

Chương II

PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Chuyên đề 10. RÚT GỌN PHÂN THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

Muốn rút gọn phân thức ta có thể:

Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung;

Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung.

Chú ý: Có khi cần đổi dấu ở tử hoặc mẫu để nhận ra nhân tử chung của tử và mẫu (lưu ý tới tính chất

$$A = -(-A).$$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Rút gọn phân thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x - 12};$$

$$\text{b) } B = \frac{a^4 - 5a^2 + 4}{a^4 - a^2 + 4a - 4};$$

$$\text{c) } C = \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 + 8x^2 + 17x + 10}.$$

Giải

a) Ta có:

$$A = \frac{x^2 + 2x + 1 - 9}{x^2 + 4x - 3x - 12} = \frac{(x+1)^2 - 9}{x(x+4) - 3(x+4)} = \frac{(x+1-3)(x+1+3)}{(x+4)(x-3)}$$

$$A = \frac{(x-2)(x+4)}{(x+4)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}.$$

$$\text{b) Ta có: } B = \frac{a^4 - a^2 - 4a^2 + 4}{a^4 - (a^2 - 4a + 4)} = \frac{a^2(a^2 - 1) - 4(a^2 - 1)}{a^4 - (a-2)^2}$$

$$B = \frac{(a^2 - 1)(a^2 - 4)}{(a^2 - a + 2)(a^2 + a - 2)} = \frac{(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)}{(a^2 - a + 2)(a-1)(a+2)}$$

$$B = \frac{(a+1)(a-2)}{a^2 - a + 2}.$$

$$\text{c) Ta có: } C = \frac{x^2(x+1) - 4(x+1)}{x^3 + x^2 + 7x^2 + 7x + 10x + 10} = \frac{(x+1)(x^2 - 4)}{(x+1)(x^2 + 7x + 10)}$$

$$C = \frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+5)} = \frac{x-2}{x+5}.$$

Ví dụ 2. Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $ab = bc + ca = 1$. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}.$$

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy mẫu thức có thể phân tích thành nhân tử bằng cách sử dụng giả thiết. Do vậy nên thay $1 = ab + bc + ca$ vào mẫu và phân tích đa thức thành nhân tử. Những bài toán rút gọn có điều kiện, chúng ta nên vận dụng và biến đổi khéo léo điều kiện.

Trình bày lời giải

Thay $1 = ab + bc + ca$, ta được $1 + a^2 = a^2 + ab + bc + ca$

$$1 + a^2 = (a + b)(a + c)$$

Tương tự: $1 + b^2 = (b + c)(c + a)$

$$1 + c^2 = (c + a)(c + b)$$

$$\text{Vậy } A = \frac{(a + b)^2 (b + c)^2 (c + a)^2}{(a + b)(a + c)(b + a)(b + c)(c + a)(c + b)} = 1.$$

Ví dụ 3. Cho biểu thức $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$

- a) Rút gọn biểu thức P.
- b) Tìm giá trị nguyên của a để P nhận giá trị nguyên.

Giải

Tìm cách giải. Khi rút gọn biểu thức, chúng ta cần phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử.

Để tìm giá trị nguyên của a, chúng ta cần tách phần nguyên và cho phân thức có giá trị nguyên. Chẳng hạn

$P = \frac{a + 1}{a - 2}$ thì ta viết $P = 1 + \frac{3}{a - 2}$, vì 1 là số nguyên nên để P là số nguyên thì $\frac{3}{a - 2}$ có giá trị nguyên. Do

vậy $a - 2$ phải là ước số của 3.

Trình bày lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8} = \frac{a^2(a - 4) - (a - 4)}{a^3 - 2a^2 - 5a^2 + 10a + 4a - 8} \\ &= \frac{(a^2 - 1)(a - 4)}{a^2(a - 2) - 5a(a - 2) + 4(a - 2)} = \frac{(a + 1)(a - 1)(a - 4)}{(a - 1)(a - 4)(a - 2)} = \frac{a + 1}{a - 2} \end{aligned}$$

b) Ta có: $P = 1 + \frac{3}{a - 2} (a \neq 2)$

$$\text{Vậy } P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{a - 2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a - 2 \in \{ \pm 1; \pm 3 \} \Leftrightarrow a \in \{ -1; 1; 3; 5 \}$$

Ví dụ 4. Cho phân thức $F(x) = \frac{x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2}$.

Xác định x để phân thức $F(x)$ có giá trị nhỏ nhất.

Giải

Tìm cách giải. Trong phân thức $F(x)$ thì bậc của tử thức và mẫu thức là 4, khá lớn. Do đó việc tìm giá trị nhỏ nhất gặp nhiều khó khăn, vậy cần rút gọn biểu thức $F(x)$. Khi $F(x)$ viết được dưới dạng phân thức mà tử thức và mẫu thức là bậc hai, ta tìm cực trị bằng cách lấy biểu thức $F(x) - m$, sao cho kết quả tử thức viết được dưới dạng hằng đẳng thức $(a \pm b)^2$.

Trình bày lời giải

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2} = \frac{x^4 + x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 2}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x^2 - 4x - 2} \\ &= \frac{x^2(x^2 + x + 1) - 2(x^2 + x + 1)}{x^2(x^2 + 2x + 1) - 2(x^2 + 2x + 1)} = \frac{(x^2 + x + 1)(x^2 - 2)}{(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2)} \\ &= \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Xét } F(x) - \frac{3}{4} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} - \frac{3}{4} = \frac{4x^2 + 4x + 4 - 3x^2 - 6x - 3}{4x^2 + 8x + 4} = \frac{(x+1)^2}{4(x+1)^2} \geq 0$$

Suy ra $F(x) \geq \frac{3}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $F(x) = \frac{3}{4}$ khi $x = 1$

Ví dụ 5. Cho biểu thức $B = \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^4 + x^3 + 3x^2 + 2(x+1)}$. Chứng minh rằng biểu thức B không âm với mọi giá trị của x.

Giải

Tìm cách giải. Chứng minh biểu thức không âm với mọi giá trị của x, ta cần phải rút gọn biểu thức. Sau đó chứng tỏ tử thức không âm và mẫu thức dương.

Trình bày lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{x^3(x-1) - (x-1)}{x^2(x^2+x+1) + 2(x^2+x+1)} = \frac{(x-1)^2(x^2+x+1)}{(x^2+2)(x^2+x+1)} = \frac{(x-1)^2}{x^2+2} \\ B &= \frac{(x-1)^2}{x^2+2} \geq 0. \end{aligned}$$

Vậy B không âm với mọi giá trị của x.

Ví dụ 6. Tính $P = \frac{(1986^2 + 1992)(1986^2 + 3972 - 3).1987}{1983.1985.1988.1989}$.

(Thi Học sinh giỏi NewYork (Mỹ) – năm học 1986-1987)

Giải

Tìm cách giải. Bài toán này chứa số khá lớn. Nhiều số gần với 1986, do đó rất tự nhiên đặt $1986 = x$, rồi biểu diễn các số gần với 1986 theo x, ta được biểu thức P biến x. Sau đó rút gọn biểu thức P.

Trình bày lời giải

Đặt $1986 = x$.

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{(x^2 - x - 6)(x^2 + 2x + 3)(x + 1)}{(x - 3)(x - 1)(x + 2)(x + 3)} \\ &= \frac{(x^2 - 3x + 2x - 6)(x^2 - x + 3x - 3)(x + 1)}{(x - 3)(x - 1)(x + 2)(x + 3)} \\ &= \frac{(x - 3)(x + 2)(x - 1)(x + 3)(x + 1)}{(x - 3)(x - 1)(x + 2)(x + 3)} \end{aligned}$$

$$P = x + 1 \text{ hay } P = 1986 + 1 = 1987$$

Nhận xét. Phương pháp giải bài trên là đại số hóa bằng cách đặt $x = 1986$, sau đó rút gọn phân thức đại số.

Nhiều biểu thức số ta có thể giải bằng đại số như trên.

C. Bài tập vận dụng

10.1 Rút gọn biểu thức:

$$\text{a) } \frac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$$

$$\text{b) } N = \frac{(a - 1)^4 - 11(a - 1)^2 + 30}{3(a - 1)^4 - 18(a^2 - 2a) - 3}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9} &= \frac{2x^3 - 6x^2 - x^2 + 3x - 15x + 45}{3x^3 - 9x^2 - 10x^2 + 30x + 3x - 9} \\ &= \frac{(x - 3)(2x^2 - x - 15)}{(x - 3)(3x^2 - 10x + 3)} = \frac{(2x + 5)(x - 3)}{(3x - 1)(x - 3)} = \frac{2x + 5}{3x - 1} \end{aligned}$$

$$\text{b) } N = \frac{(a - 1)^4 - 11(a - 1)^2 + 30}{3(a - 1)^4 - 18(a^2 - 2a) - 3} = \frac{[(a - 1)^2 - 5][(a - 1)^2 - 6]}{3(a - 1)^4 - 18(a - 1)^2 - 15}$$

$$N = \frac{(a^2 - 2a - 4)(a^2 - 2a - 5)}{3[(a - 1)^2 - 5][(a - 1)^2 - 1]} = \frac{a^2 - 2a - 5}{3a^2 - 6a}$$

10.2. Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{n^3 + 2n^2 - 1}{n^3 + 2n^2 + 2n + 1};$$

$$M = \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6}{x^2 + 2x - 8};$$

$$N = \frac{xy^2 + y^2(y^2 - x) + 1}{x^2y^4 + 2y^4 + x^2 + 2}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$A = \frac{n^3 + 2n^2 - 1}{n^3 + 2n^2 + 2n + 1} = \frac{n^3 + n^2 + n^2 - 1}{n^3 + n^2 + n^2 + n + n + 1}$$

$$= \frac{n^2(n+1) + (n-1)(n+1)}{n^2(n+1) + n(n+1) + n + 1} = \frac{n^2 + n - 1}{n^2 + n + 1}$$

$$M = \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6}{x^2 + 2x - 8} = \frac{x^4(x-2) + 2x^2(x-2) - 3(x-2)}{(x-2)(x+4)}$$

$$= \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 3)}{x + 4}$$

$$N = \frac{xy^2 + y^2(y^2 - x) + 1}{x^2y^4 + 2y^4 + x^2 + 2} = \frac{y^4 + 1}{(x^2 + 2)(y^4 + 1)} = \frac{1}{x^2 + 2}$$

10.3. Rút gọn biểu thức: $P = \frac{abc + a + b + c - (ab + bc + ca + 1)}{a^2b + 1 - (a^2 + b)}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$P = \frac{abc - bc + a - 1 - ab + b - ac + c}{a^2b - a^2 - b + 1} = \frac{(a-1)(bc+1-b-c)}{(b-1)(a^2-1)}$$

$$= \frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{(b-1)(a+1)(a-1)} = \frac{c-1}{a+1}$$

10.4. Tính giá trị của biểu thức sau: $P = \frac{(2003^2 \cdot 2013 + 21 \cdot 2004 - 1)(2003 \cdot 2008 + 4)}{2004 \cdot 2005 \cdot 2006 \cdot 2007 \cdot 2008}$.

(Tuyển sinh 10, Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm 2003 – 2004)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $x = 2003$. Ta có:

$$P = \frac{[x^2(x+10) + 31(x+1) - 1][x(x+5) + 4]}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$$

$$= \frac{(x^3 + 10x^2 + 31x + 30)(x^2 + 5x + 4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$$

Phân tích tử thức thành nhân tử, ta được:

$$P = \frac{(x+2)(x+3)(x+5)(x+1)(x+4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)} = 1$$

10.5. Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Rút gọn biểu thức sau:

$$B = \frac{(a^2 + 2bc - 1)(b^2 + 2ca - 1)(c^2 + 2ab - 1)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Thay $1 = ab + bc + ca$, ta được:

$$a^2 + 2bc - 1 = a^2 + bc - ab - ca = a(a - b) - c(a - b) = (a - c)(a - b)$$

Tương tự: $b^2 + 2ca - 1 = (b - c)(b - a)$; $c^2 + 2ab - 1 = (c - a)(c - b)$

Vậy

$$B = \frac{(a - b)(a - c)(b - a)(b - c)(c - a)(c - b)}{(a - b)^2 (b - c)^2 (c - a)^2} = \frac{-(a - b)^2 (b - c)^2 (c - a)^2}{(a - b)^2 (b - c)^2 (c - a)^2} = -1$$

10.6. Cho $A = \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Chứng minh rằng, A không âm với mọi giá trị của x.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) A = \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1} = \frac{x(x^3 + 1) + x^3 + 1}{x^2(x^2 - x + 1) + x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{(x + 1)^2 (x^2 - x + 1)}{(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1}$$

$$b) A = \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1} \geq 0. \text{ Vậy biểu thức A không âm } \forall x$$

10.7. Cho phân thức $M = \frac{3x^2 + 3}{x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 2x + 6}$.

a) Rút gọn biểu thức M.

b) Tính giá trị lớn nhất của biểu thức M.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) M = \frac{3x^2 + 3}{x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 2x + 6} = \frac{3x^2 + 3}{x^4 + x^2 + 2x^3 + 2x + 6x^2 + 6}$$
$$= \frac{3x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 6)} = \frac{3}{x^2 + 2x + 6}$$

$$b) x^2 + 2x + 6 \geq 5 \Rightarrow \frac{3}{x^2 + 2x + 6} \leq \frac{3}{5}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy giá trị lớn nhất của phân thức $M = \frac{3}{5}$ là khi $x = -1$

10.8. Rút gọn phân thức:

$$A = \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6}{x^2 - x - 2}$$

$$Q = \frac{1 + x^4 + x^8 + \dots + x^{2020}}{1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2022}}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{x^4(x-2) + 2x^2(x-2) - 3(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(x-2)(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{(x^2+3)(x-1)(x+1)}{x+1} = (x^2+3)(x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } Q &= \frac{1+x^4+x^8+\dots+x^{2020}}{(1+x^4+x^8+\dots+x^{2020})+(x^2+x^6+x^{10}+\dots+x^{2022})} \\ &= \frac{1+x^4+x^8+\dots+x^{2020}}{(1+x^2)(1+x^4+x^8+\dots+x^{2020})} = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

10.9. Cho $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Rút gọn biểu thức: $P = \frac{x^2+y^2+z^2}{(ax+by+cz)^2}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$ suy ra: $x = ak; y = bk; z = ck$.

$$\text{Từ đó ta có } P = \frac{a^2k^2 + b^2k^2 + c^2k^2}{(a^2k^2 + b^2k^2 + c^2k^2)^2} = \frac{k^2(a^2 + b^2 + c^2)}{k^2(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

10.10. Cho $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2)}{ab+bc+ca-3} = abc.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét tử thức ta có:

$$\begin{aligned} &ab^2 + ac^2 + a^2b + bc^2 + a^2c + b^2c \\ &= (ab^2 + a^2b + abc) + (ac^2 + a^2c + abc) + (bc^2 + bc^2 + abc) - 3abc \\ &= ab(a+b+c) + ac(a+b+c) + bc(a+b+c) - 3abc \\ &= (a+b+c)(ab+ac+bc) - 3abc \\ &= abc(ab+ac+bc-3) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy suy ra: } \frac{a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2)}{ab+bc+ca-3} = abc.$$

Điều phải chứng minh.

10.11. Chứng minh rằng giá trị biểu thức $P = \frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}$ không phụ thuộc vào giá trị của x.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1} = \frac{x^2 + ax^2 + a + a^2 + a^2x^2 + 1}{x^2 - ax^2 - a + a^2 + a^2x^2 + 1} \\ &= \frac{(1 + x^2) + (1 + x^2)a + (1 + x^2)a^2}{(1 + x^2) - (1 + x^2)a + (1 + x^2)a^2} = \frac{(1 + x^2)(1 + a + a^2)}{(1 + x^2)(1 - a + a^2)} = \frac{1 + a + a^2}{1 - a + a^2} \end{aligned}$$

Vậy giá trị biểu thức P không phụ thuộc vào giá trị của x.

10.12. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{x^3 - x}{(1 + xy)^2 - (x + y)^2}$, với $x = -499; y = 999$.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{x(x^2 - 1)}{(1 + xy + x + y)(1 + xy - x - y)} \\ P &= \frac{x(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)(y + 1)(x - 1)(y - 1)} = \frac{x}{(y + 1)(y - 1)} \end{aligned}$$

Điều kiện $x \neq \pm 1; y \neq \pm 1$.

Với $x = -499, y = 999$ thay vào ta được

$$P = \frac{-499}{(999 + 1)(999 - 1)} = \frac{-499}{1000 \cdot 998} = \frac{-1}{2000}$$

10.13. Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{x(x + 5) + y(y + 5) + 2(xy - 3)}{x(x + 6) + y(y + 6) + 2xy}$ với $x + y = 2020$.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{x(x + 5) + y(y + 5) + 2(xy - 3)}{x(x + 6) + y(y + 6) + 2xy} = \frac{x^2 + 5x + y^2 + 5y + 2xy - 6}{x^2 + 6x + y^2 + 6y + 2xy} \\ &= \frac{(x + y)^2 + 5(x + y) - 6}{(x + y)^2 + 6(x + y)} = \frac{(x + y + 6)(x + y - 1)}{(x + y + 6)(x + y)} = \frac{x + y - 1}{x + y} \\ &= \frac{(x + y)^2 + 5(x + y) - 6}{(x + y)^2 + 6(x + y)} = \frac{(x + y + 6)(x + y - 1)}{(x + y + 6)(x + y)} = \frac{x + y - 1}{x + y} \end{aligned}$$

Điều kiện $x \neq -y; x + y \neq -6$.

Với $x + y = 2020$ thì giá trị biểu thức $A = \frac{2019}{2020}$

10.14. Cho $ax + by + cz = 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + ab(x - y)^2} = \frac{1}{a + b + c}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Xét } bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2$$

$$=bcy^2 - 2bcyz + bcz^2 + caz^2 - 2cazx + cax^2 + abx^2 - 2abxy + aby^2$$

$$=(a^2x^2 + aby^2 + acz^2) + (abx^2 + b^2y^2 + bcz^2) + (acx^2 + bcy^2 + c^2z^2) -$$

$$(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2bcyz + 2cazx)$$

$$=(a+b+c)(ax^2 + by^2 + cz^2) - (ax+by+cz)^2$$

$$=(a+b+c)(ax^2 + by^2 + cz^2) \quad (\text{vì } ax+by+cz=0)$$

Từ đó suy ra, vế trái

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2} = \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{(a+b+c)(ax^2 + by^2 + cz^2)} = \frac{1}{a+b+c}.$$