (All-Russian MO 2008): Cho tam giác ABC nội tiếp (O,R), ngoại tiếp (I,r). (I) tiếp xúc với AB,AC lần lượt tại X,Y. Gọi K là điểm chính giữa cung AB không chứa C. Giả sử XY chia đôi đoạn AK. Tính $\angle BAC$?

Bài 9 (All-Russian MO 2007): Hai đường tròn (O_1) và (O_2) giao nhau tại A và B. PQ, RS là 2 tiếp tuyến chung của 2 đường tròn ($P,R \in (O_1)$, $Q,S \in (O_2)$). Giả sử RB//PQ, RB cắt (O_2) lần nữa tại W. Tính $\frac{RB}{BW}$?

3.Chứng minh tập hợp điểm cùng thuộc một đường tròn:

Bài 10: Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O) ($AB\neq CD$). Dựng hai hình thoi AEDF và BMCN có cạnh bằng nhau. CMR 4 điểm E,F,M,N cùng thuộc một đường tròn.

Bài 11 (IMO Shortlist 1995): Cho tam giác ABC với (I) là đường tròn nội tiếp. (I) tiếp xúc với 3 cạnh BC,CA,AB lần lượt tại D,E,F.X là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho đường tròn nội tiếp tam giác XBC tiếp xúc với XB,XC,BC lần lượt tại Z,Y,D.CMR tứ giác EFZY nội tiếp.

Bài 12 (International Zhautykov Olympiad 2008):Trên mặt phẳng cho 2 đường tròn (O_1) và (O_2) ngoài nhau. A_1A_2 là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn ($A_1 \in (O_1)$, $A_2 \in (O_2)$). K là trung điểm A_1A_2.Từ K lần lượt kẻ 2 tiếp tuyến KB_1,KB_2 tới (O_1),(O_2). $A_1B_1 \cap A_2B_2=\{L\}$, $KL \cap O_1O_2=\{P\}$.CMR B_1,B_2,P,L cùng nằm trên một đường tròn.

4.Chứng minh sự thẳng hàng, đồng quy:

Bài 13:Cho nửa đường tròn đường kính AB và điểm C nằm trên đó. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ C xuống AB. Đường tròn đường kính CH cắt CA tại E, CB tại F và đường tròn đường kính AB tại D. CMR CD, EF,AB đồng quy.

Bài 14: Cho 2 đường tròn (O_1) và (O_2) ngoài nhau. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài A_1A_2, tiếp tuyến chung trong B_1B_2 của 2 đường tròn (A_1, $B_1 \in (O_1)$, A_2,$B_2 \in (O_2)$). CMR A_1B_1, A_2B_2, O_1O_2 đồng quy.

Bài 15 (Việt Nam TST-2009):Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O). A_1,B_1,C_1 lần lượt là chân đường vuông góc của A,B,C xuống cạnh đối diện. A_2,B_2,C_2 đối xứng với A_1,B_1,C_1 qua trung điểm BC,CA,AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_2C_2,BC_2A_2,CA_2B_2 cắt (O) lần thứ 2 tại A_3,B_3,C_3. CMR A_1A_3,B_1B_3,C_1C_3 đồng quy.

Bài 16 (Olympic toán học Mĩ 1997):Cho tam giác ABC. Bên ngoài tam giác này vẽ các tam giác cân BCD, CAE, ABF có các cạnh đáy tương ứng là BC,CA,AB.CMR 3 đường thẳng vuông góc kẻ từ A,B,C tương ứng xuống EF,FD,DE đồng quy.

Bài 17 (IMO 1995):Trên đường thẳng d lấy 4 điểm A, B, C, D (theo thứ tự đó). Đường tròn đường kính AC và BD cắt nhau tại X, Y. Đường thẳng XY cắt BC tại Z. Lấy P là một điểm trên XY khác Z. Đường thẳng CP cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ 2 là M, và BP cắt đường tròn đường kính BD tại điểm thứ 2 là N. Chứng minh rằng AM, DN và XY đồng qui.

Bài 18:Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Đường tròn bàng tiếp góc A có tâm I, tiếp xúc với các cạnh BC,CA,AB lần lượt tại M,N,P.CMR tâm đường tròn Ơ-le của tam giác MNP thuộc đường thẳng OI.

Bài 19:Tam giác ABC không cân nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). Các điểm A',B',C' theo thứ tự thuộc BC,CA,AB thoả mãn $\angle AIA' = \angle BIB' = \angle CIC' = 90^o$. CMR A',B',C' cùng thuộc một đường thẳng và đường thẳng đó vuông góc với OI.

Bài 20:Cho tam giác ABC nội tiếp (O), 3 đường cao AA',BB',CC'. Kí hiệu W_A là đường tròn qua AA' và tiếp xúc với OA. W_B, W_C được định nghĩa tương tự. CMR 3 đường tròn đó cắt nhau tại 2 điểm thuộc đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC.

Bài 21:Cho tam giác ABC. A', B' lần lượt nằm trên 2 cạnh BC và AC. CMR trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính BB' và AA' đi qua trực tâm H của tam giác ABC.

Bài 22: Cho (O), đường kính AB,CD. Tiếp tuyến của (O) tại B giao AC tại E, DE giao (O) lần thứ 2 tại F. CMR AF, BC,OE đồng quy.

5.Chứng minh điểm cố định, đường cố định:

Bài 23:Cho (O) và dây AB. Các đường tròn (O_1),(O_2) nằm về một phía của dây AB và tiếp xúc trong với (O). $(O_1) \cap (O_2)$= {H,K}. CMR HK luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 24:Cho tam giác ABC nội tiếp (O,R). M là điểm di động trong (O). AA',BB',CC' là các dây cung đi qua M và thỏa mãn hệ thức $\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = 3$. CMR M thuộc một đường tròn cố định.

Bài 25:Cho tam giác ABC, đường tròn qua B,C giao AB,AC lần lượt tại C',B'. Gọi giao điểm của BB' và CC' là P, AP giao BC tại A'. Đường thẳng qua A' song song với B'C' giao AB,AC lần lượt tại M,N, B'C' giao BC tại Q. CMR đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN đi qua một điểm cố định.

6. Chứng minh các yếu tố khác:

Bài 26 (Junior Balkan MO 2005) : Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Tiếp tuyến của (O) tại A cắt BC tại P. M là trung điểm BC.MB cắt (O) lần thứ 2 tại R, PR cắt (O) lần thứ 2 tại S. CMR CS//AP

Bài 27 (Thi vô địch toán Iran,1996): Cho hai điểm D,E tương ứng nằm trên các cạnh AB,AC của tam giác ABC sao cho DE//BC.Gọi P là điểm bất kì nằm bên trong tam giác ABC, các đường thẳng PB và PC lần lượt cắt DE tại F và G. Gọi O_1, O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PDG, PFE. CMR: $AP \perp O_1O_2$

Bài 28: Cho tam giác ABC, đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. M là trung điểm BC, EF cắt BC tại I. CMR $IH \perp OJ$

Bài 29 (USAMO 2009): Cho hai đường tròn w_1 và w_2 cắt nhau tại hai điểm X,Y. Một đường thẳng l_1 đi qua tâm w_1 và giao w_2 tại hai điểm P,Q, l_2 đi qua tâm w_2 và giao w_1 tại R,S. CMR nếu 4 điểm P,Q,R,S cùng thuộc một đường tròn tâm O thì O nằm trên XY.

Bài 30 (IMO 1985): Cho tam giác ABC.Một đường tròn tâm O đi qua các điểm A,C và lại cắt các đoạn AB,AC thứ tự tại hai điểm phân biệt K,N.Giả sử đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABC và KBN cắt nhau tại B và M. CMR góc OMB vuông.

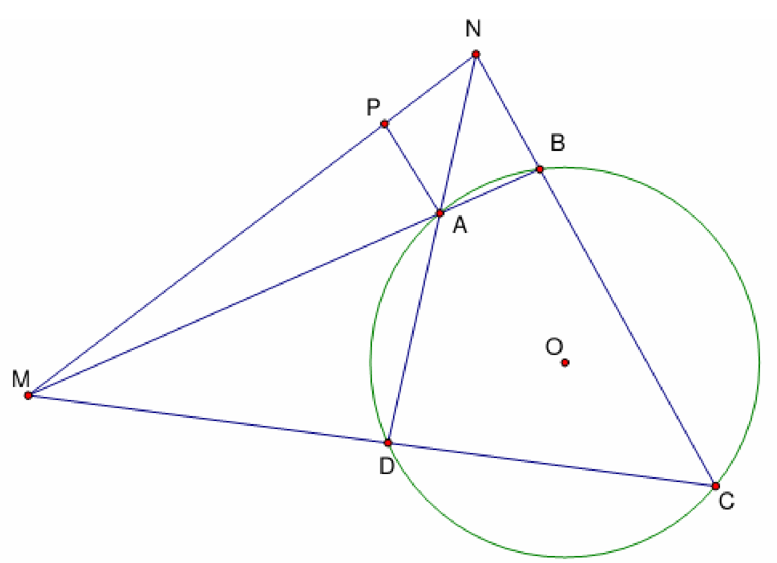
7. Khảo sát vị trí hai đường tròn:

Bài 31: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai đường tròn (C_1): $x^2+y^2-2x+4y-4=0$, (C_2): $x^2+y^2+4x-4y-56=0$. CMR (C_1) tiếp xúc với (C_2)

Bài 32: Chứng minh rằng hai đường tròn (C_1): $x^2+y^2-10x+24y-56=0$ và (C_2): $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ cắt nhau.

D.Lời giải:

Bài 1:



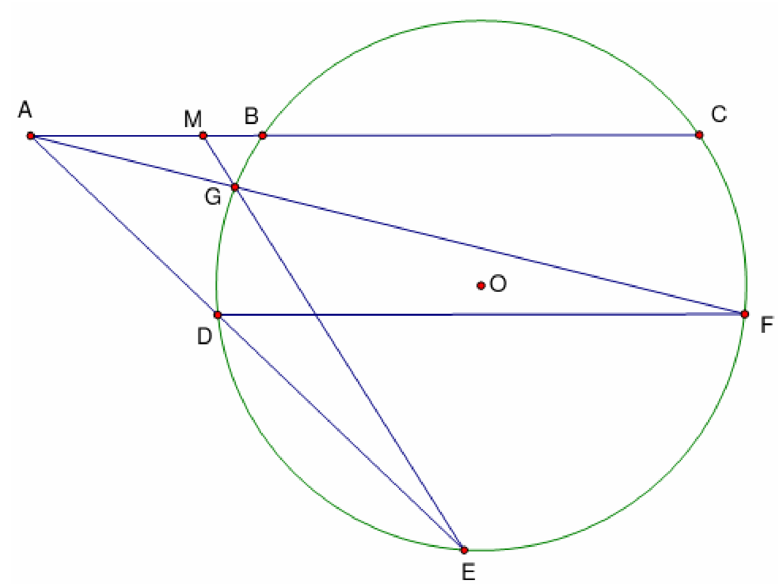
Lấy điểm P trên MN sao cho tứ giác MPAD nội tiếp, lại có tứ giác ABCD nội tiếp nên tứ giác PNBA nội tiếp.

Ta có: $\overline{MP}.\overline{MN} = \overline{MA}.\overline{MB}, \overline{NP}.\overline{NM} = \overline{NA}.\overline{ND}$

$\Rightarrow MN^2 = (\overline{MP} + \overline{PN}).\overline{MN} = \overline{MA}.\overline{MB} + \overline{NA}.\overline{ND}$

Hay $MN^2 = P_M/(O) + P_N/(O)$ (đpcm)

Bài 2:



Ta có $\angle GED = \angle GCD = \angle GAB$ nên $\triangle AMG \sim \triangle EMA$

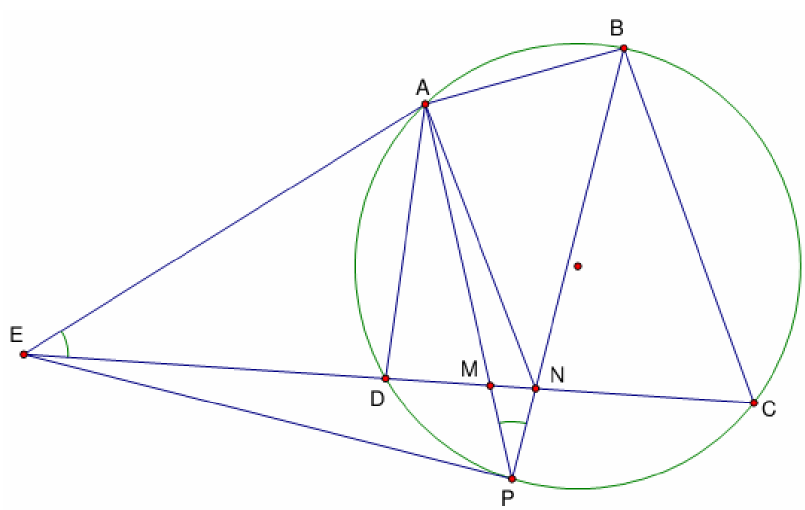
$\Rightarrow MA^2 = MG.ME$ =MB.MC

Hay $MA^2 = (AB-MA)(AC-MA) = AB.AC - MA(AB+AC) + MA^2$

$\Rightarrow MA = \dfrac{AB.AC}{AB+AC}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{AM} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}$ (đpcm)

Bài 3:



Trên DC lấy E sao cho $\angle AED = \angle APB$ =const suy ra E cố định.

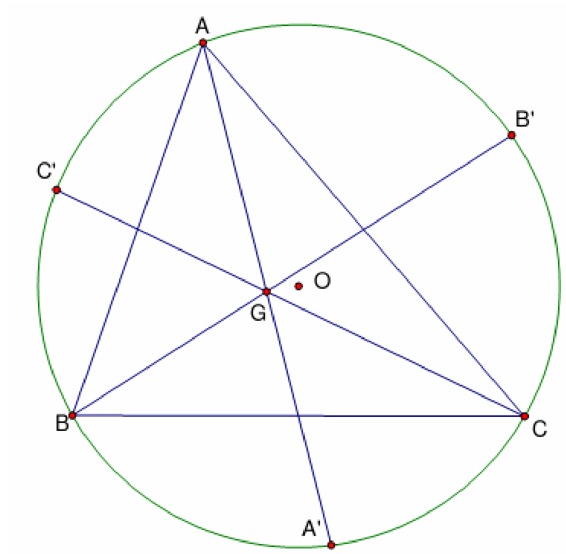
Tứ giác AEPN nội tiếp suy ra $\overline{ME}.\overline{MN} = \overline{MA}.\overline{MP} = \overline{MD}.\overline{MC}$

$\Leftrightarrow (\overline{MD} + \overline{DE}).\overline{MN} = \overline{MD}.(\overline{MN} + \overline{NC})$

$\Leftrightarrow \overline{DE}.\overline{MN} = \overline{MD}.\overline{NC}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\overline{MD}.\overline{NC}}{\overline{MN}} = \overline{DE} = const$ (đpcm)

Bài 4



Với M là điểm bất kì trên mặt phẳng, ta có:

$MA^2+MB^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$

$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$

Mặt khác,theo công thức đường trung tuyến:

$GA^2+GB^2+GC^2=\dfrac{4}{9}(m_a^2+m_b^2+m_c^2)=\dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$

Do đó $MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+\dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$

Cho M trùng O thì:

$OA^2+OB^2+OC^2=3OG^2+\dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$

$\Rightarrow OG^2=R^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$

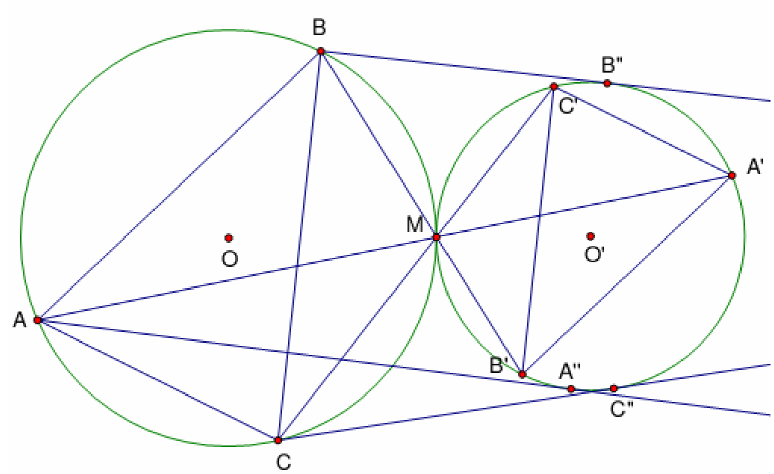
$\Rightarrow P_G/(O)=OG^2-R^2=-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$

Ta có $P_G/(O)=\overline{GA}.\overline{GA'} \Rightarrow \dfrac{1}{GA'^2}=\dfrac{GA^2}{P_G^2/(O)}$

Tương tự ta được

$$\frac{1}{GA'^2}+\frac{1}{GB'^2}+\frac{1}{GC'^2}=\frac{GA^2+GB^2+GC^2}{P_G^2/(O)}=\frac{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}{\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{81}}=\frac{27}{a^2+b^2+c^2}$$

Bài 5:



Xét trường hợp (O) tiếp xúc ngoài với (O') tại M (trường hợp tiếp xúc trong chứng minh tương tự)

MA,MB,MC theo thứ tự cắt (O') tại A',B',C'.

Dễ dàng chứng minh được B'C'//BC, C'A'//CA, A'B'//AB. Theo định lý Ta-lét ta có:

$$\frac{AA'}{AM} = \frac{BB'}{BM} = \frac{CC'}{CM}$$

Mà $AA''^2 = AM.AA'$, $BB''^2 = BM.BB'$, $CC''^2 = CM.CC'$

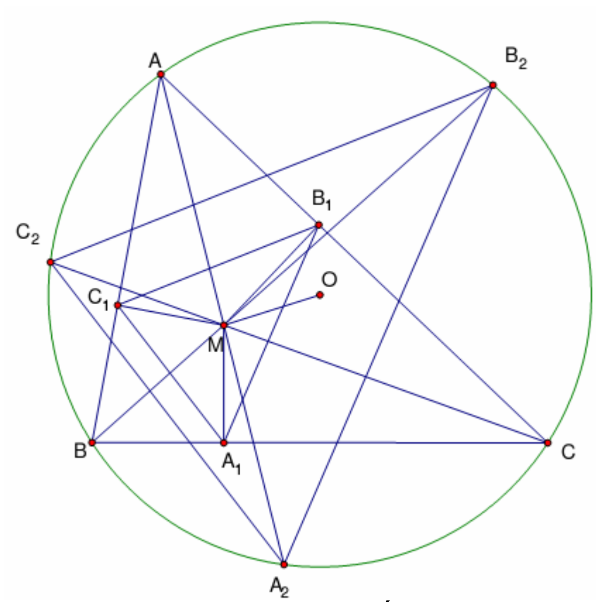
Do đó $\frac{AA''^2}{AM^2} = \frac{BB''^2}{BM^2} = \frac{CC''^2}{CM^2}$ hay $\frac{AA''}{AM} = \frac{BB''}{BM} = \frac{CC''}{CM}$ (1)

Áp dụng định lý Ptô-lê-mê cho tứ giác nội tiếp ABMC ta có:

BC.AM=AB.MC+AC.MB (2)

Từ (1) và (2) suy ra BC.AA''=CA.BB''+AB.CC'' (đpcm)

Bài 6:



Gọi A_1,B_1,C_1 là chân đường vuông góc kẻ từ M xuống 3 cạnh BC,CA,AB.A_2,B_2,C_2 là giao điểm của các đường thẳng AM,BM,CM với (O). a,b,c là 3 cạnh tam giác ABC,

a_1,b_1,c_1 là 3 cạnh tam giác $A_1B_1C_1$, a_2,b_2,c_2 là 3 cạnh tam giác $A_2B_2C_2$. S,S_1,S_2 tương ứng là diện tích của chúng.

Ta có: $a_1=AM.\sin A=AM.\dfrac{a}{2R}$

Tương tự $b_1=BM.\dfrac{b}{2R}$, $c_1=CM.\dfrac{c}{2R}$

Hai tam giác B_2MC_2 và BMC đồng dạng nên $\dfrac{a_2}{a}=\dfrac{B_2M}{CM}=\dfrac{C_2M}{BM}$

Tương tự $\dfrac{b_2}{b}=\dfrac{C_2M}{AM}=\dfrac{A_2M}{CM}$, $\dfrac{c_2}{c}=\dfrac{A_2M}{BM}=\dfrac{B_2M}{AM}$

Ta chứng minh $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$

$$\Leftrightarrow \frac{AM.\dfrac{a}{2R}}{a.\dfrac{C_2M}{BM}}=\frac{BM.\dfrac{b}{2R}}{b.\dfrac{C_2M}{AM}} \text{ (đúng)}$$

Tương tự $\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ nên $\triangle A_1B_1C_1\sim\triangle A_2B_2C_2$

Hơn nữa $\dfrac{S_2}{S}=\dfrac{a_2b_2c_2}{abc}$

Ta có $\left(\dfrac{S_1}{S}\right)^3=\dfrac{S_1^3}{S_2^3}.\dfrac{S_2^3}{S^3}=\dfrac{a_1^2b_1^2c_1^2}{a_2^2b_2^2c_2^2}.\dfrac{a_2^3b_2^3c_2^3}{a^3b^3c^3}=\dfrac{a_1^2b_1^2c_1^2}{a^3b^3c^3}.a_2b_2c_2$

$$=\left(\frac{1}{4R^2}\right)^3\frac{AM^2.a^2.BM^2.b^2.CM^2.c^2}{a^3b^3c^3}.a_2b_2c_2$$

$$=\left(\frac{1}{4R^2}\right)^3 AM^2.BM^2.CM^2.\frac{a_2}{a}.\frac{b_2}{b}.\frac{c_2}{c}$$

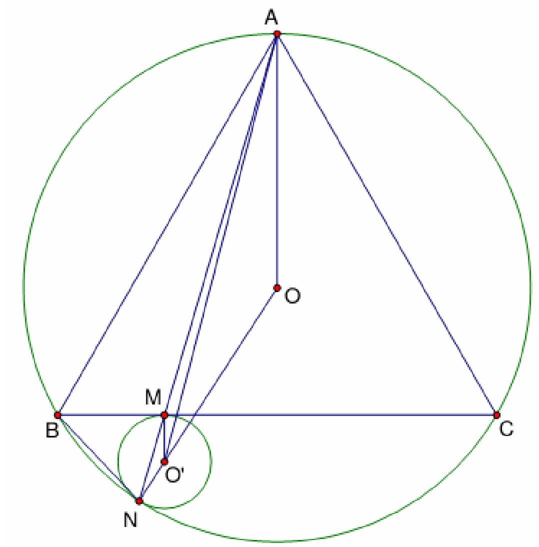
$$=\left(\frac{1}{4R^2}\right)^3 AM^2.BM^2.CM^2.\frac{B_2M}{CM}.\frac{C_2M}{AM}.\frac{A_2M}{BM}$$

$$=\left(\frac{1}{4R^2}\right)^3 AM.A_2M.BM.B_2M.CM.C_2M$$

$$=\left(\frac{1}{4R^2}\left|R^2-d^2\right|\right)^3$$

Suy ra đpcm.

Bài 7:



Gọi M,N lần lượt là tiếp điểm của (O') với BC và (O).

Do MO'//AO và $\dfrac{O'M}{OA} = \dfrac{O'N}{ON}$ nên A,M,N thẳng hàng.

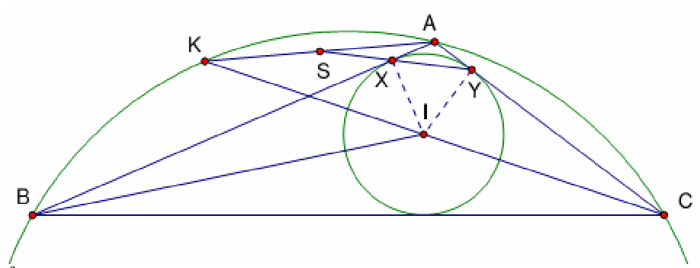
Ta có AO'^{2}-R^2=$\overline{AM}.\overline{AN}$

Mặt khác, $\angle MBA = \angle BNA$ nên $\overline{AM}.\overline{AN}$ =AB^2

$\Rightarrow$AO'^{2}-R^2=AB^2

$\Rightarrow$AO'=$\sqrt{a^2+R^2}$

Bài 8:



Gọi S là giao điểm của XY với AK.

Ta có $\angle$KAB=$\angle$KCB, $\angle$SXA=180^0-$\angle$AXY=$\angle$BIC

$\Rightarrow \triangle AXS \sim \triangle CIB$

$\Rightarrow AS = \dfrac{AX.BC}{CI}$ hay $\dfrac{1}{2}AK = \dfrac{AX.BC}{CI} \Leftrightarrow KI.CI = 2AX.BC$, áp dụng <u>ví dụ B.1.1</u> ta thu được :

$2Rr = 2(p-a)a$

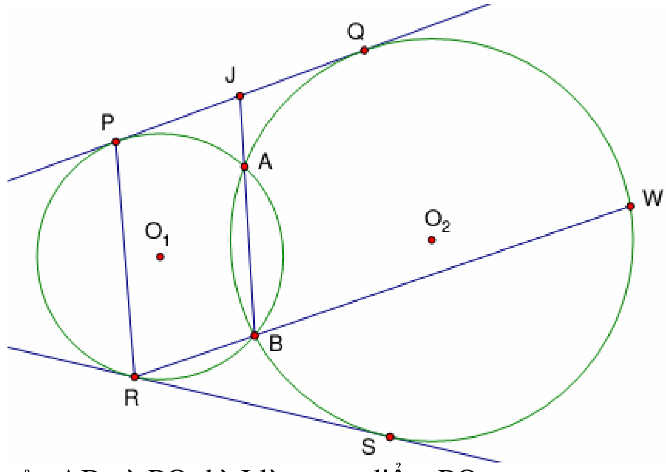
$\Leftrightarrow \dfrac{abc}{4S_{ABC}}.\dfrac{S_{ABC}}{p} = (p-a)a \Leftrightarrow bc = 4p(p-a)$

$\Leftrightarrow b^2+c^2+bc = a^2$

Mặt khác, theo định lý hàm số cos, a^2=b^2+c^2-2bccosA

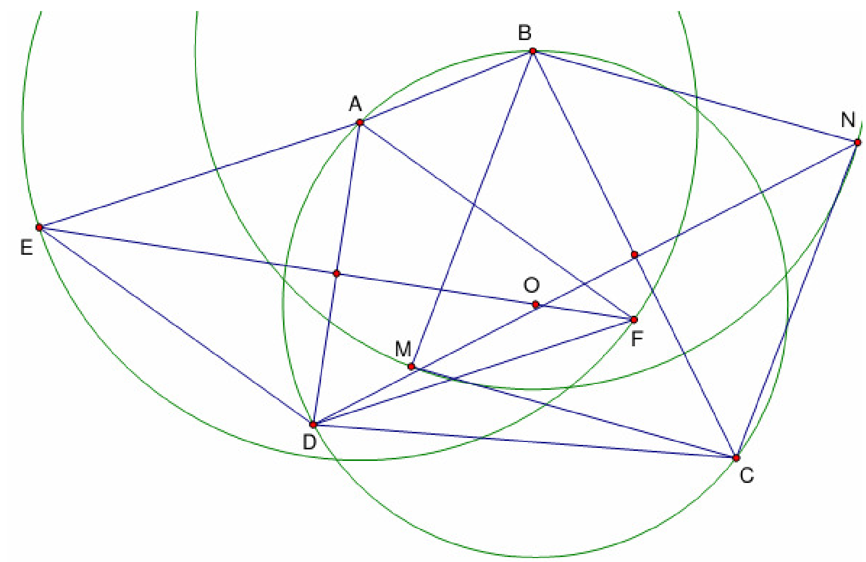
Do đó cosA=-1/2 hay $\angle$A=120^0

Bài 9:



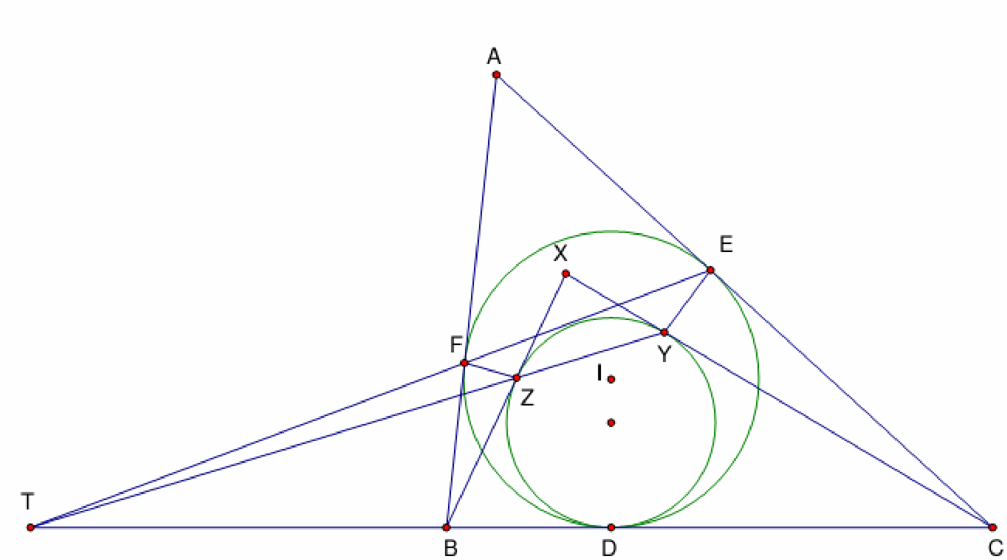
Gọi J là giao điểm của AB và PQ thì J là trung điểm PQ.
Dễ dàng có AB//PR, mà PQ//RB nên PJBR là hình bình hành.
$\Rightarrow$PJ=RB
$\Rightarrow$ RB.RW=RS^2=PQ^2=4RJ^2=4RB^2
$\Rightarrow$RW=4RB
Vậy $\frac{RB}{RW}=\frac{1}{3}$

Bài 10:



Dựng (A, AF) và (B,BM).
Do OA=OB và AF=BM nên O nằm trên trục đẳng phương của (A) và (B).
Mặt khác, EF, MN lần lượt là trung trực của đoạn AD,BC nên EF$\cap$MN={O}
$\Rightarrow \overline{OE}.\overline{OF}=\overline{OM}.\overline{ON}$
Suy ra 4 điểm E,F,M,N cùng thuộc một đường tròn (đpcm)

Bài 11:



Gọi T là giao của EF với BC. Áp dụng định lý Mê-nê-lauyt cho tam giác ABC với đường thẳng TFE ta có: $\overline{TE}.\overline{TF}=TD^2=\overline{TZ}.\overline{TY}\Rightarrow\dfrac{\overline{CT}}{\overline{BT}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AE}}.\dfrac{\overline{\mathrm{AF}}}{\overline{BF}}$

Mặt khác, dễ dàng có AD,BE,CF đồng quy. Áp dụng định lý Xê-va ta thu được:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=-\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}.\frac{\overline{\mathrm{AF}}}{\overline{BF}}$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=-\frac{\overline{CT}}{\overline{BT}}$$

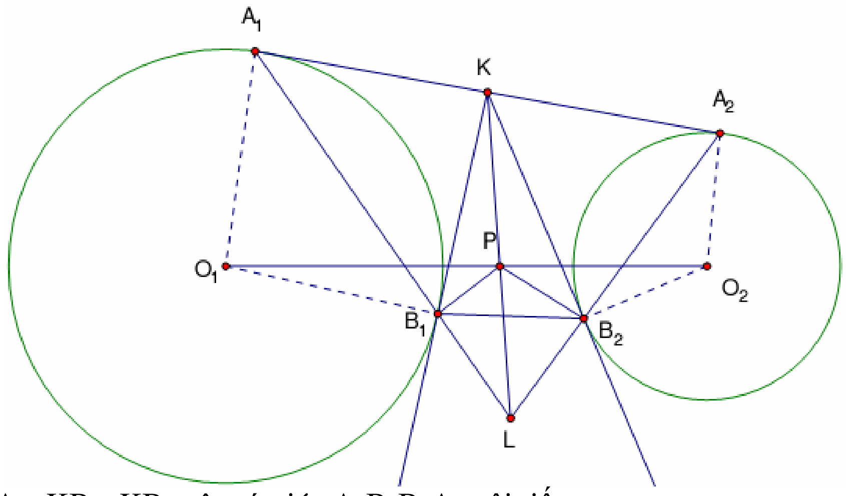
Tương tự, gọi T' là giao điểm của YZ với BC thì $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=-\dfrac{\overline{CT'}}{\overline{BT'}}$

Suy ra $T\equiv T'$.

Ta có: $\overline{TE}.\overline{TF}=TD^2=\overline{TZ}.\overline{TY}$

Vậy tứ giác EFZY nội tiếp (đcpm)

Bài 12:



Do $KA_1=KA_2=KB_1=KB_2$ nên tứ giác $A_1B_1B_2A_2$ nội tiếp.

$\Rightarrow \overline{LB_1}.\overline{LA_1} = \overline{LB_2}.\overline{LA_2}$

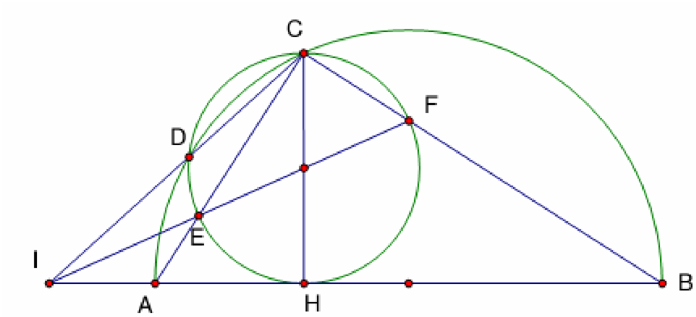
Suy ra KL là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2)

$\Rightarrow KL \perp O_1O_2$

3 điểm A_1,B_1,P nhìn đoạn O_1K dưới góc 90^o nên tứ giác A_1B_1PK nội tiếp, tương tự tứ giác A_2B_2PK nội tiếp.

Áp dụng định lý Miquel ta có tứ giác B_1PB_2L nội tiếp (đpcm)

Bài 13:



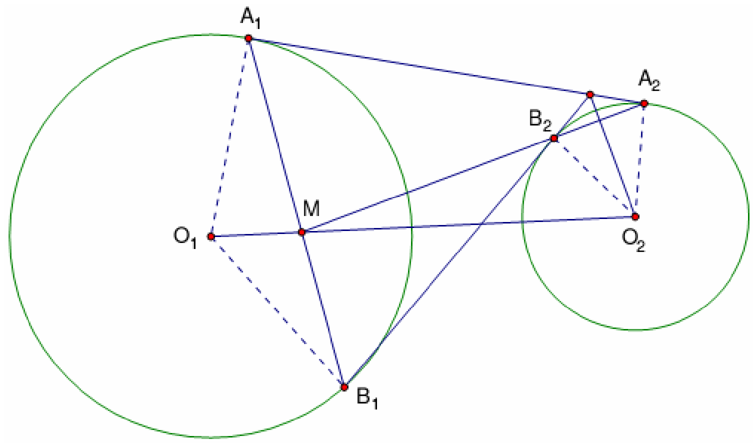
Do $\angle ACB = 90^o$ nên EF là đường kính của đường tròn đường kính CH.

$\Rightarrow \angle CEF = \angle ACH = \angle CBA$

Suy ra tứ giác AEFB nội tiếp.

Áp dụng định lý về tâm đẳng phương cho đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEFB, đường tròn đường kính AB và đường kính EF ta có CD, EF, AB đồng quy (đpcm)

Bài 14:



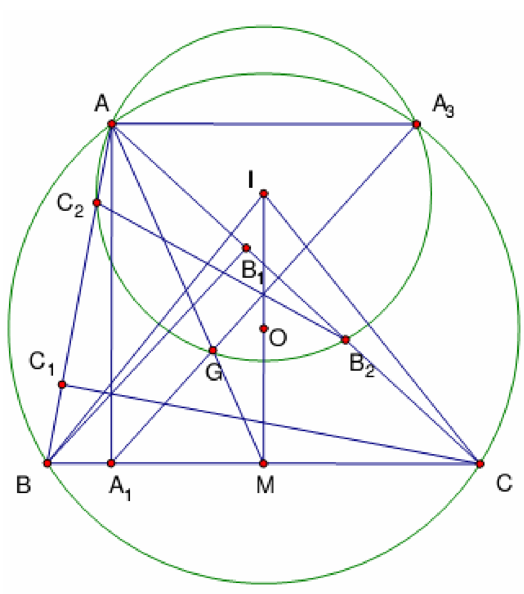
Gọi M là giao điểm của A_1B_1 với A_2B_2. Dễ dàng có $A_1B_1 \perp A_2B_2$.

Gọi (C_1),(C_2) lần lượt là các đường tròn đường kính A_1A_2,B_1B_2.

Do $\angle A_1MA_2 = \angle B_1MB_2 = 90^o$ nên M nằm trên trục đẳng phương của (C_1) và (C_2).

Mặt khác $O_1A_1^2 = O_1B_1^2$ và O_1A_1, O_1B_1 lần lượt là tiếp tuyến của (C_1),(C_2) nên O_1 nằm trên trục đẳng phương của (C_1) và (C_2).
Tương tự O_2 cũng nằm trên trục đẳng phương của (C_1) và (C_2)
Suy ra O_1,M.O_2 thẳng hàng.
Ta có đpcm.

Bài 15:



Gọi (I,R) đường tròn ngoại tiếp của tam giác AB_2C_2, M là trung điểm BC, AM giao A_1A_3 tại G.
Do $\overline{AC_1}.\overline{AB} = \overline{AB_1}.\overline{AC}$ và $AC_1=BC_2$, $AB_1=CB_2$
$\Rightarrow \overline{BC_2}.\overline{BA} = \overline{CB_2}.\overline{CA}$
$\Rightarrow BI^2-R^2=CI^2-R^2 \Rightarrow BI=CI$

$\Rightarrow IO \perp BC$

Mà $IO \perp AA_3 \Rightarrow AA_3 // BC$

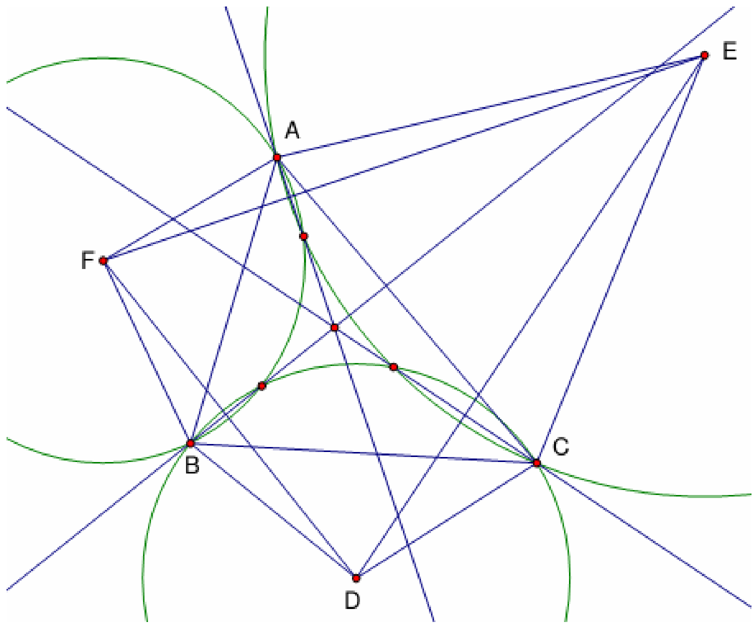
Dễ dàng có $A_1M = \dfrac{1}{2} AA_3$

$$\Rightarrow \frac{AG}{MG} = \frac{AA_3}{A_1M} = 2$$

Suy ra G là trọng tâm tam giác ABC. Tương tự B_1B_3, C_1C_3 cũng đi qua G.

Vậy A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 đồng quy tại trọng tâm G của tam giác ABC.

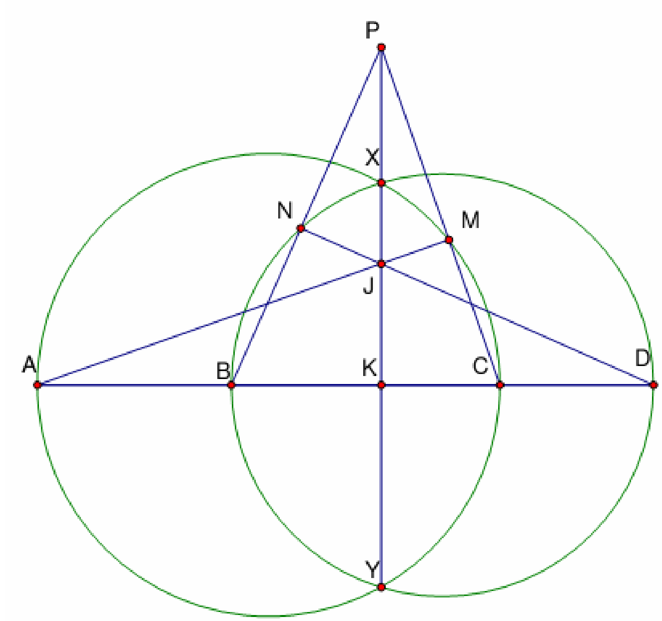
Bài 16:



Gọi C_1, C_2, C_3 lần lượt là đường tròn tâm D, bán kính DB, đường tròn tâm E, bán kính EA, đường tròn tâm F bán kính FA

Đường thẳng qua C vuông góc với DE là trục đẳng phương của (C_1) và (C_2), đường thẳng qua A vuông góc với EF là trục đẳng phương của (C_2) và (C_3), đường thẳng qua B vuông góc với DF là trục đẳng phương của (C_1) và (C_3). Do đó 3 đường thẳng này đồng quy tại tâm đẳng phương của 3 đường tròn (đpcm)

Bài 17:



Gọi J,J',Z lần lượt là giao của AM,DN, AD với XY.

Tứ giác JMCK nội tiếp nên $\overline{PJ}.\overline{PK} = \overline{PM}.\overline{PC}$

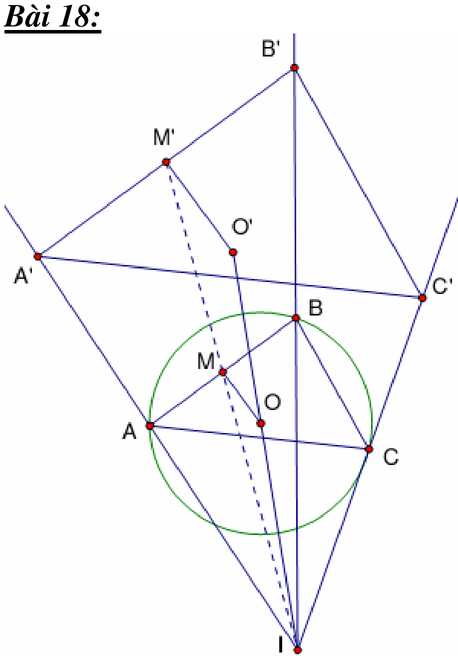
Tương tự $\overline{PJ'}.\overline{PK} = \overline{PN}.\overline{PB}$

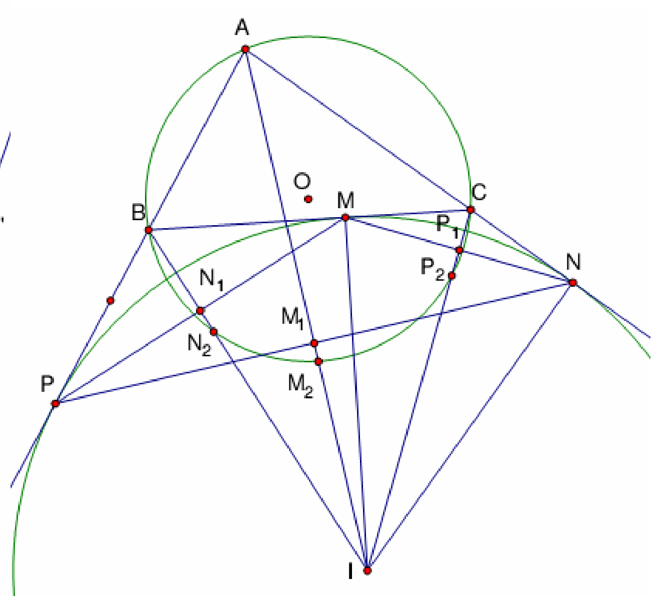
Do P nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính AC và đường tròn đường kính BD nên $\overline{PM}.\overline{PC} = \overline{PN}.\overline{PB}$

$\Rightarrow \overline{PJ}.\overline{PK} = \overline{PJ'}.\overline{PK}$ hay $P \equiv P'$

Vậy AM,DN,XY đồng quy (đpcm)

Bài 18:





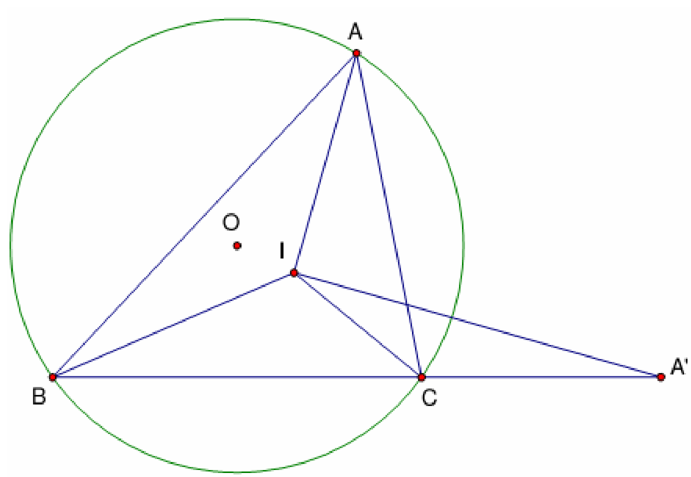
Bổ đề: Cho I,A,B,C,A', B',C' thoả mãn các bộ 3 điểm I,A,A'; I,B,B'; I,C,C' thẳng hàng và $\frac{IA}{IA'}=\frac{IB}{IB'}=\frac{IC}{IC'}$, khi đó tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC,A'B'C' và I thẳng hang.

Chứng minh: Từ giả thiết ta có AB//A'B',AC//A'C', BC//B'C'.
Dễ dàng có hai tam giác ABC và A'B'C' đồng dạng theo tỉ số k.
Gọi M,M' là trung điểm AB,A'B' thì I,M,M' thẳng hàng và $\frac{IM}{IM'}=\frac{IA}{IA'}=k=\frac{MO}{M'O}$
Mà MO//M'O' nên I,O,O' thẳng hàng.
Trở lại bài toán: Gọi M_1,N_1,P_1 là giao điểm của IA với PN, IB với PM, IC với MN. M_2,N_2,P_2 là giao điểm thứ 2 của IA,IB,IC với (O).
Ta có: $IA.IM_1=IN^2=IM^2=IB.IN_1=IC.IP_1$
Mặt khác $IA.IM_2=IB.IN_2=IC.IP_2$

$$\Rightarrow \frac{IM_1}{IM_2}=\frac{IN_1}{IN_2}=\frac{IP_1}{IP_2}$$

Áp dụng bổ đề trên thì I và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $M_1N_1P_1$, $M_2N_2P_2$ thẳng hang, với chú ý rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $M_1N_1P_1$ là đường tròn Ơ-le của tam giác PMN.
Vậy tâm đường tròn Ơ-le của tam giác PMN thuộc đường thẳng OI (đpcm)

Bài 19:



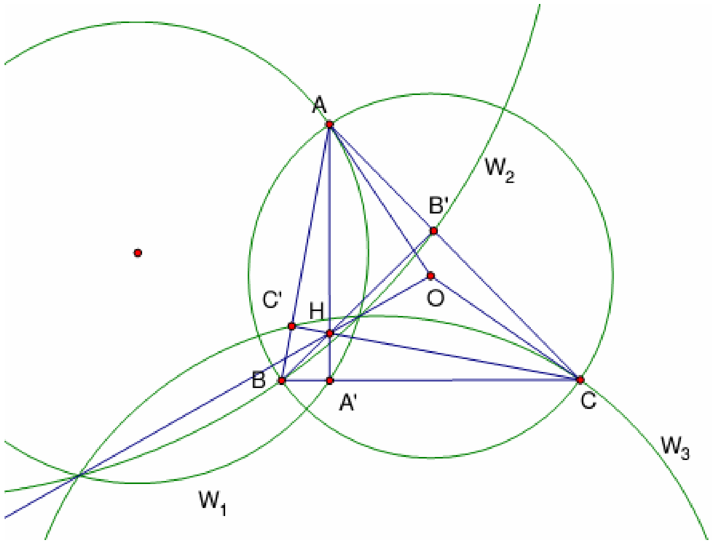
Kí hiệu (I,0) là đường tròn tâm I, bán kính bằng 0.

Ta có $\angle IBC=\frac{\angle ABC}{2}=\angle AIC-90^o=\angle CIA'$

$\Rightarrow IA'^2=\overline{A'B}.\overline{A'C}$ hay $P_{A'}/(I,0)=P_{A'}/(O)$
Tương tự $P_{B'}/(I,0)=P_{B'}/(O)$, $P_{C'}/(I,0)=P_{C'}/(O)$

Suy ra A',B',C' cùng thuộc trục đẳng phương của (O) và (I,0), đường thẳng này vuông góc với OI (đpcm)

Bài 20:



Ta có: $P_H/(W_A) = \overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HC}.\overline{HC'} = P_H/(W_C)$ và do OA, OC lần lượt tiếp xúc với W_A, W_C nên $P_O/(W_A) = OA^2 = OC^2 = P_O/(W_C)$

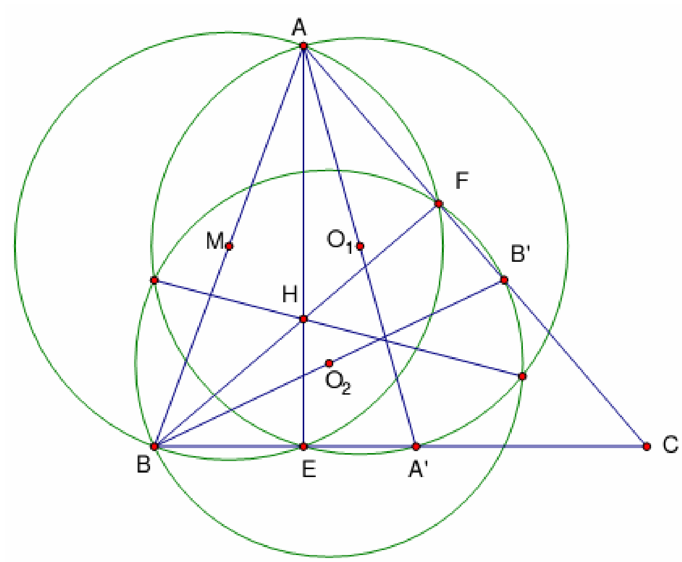
Suy ra OH là trục đẳng phương của (W_A) và (W_C)

$\Rightarrow (W_A) \cap (W_C) = \{E,F\} \in HO$

Tương tự $(W_A) \cap (W_B) = \{E,F\} \in HO$

Vậy 3 đường tròn (W_A),(W_B),(W_C) cắt nhau tại 2 điểm thuộc đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC (đpcm)

Bài 21:

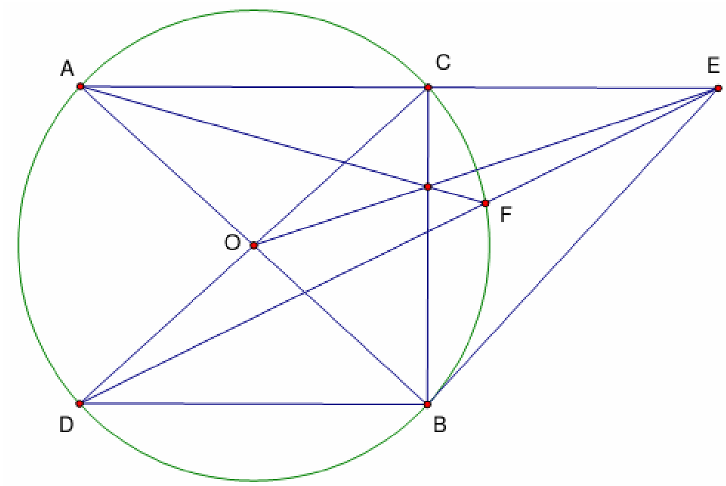


Kí hiệu (O_1),(O_2) lần lượt là đường tròn đường kính AA' và BB'. Gọi M là trung điểm AB

Dễ thấy (M,MA)$\cap$$(O_1)$= {A,E}, (M,MA)$\cap$$(O_2)$= {B,F} (E,F lần lượt là chân đường cao hạ từ A,B của tam giác ABC)

Do AE,BF giao nhau tại trực tâm H và áp dụng định lý về tâm đẳng phương ta suy ra trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) đi qua H (đpcm)

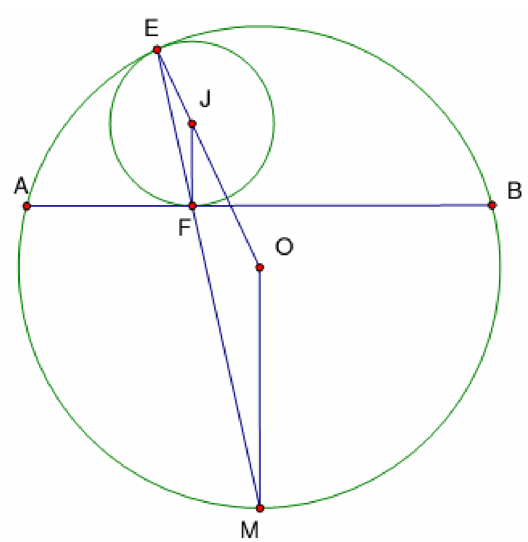
Bài 22:

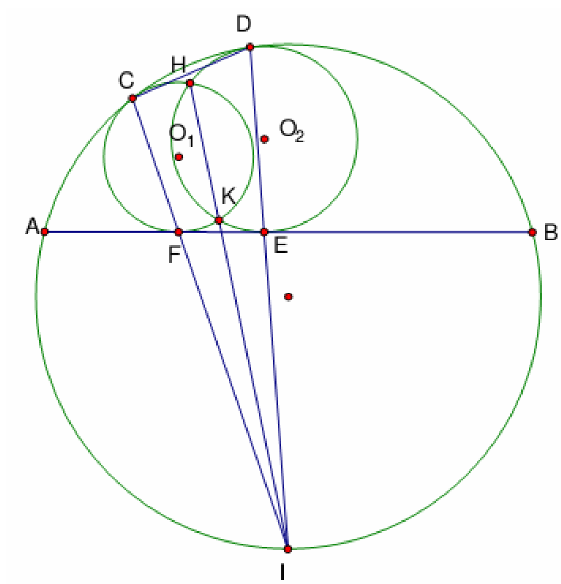


Kí hiệu (C_1),(C_2) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF, BCE.
Ta có AF, BC là trục đẳng phương của (O) và (C_1), (O) và (C_2).
Mặt khác $\angle$OAF=$\angle$FDB=$\angle$FEA, $\angle$OBC=$\angle$CEB
Suy ra OA,OB lần lượt là tiếp tuyến của (C_1),(C_2) và lại có $OA^2=OB^2$
Do đó OE là trục đẳng phương của (C_1) và (C_2)

Theo định lý về tâm đẳng phương của 3 đường tròn ta có AF,BC,OE đồng quy (đpcm)

Bài 23:





Bổ đề: "Giả sử (J) tiếp xúc trong với (O) tại E, tiếp xúc dây AB tại F thì EF đi qua điểm chính giữa M của cung AB."

Chứng minh:

Ta có $\angle EFJ = \angle FEJ = \angle EMO$

$\Rightarrow JF // OM$, mà $JF \perp AB \Rightarrow OM \perp AB$

Vậy M là điểm chính giữa cung AB.

Trở lại bài toán:

Gọi C,D là tiếp điểm của (O_1),(O_2) với (O), F,E là tiếp điểm của (O_1),(O_2) với AB.

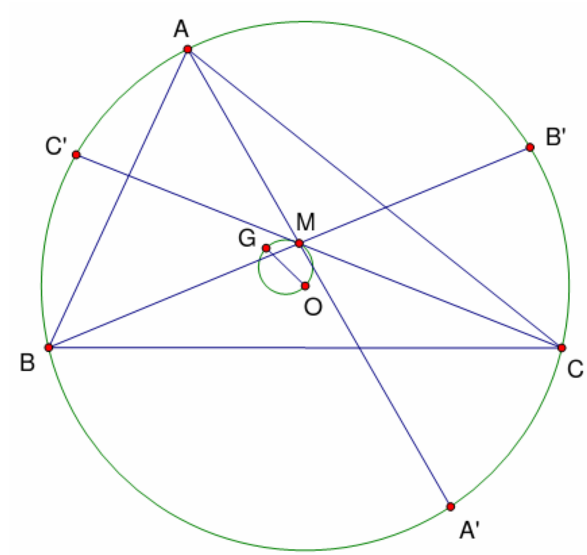
Theo bổ đề trên thì CF,DE đi qua điểm chính giữa I của cung AB.

Mặt khác $\angle DCF = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{DI} = \frac{1}{2} sd(\overset{\frown}{DB} + \overset{\frown}{BI}) = \frac{1}{2} sd(\overset{\frown}{DB} + \overset{\frown}{AI}) = \angle AEI$

Suy ra tứ giác CDEF nội tiếp. Áp dụng định lý về tâm đẳng phương cho đường tròn ngoại tiếp tứ giác CDEF, (O_1),(O_2) ta có HK,CF,DE đồng quy

Vậy HK đi qua điểm chính giữa I của cung AB là một điểm cố định (đpcm)

Bài 24:



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, a,b,c là độ dài 3 cạnh tam giác ABC.

Theo Bài 4, ta có $R^2 = OG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$ (1)

Do MA.MA'=MB.MB'=MC.MC'=R^2-OM^2 suy ra:

$\frac{MA}{MA'} = \frac{MA^2}{MA.MA'} = \frac{MA^2}{R^2 - OM^2}$

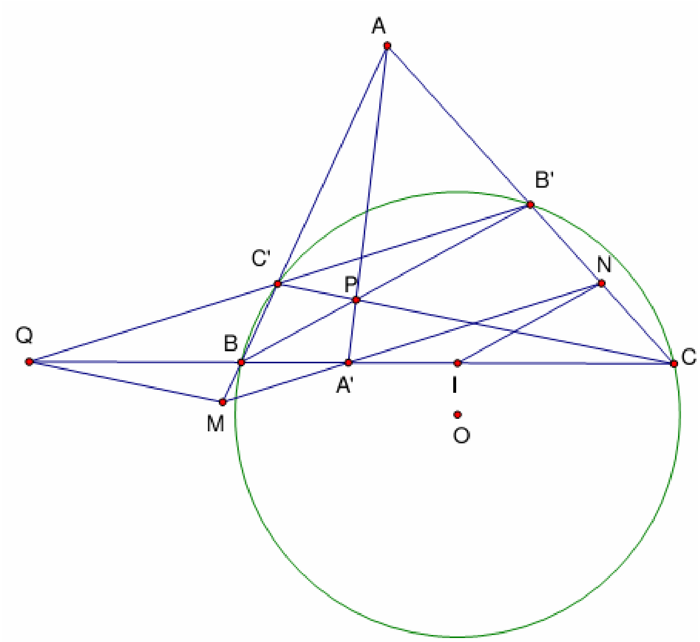
Tương tự $\frac{MB}{MB'} = \frac{MB^2}{MB.MB'} = \frac{MB^2}{R^2 - OM^2}$, $\frac{MC}{MC'} = \frac{MC^2}{MC.MC'} = \frac{MC^2}{R^2 - OM^2}$

Từ đó ta thu được $\frac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{R^2 - OM^2} = 3$ hay $3MG^2+1/3(a^2+b^2+c^2)=3R^2-3OM^2$ (2) (Bài 4)

Từ (1) và (2) suy ra $OM^2+GM^2=OG^2$

Vậy M nằm trên đường tròn đường kính OG là một đường tròn cố định.

Bài 25:



Gọi I là trung điểm BC. Do AA', BB',CC' đồng quy nên (QA'BC)=-1

$\Rightarrow \overline{A'Q}.\overline{A'I} = \overline{A'B}.\overline{A'C}$ (1)

Do MN//B'C'nên $\angle MNC = \angle C'B'C = \angle MBC$

Suy ra tứ giác MBNC nội tiếp

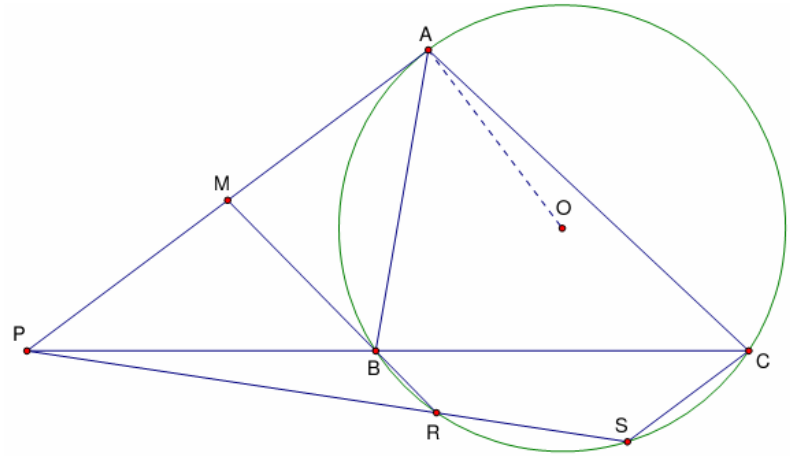
$\Rightarrow \overline{A'B}.\overline{A'C} = \overline{A'M}.\overline{A'N}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\overline{A'Q}.\overline{A'I} = \overline{A'M}.\overline{A'N}$

Suy ra tứ giác QMIN nội tiếp

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN luôn đi qua trung điểm I của BC là một điểm cố định (đpcm)

Bài 26:

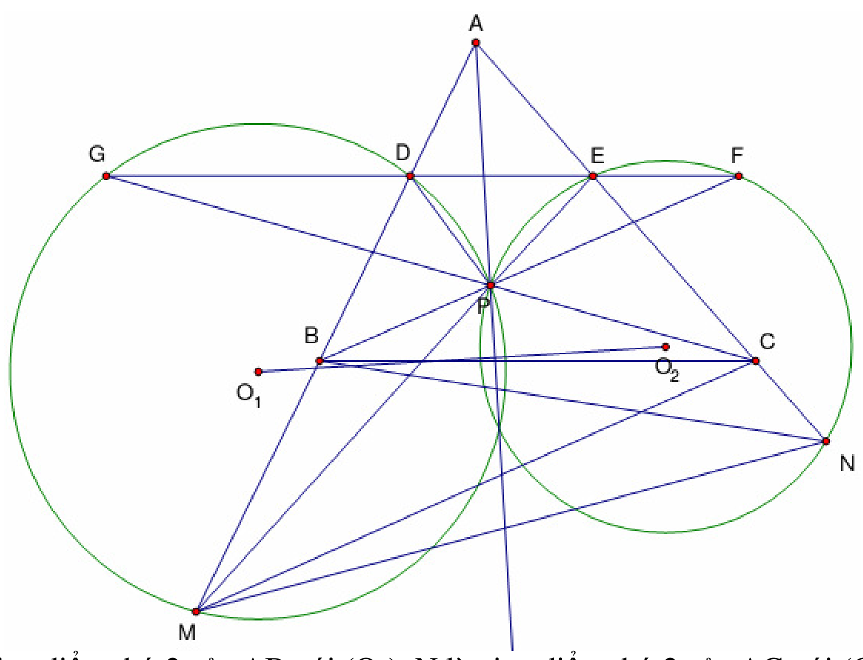


Ta có $MP^2 = MA^2 = \overline{MB}.\overline{MR} \Rightarrow \triangle PMB \sim \triangle RMP$

$\Rightarrow \angle MPB = \angle MRP = 180^o - \angle PCS$

$\Rightarrow$ AP//CS (đpcm)

Bài 27:



Gọi M là giao điểm thứ 2 của AB với (O_1), N là giao điểm thứ 2 của AC với (O_2).

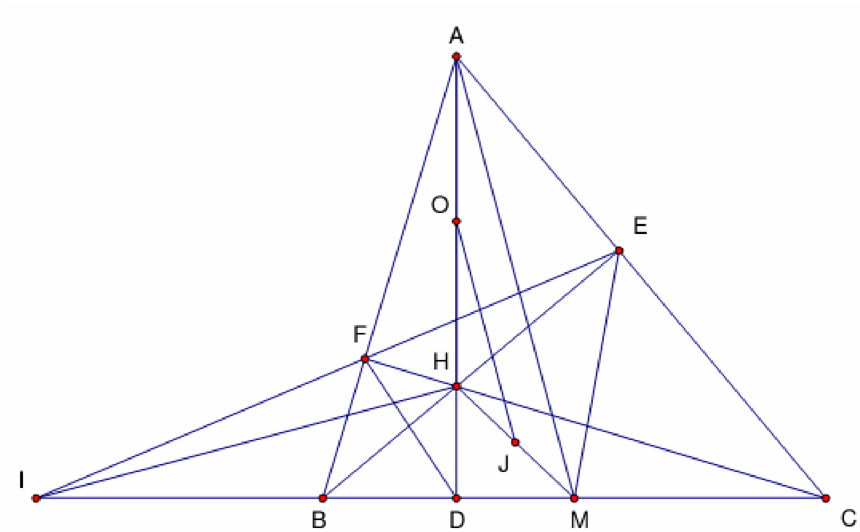
Ta có $\angle PMD = \angle PGD = \angle PCB$

Suy ra tứ giác BPCM nội tiếp, tương tự tứ giác BPCN nội tiếp do đó tứ giác BMNC nội tiếp. Mà DE//BC ta thu được tứ giác MDEN nội tiếp.

Áp dụng định lý về tâm đẳng phương cho các đường tròn ngoại tiếp DGP, PEF và DENM ta có DM $\cap$ EN={A} nằm trên trục đẳng phương của (O_1) và (O_2).

Suy ra AP $\perp$ O_1O_2 (đpcm)

Bài 28:



Gọi O,J lần lượt là trung điểm AH, MH.

Ta có $\angle EFD = 2\angle HFD = 2\angle EBM = \angle EMC$

Suy ra tứ giác FEMD nội tiếp.

$\Rightarrow \overline{IE}.\overline{IF} = \overline{IM}.\overline{ID}$

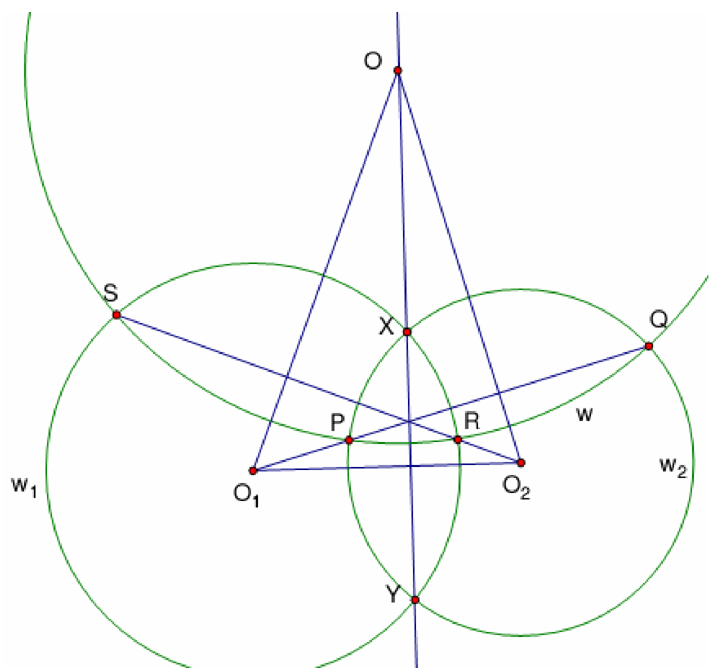
Do đó I nằm trên trục đẳng phương của (O,OA) và (J,JH)

$\Rightarrow IH \perp OJ$

Mà OJ là đường trung bình của tam giác AMH nên OJ//AM

$\Rightarrow IH \perp AM$ (đpcm)

Bài 29:



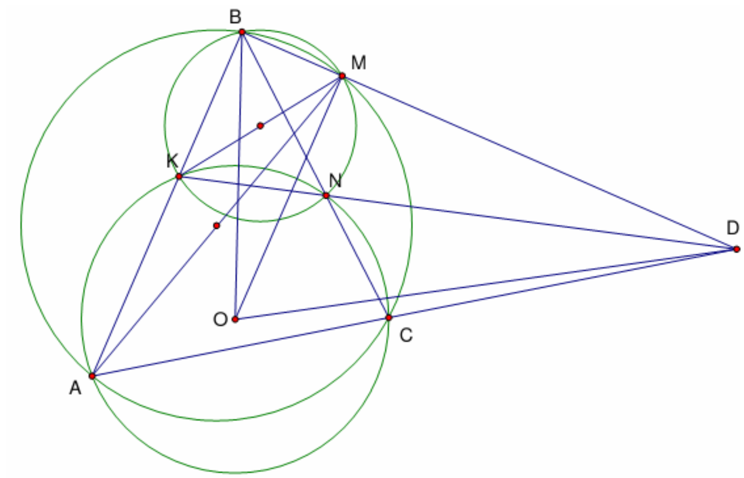
Gọi bán kính w_1, w_2,(O) lần lượt là r_1,r_2,r, O_1,O_2 là tâm w_1 và w_2

Ta có $P_{O_1}/(O)=\overline{O_1P}.\overline{O_1Q}=O_1O^2-r^2$, $\overline{O_1P}.\overline{O_1Q} = O_1O_2^{\ 2} - r_2^{\ 2}$ do đó:

$O_1O^2-r^2=O_1O_2^2-r_2^2$
Suy ra $P_O/(O_1)=OO_1^2-r_1^2=O_1O_2^2+r^2-r_1^2-r_2^2$
Tương tự $P_O/(O_2)= O_1O_2^2+r^2-r_1^2-r_2^2$

Vậy O nằm trên trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) (đpcm)

Bài 30:



Gọi D là giao điểm của AC và KN.
Ta có $\angle KMA=\angle BMA-\angle KMB=\angle ACB-\angle ANK=KDA$
Suy ra tứ giác AKMD nội tiếp
$\Rightarrow \angle AMD = \angle AKD = 180^o - \angle ACB = 180^o - \angle AMB$
Do đó B,M,D thẳng hàng.
Đặt BO=a, DO=b, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác AKNC
Ta có $BM.BD=BK.BA=a^2-R^2$, $DM.DB=DC.DA=b^2-R^2$
$\Rightarrow BD^2=a^2+b^2-2R^2$
$\Rightarrow BM^2-DM^2=\left(\dfrac{a^2-R^2}{BD}\right)^2-\left(\dfrac{b^2-R^2}{BD}\right)^2=\dfrac{(a^2+b^2-2R^2)(a^2-b^2)}{BD^2}=a^2-b^2=BO^2-DO^2$
$\Rightarrow \angle BMO = 90^o$ (đpcm)

Bài 31:

Trục đẳng phương của hai đường tròn có phương trình:
d: $3x-4y-26=0$
Ta khảo sát vị trí tương đối của d với (C_1):
Toạ độ giao điểm của d với (C_1) thoả mãn hệ:
$$\begin{cases} 3x-4y-26=0 \\ x^2+y^2-2x+4y-4=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{4}{3}y+\frac{26}{3}\right)^2+y^2-2\left(\frac{4}{3}y+\frac{26}{3}\right)+4y-4=0$$
$$\Leftrightarrow 25y^2+220y+484=0 \Leftrightarrow y=-4,4$$
Vậy d tiếp xúc với (C_1), tức là (C_1) tiếp xúc với (C_2) (đpcm)

Bài 32:
Trục đẳng phương của hai đường tròn (C_1) và (C_2) có phương trình:
d : -4x+14y-19=0
Ta xét vị trí tương đối của d với (C_2).
Toạ độ giao điểm của d với (C_2) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} -4x+14y-19=0 \\ x^2+y^2-2x-4y-20=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{7}{2}y-\frac{19}{4}\right)^2+y^2-2\left(\frac{7}{2}y-\frac{19}{4}\right)-4y-20=0$$

$$\Leftrightarrow 53y^2-177y+\frac{193}{4}=0$$

Phương trình này có 2 nghiệm phân biệt nên d cắt (C_1), tức là (C_1) và (C_2) cắt nhau.

Tham khảo:

1. Http://Mathlinks.ro

2. Đỗ Thanh Sơn- Trần Hữu Nam, "Phương pháp giải toán hình học 10 theo chủ đề".

3.Nguyễn Minh Hà-Nguyễn Xuân Bình, "Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 10".

4.Viktor Prasolov, "Problems in plane and solid geometry, vol.1: Plane geometry"

5. Các bài giảng đội tuyển học sinh giỏi lớp 10 khối THPT chuyên, ĐHKHTN-ĐHQGHN