

BÀI 4. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

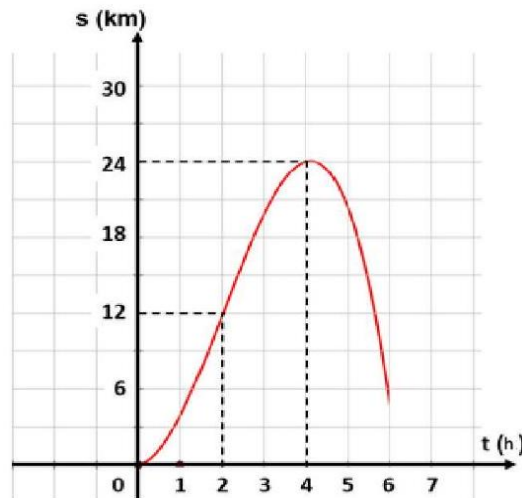
Sơ đồ khảo sát hàm số

- **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số.
- **Bước 2.** Xét sự biến thiên của hàm số.
 - + Tìm các giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).
 - + Tính đạo hàm y' và tìm các điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0.
 - + Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên, cực trị của hàm số (nếu có).
- **Bước 3.** Vẽ đồ thị hàm số
 - + Vẽ các đường tiệm cận (nếu có).
 - + Xác định các điểm đặc biệt của đồ thị: cực trị, giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (trong trường hợp đơn giản), ...
 - + Nhận xét về đặc điểm của đồ thị: chỉ ra trục đối xứng, tâm đối xứng (nếu có).

PHẦN B. CÂU TẬP ÁP DỤNG

Câu 1. Thầy An tham dự giải "Đi bộ trực tuyến Ngành Giáo dục và Đào tạo Edu Run-HCMC" năm 2024. Quãng đường thầy An đi được biểu diễn bằng hàm số $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ (với $a \neq 0$) có đồ thị như hình bên. (trong đó t là thời gian tính bằng giờ, s là quãng đường tính bằng km).

Khi đó, vận tốc tối đa của thầy An đạt được là bao nhiêu?



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm:

$O(0;0), A(2;12), B(4;24)$ và nhận $B(4;24)$ làm 1 cực trị.

Ta có: $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \Rightarrow s'(t) = 3at^2 + 2bt + c$

$$\left\{ \begin{array}{l} s(0)=0 \\ s(2)=12 \\ s(4)=24 \\ s'(4)=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} d=0 \\ 8a+4b+2c+d=12 \\ 64a+16b+4c+d=24 \\ 48a+8b+c=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=-\frac{3}{4} \\ b=\frac{9}{2} \\ c=0 \\ d=0 \end{array} \right.$$

Khi đó ta có hệ sau:

$$\text{Nên: } s(t) = -\frac{3}{4}t^3 + \frac{9}{2}t^2 \Rightarrow v(t) = s'(t) = -\frac{9}{4}t^2 + 9t$$

$$\text{Thầy Hiếu dừng đi bộ khi: } v(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{4}t^2 + 9t = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t=0 \\ t=4 \end{array} \right.$$

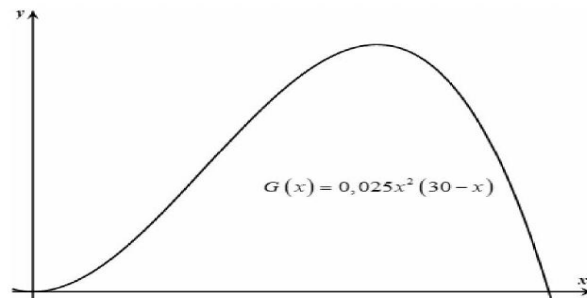
Câu toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $v(t)$ trên $[0; 4]$.

$$\text{Ta có: } v'(t) = -\frac{9}{2}t + 9 \Rightarrow v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

$$\text{Khi đó: } v(0) = 0, v(2) = 9, v(4) = 0$$

Vậy vận tốc lớn nhất mà thầy Hiếu đạt được là 9 km/h tại thời điểm $t = 2$.

Câu 2. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trong đó x là số miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân ($0 < x < 30$). Để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là bao nhiêu?



Lời giải

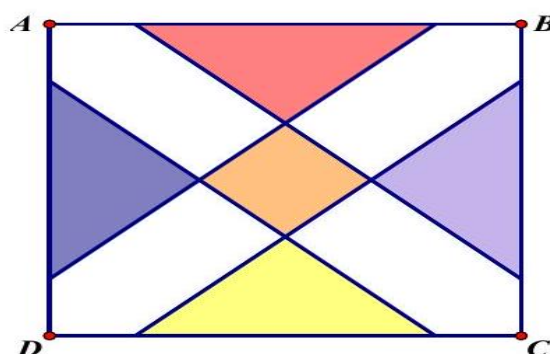
$$G'(x) = 1,5x - 0,075x^2$$

$$G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 20$$

x	0	20	30	
$G'(x)$		+	0	-
$G(x)$	0	$G_{\max}$	0	

Vậy để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là $x = 20(\text{mg})$.

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

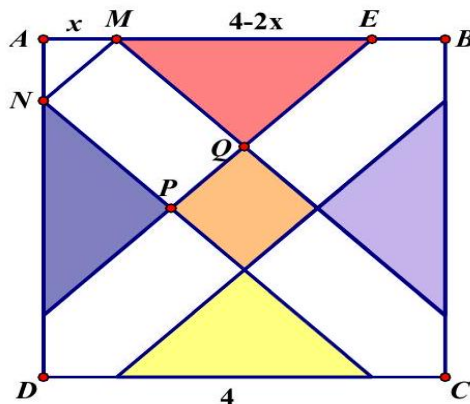


Lời giải

Đặt $AM = x (0 < x < 4) \Rightarrow ME = 4 - 2x, MN = x\sqrt{2}; 2MQ^2 = ME^2 = (4 - 2x)^2$

Gọi S tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ.

$$S = 4 \cdot \frac{MQ^2}{2} + PQ^2 = 2MQ^2 + MN^2 = (4 - 2x)^2 + (x\sqrt{2})^2 = 6x^2 - 16x + 16$$



$$S' = 12x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{4}{3}$	4
S'	-	0	+
S		$\frac{16}{3}$	

Vậy $S_{\min} = \frac{16}{3}$.

Câu 4. Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 20USD/ người thì trung bình có 1 000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm 1USD/ người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 1USD/ người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.

Lời giải

Gọi giá vé sau khi điều chỉnh là $20 + x (x + 20 > 0)$

Số khách là: $1000 - 100x$

Tổng thu nhập:

$$f(x) = (20 + x + 2)(1000 - 100x) = (22 + x)(1000 - 100x) = -100x^2 - 1200x + 22000$$

Bảng biến thiên

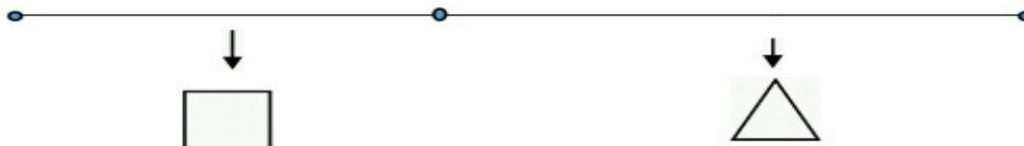
x	-20	-6	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$-\infty$	$f(-6)$	$-\infty$

$\underset{(-20; +\infty)}{\text{Max}} f(x) = f(-6)$. Suy ra giá vé là: $x + 20 = 20 - 6 = 14$ USD

Câu 5. Bạn A có một đoạn dây mềm và dẻo không đàn hồi 20 m, bạn chia đoạn dây thành hai phần, phần đầu gấp thành một tam giác đều. Phần còn lại gấp thành

một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu (m) để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

Lời giải



Gọi x (m) là cạnh của tam giác đều, $\left(0 < x < \frac{20}{3}\right)$.

Suy ra cạnh hình vuông là $\frac{20-3x}{4}$ (m).

Gọi S là tổng diện tích của hai hình.

$$S(x) = x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{20-3x}{4}\right)^2. \quad \text{Ta có:} \quad S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 \cdot \frac{20-3x}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right).$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 \cdot \frac{20-3x}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{60}{9+4\sqrt{3}}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{60}{9+4\sqrt{3}}$	$\frac{20}{3}$
$S'(x)$		- 0 +	
$S(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên, S đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{60}{9+4\sqrt{3}}$ (m).

Vậy độ dài phần đầu là $\frac{180}{9+4\sqrt{3}}$ (m).

Câu 6. Một bể ban đ u chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Đặt $f(t)$ gam/lít là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo

khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng P gam/lít. Tìm số P (kết quả thể hiện dưới dạng số thập phân).



Lời giải

Sau t phút, trong bể chứa $(50t + 150)$ lít nước và $20t$ gam chất khử trùng.

Suy ra nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút là $f(t) = \frac{20t}{50t + 150}$ gam/lít.

Khảo sát sự biến thiên hàm số $f(t) = \frac{20t}{50t + 150}, t \geq 0$.

Ta có: $f'(t) = \frac{3000}{(50t + 150)^2} > 0, \forall t \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20t}{50t + 150} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20}{50 + \frac{150}{t}} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Bảng biến thiên:

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	0	0,4

Dựa vào BBT ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng 0,4 gam/lít.

Vậy $p = 0,4$.

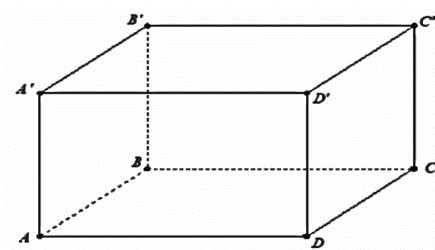
Câu 7. Ông A dự định sử dụng hết $6,7 \text{ m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Gọi x là chiều rộng, ta có chiều dài là $2x$.

Do diện tích đáy và các mặt bên là $6,7 \text{ m}^2$ nên có chiều cao $h = \frac{6,7 - 2x^2}{6x}$,

Ta có: $h > 0$ nên $x < \sqrt{\frac{6,7}{2}}$.



Thể tích bể cá là $V(x) = \frac{6,7x - 2x^3}{3}$ và $V'(x) = \frac{6,7 - 6x^2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{6,7}{6}}$

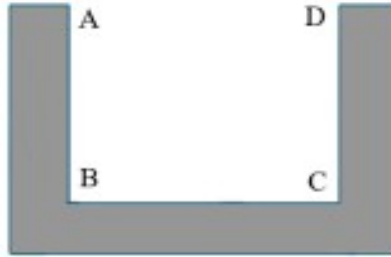
Bảng biến thiên:

x	0	$\sqrt{\frac{6,7}{6}}$	$\sqrt{\frac{6,7}{2}}$
y'	+	0	-
y	0	$1,57m^3$	0

Bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,57 \text{ m}^3$.

Câu 8. Hình dưới đây là mương dẫn nước thủy lợi tại một địa phương phục vụ tưới tiêu cho ruộng đồng. Phần không gian trong mương để nước chảy có mặt cắt ngang là hình chữ nhật $ABCD$. Với điều kiện lưu lượng nước qua mương cho phép

thì diện tích mặt cắt $ABCD$ là $0,48 \text{ m}^2$. Để đảm bảo yêu cầu kỹ thuật tốt nhất cho mương, người ta cần thiết kế sao cho tổng độ dài $T = AB + BC + CD$ là ngắn nhất. Khi đó chiều rộng đáy mương bằng bao nhiêu (biết chiều rộng phải dưới 1m, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đặt $BC = x \text{ (m)}$ $0 < x < 1$. Theo đề Câu, ta có

$$AB \cdot BC = 0,48 \Rightarrow AB = \frac{0,48}{BC} = \frac{0,48}{x}$$

$$T = f(x) = AB + BC + CD = x + 2 \cdot AB = x + \frac{0,96}{x}$$

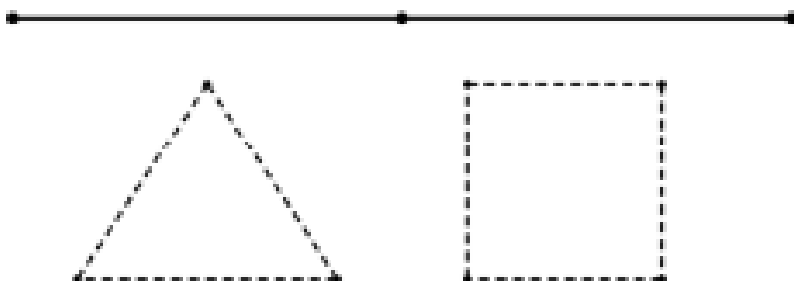
$$f'(x) = 1 - \frac{0,96}{x^2}. \text{ Khi đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 0,96 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{5} \approx 0,98 \text{ (m)}$$

x	0	$\frac{2\sqrt{6}}{5}$	1
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{4\sqrt{6}}{5}$	$\frac{49}{25}$

Vậy chiều rộng đáy mương $BC = 0,98 \text{ (m)}$ thỏa ycbt.

Câu 9. Cắt một đoạn dây dài 60m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một tam giác đều có diện tích S_1 , đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ bên).

Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu (kết quả làm tròn đơn hàng phần mười)?



Lời giải

Gọi độ dài đoạn dây gấp tam giác đều là x thì độ dài đoạn dây gấp hình vuông là $60 - x$ (mét)

Khi đó $x = 3a \Leftrightarrow a = \frac{x}{3} \Rightarrow S_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{36}$

Mặt khác:

$$60 - x = 4b \Rightarrow b = \frac{60 - x}{4} \Rightarrow S_2 = b^2 = \left(\frac{60 - x}{4} \right)^2$$

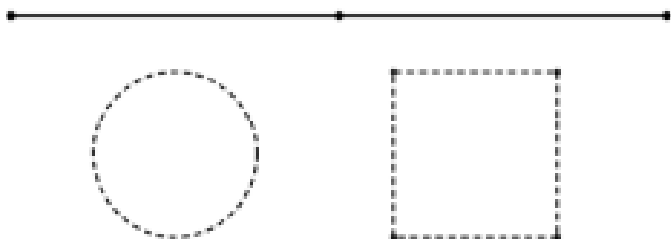
Khi đó $S_1 + S_2 = \frac{x^2 \sqrt{3}}{36} + \left(\frac{60 - x}{4} \right)^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{(9 + 4\sqrt{3})x^2 - 1080x + 32400}{144}$

$$(S_1 + S_2)_{\min} = \min f(x) = f\left(\frac{540}{9 + 4\sqrt{3}}\right) \approx 97,9 \text{ (m}^2\text{)}$$

Dễ dàng tính được

Câu 10. Cắt một đoạn dây dài 30 m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một đường tròn có diện tích S_1 , đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ bên).

Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?



Lời giải

Gọi độ dài đoạn dây gấp đường tròn là x thì độ dài đoạn dây gấp hình vuông là $30 - x$ (mét)

Khi đó $x = 2\pi a \Leftrightarrow a = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow S_1 = \pi a^2 = \frac{x^2}{4\pi}$

Mặt khác:

$$30 - x = 4b \Rightarrow b = \frac{30 - x}{4} \Rightarrow S^2 = b^2 = \left(\frac{30 - x}{4} \right)^2$$

Khi

$$S_1 + S_2 = \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{30 - x}{4} \right)^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 60\pi x + 900\pi}{16\pi}$$

$$(S_1 + S_2)_{\min} = \min f(x) = f\left(\frac{30\pi}{\pi + 4}\right) \approx 31,5 \text{ (m}^2\text{)}$$

Dễ dàng tính được

Câu 11. Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của

hộp là thấp nhất. Biết $h = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m + n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi chiều dài, chiều rộng của hộp là $2x$ và $x (x > 0)$.

Khi đó, ta có thể tích của cái hộp là:

$$V = 2x^2 \cdot h \Rightarrow 2x^2 \cdot h = 48 \Leftrightarrow x^2 \cdot h = 24$$

Do giá thành làm đáy và mặt bên hộp là 3, giá thành làm nắp hộp là 1 nên giá thành làm hộp là:

$$L = 3(2x^2 + 2xh + 4xh) + 2x^2 = 8x^2 + 18xh$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm ta được:

$$3\sqrt[3]{8x^2 \cdot 9xh \cdot 9xh} = 3\sqrt[3]{648(x^2h)^2} = 216$$

$$\begin{cases} 8x^2 = 9xh \\ x^2h = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9h}{8} \\ \frac{9^2}{8^2} \cdot h^3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ h = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

Vậy $m = 8, n = 3$ và $m + n = 11$.

Câu 12. Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (hình vẽ dưới). Đi với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.

Lời giải

Gọi độ dài của hàng rào song song với bờ sông là x với $x > 0$

Gọi độ dài của mỗi hàng rào trong ba hàng rào song song nhau là y với $y > 0$

Diện tích đất mà bác nông dân rào được là: $xy \text{ (m}^2\text{)}$.

Tổng chi phí là 15000000 đồng nên ta có phương trình:

$$x60000 + 3y50000 = 15000000 \Rightarrow 6x + 15y = 1500$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$$6x + 15y \geq 2\sqrt{6x \cdot 15y} \Rightarrow 1500 \geq 2\sqrt{90xy} \Rightarrow xy \leq 6250$$

Vậy diện tích lớn nhất mà bác nông dân có thể tạo rào là $6250 \text{ (m}^2\text{)}$.

Câu 13. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B . Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng).

Cho phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Tính chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng.

b) Tính số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B .

c) Xác định hàm số biểu thị lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B .

d) A bán cho B khoảng bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất?

Lời giải

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là $C(10) = 100 + 30 \cdot 10 = 400$ triệu đồng.

b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là

$$R(10) = 10 \cdot P(10) = 10 \cdot (45 - 0,001 \cdot 10^2) = 449 \quad (\text{triệu đồng}).$$

c) Lợi nhuận mà A thu được là:

$$\begin{aligned} H(x) &= R(x) - C(x) = xP(x) - C(x) = P(x) = 45x - 0,001x^3 - (100 + 30x) \\ &= -0,001x^3 + 15x - 100 \end{aligned}$$

d) Xét hàm số $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100, (0 \leq x \leq 100)$ ta có $H'(x) = -0,003x^2 + 15$,
 $H'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 50\sqrt{2}$ (chọn).

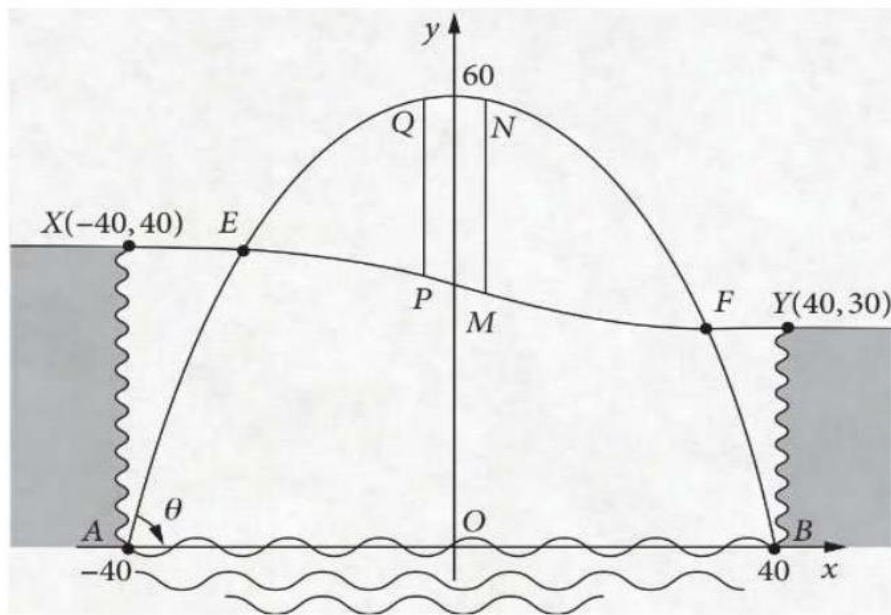
Ta có $H(0) = -100; H(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100; H(100) = 400$

Vậy A bán cho B khoảng $50\sqrt{2} \approx 70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất bằng $H(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100$

Câu 14. Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80 m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây.

Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình:

$$y = \frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35$$



Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của parabol và đường XY . Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy ; MN là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Theo Câu ra ta có: phương trình của parabol là $y = 60 - \frac{3}{80}x^2$.

Khoảng cách giữa khung Parabol và đường xuyên núi là:

$$D = 60 - \frac{3}{80}x^2 - \left(\frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35 \right) \quad \text{với } x \in (-23,71; 27,99)$$

Xét $D' = -\frac{3}{40}x - \frac{3x^2}{25600} + \frac{3}{16} = 0 \Leftrightarrow x = 2,49$

Bảng biến thiên:

x	-23,71	2,49	27,99
D'(x)	+	0	-
D(x)	0 25,23 0		

Dựa vào bảng biến thiên, MN là đoạn có độ dài lớn nhất khi $x = 2,49$

$$\Rightarrow MN = D_{MN} = 60 - \frac{3}{80} \cdot 2,49^2 - \left(\frac{2,49^3}{25600} - \frac{3 \cdot 2,49}{16} + 35 \right) \approx 25,23$$

Vì N và Q là hai điểm đối xứng qua $Oy \Rightarrow x_{PQ} \approx -2,49$

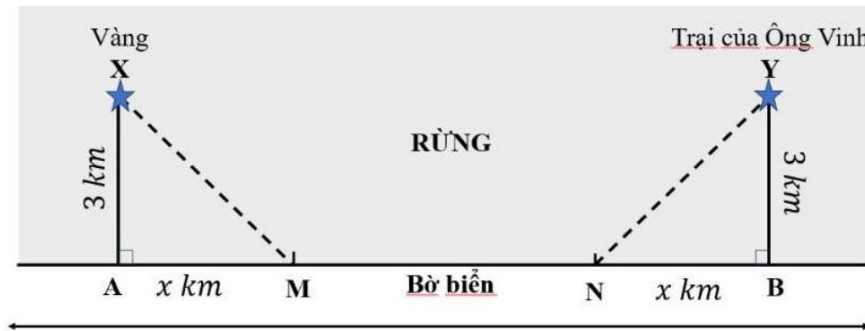
$$\Rightarrow PQ = D_{PQ} = 60 - \frac{3}{80} \cdot 2,49^2 - \left(\frac{-2,49^3}{25600} - \frac{3 \cdot -2,49}{16} + 35 \right) \approx 24,3$$

Tổng độ dài $MN + PQ = 49,5$.

Câu 15. Ông Vinh đang ở trong rừng để đào vàng. Anh ta tìm thấy vàng ở X , cách điểm $A : 3 \text{ km}$. Điểm A nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Trại của ông Vinh nằm ở Y , cách điểm $B : 3 \text{ km}$. Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 3 \text{ km}$, 18 km $AM = NB = x \text{ km}$ và $AX = BY = 3 \text{ km}$. (Như hình vẽ)

Khi đang đào vàng, ông Vinh bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo phương trình $y = 50 \log(t + 2)$.

Trong đó, y là nồng độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Ông Vinh cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng và trên bãi biển với vận tốc lần lượt là 5 km/h và 13 km/h . Để về đến trại Ông Vinh cần chạy từ trong rừng qua đi M, N trên bãi biển. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông Vinh về đến trại (làm tròn đáp án đến hàng phần chục).



Lời giải

Để nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi thời gian di chuyển về đến trại thấp nhất.

Vậy nên Quãng đường ông Vinh di chuyển về đến trại phải thấp nhất.

Quãng đường của Ông Vinh

Theo Câu ra ta có: ông Vinh sẽ đi qua các quãng đường $XM + MN + NY$.

Ta có: $XM = NY = \sqrt{9 + x^2}$; $MN = 18 - 2x$

$$T(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{9 + x^2}}{5} + \frac{9 - x}{13} \right) \text{ với}$$

Thời gian Ông Vinh chạy đến Trại nghỉ là:

$$x \in (0; 9)$$

$$T'(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{9 + x^2}}{5} + \frac{9 - x}{13} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Xét (thỏa mãn)

Bảng biến thiên:

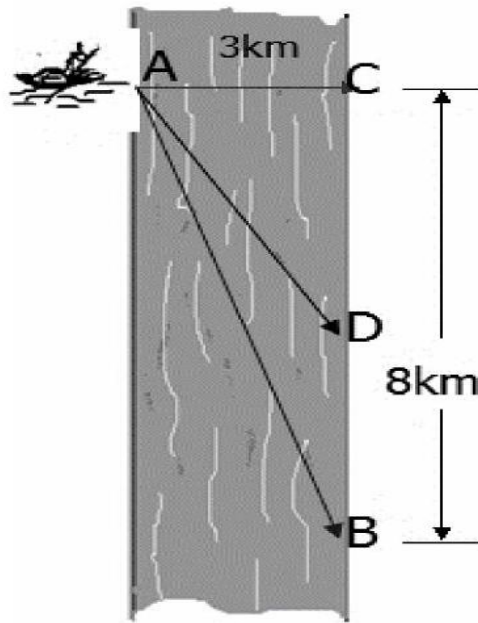
x	0	$\frac{5}{4}$	9
$T'(x)$	-	0	+
$T(x)$	$\frac{168}{65}$	$\frac{162}{65}$	$\frac{6\sqrt{10}}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của $T(x)$ nhỏ nhất khi $x = \frac{5}{4}$.

$$\Rightarrow \min_{x \in (0;9)} T(x) = T\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{162}{65}$$

Vậy, nồng độ chất độc trong máu thấp nhất là $\min_{x \in (0;9)} y = 50 \log \left(\frac{162}{65} + 2 \right) \approx 32,6$

Câu 16. Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới đi mB về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đ nB , hay có thể chèo trực tiếp đến nB , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến nB . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h , chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8 \text{ km}$. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: phút) để người đàn ông đến nB .



Lời giải

Gọi x (km) là độ dài quãng đường CD ($0 \leq x \leq 8$);

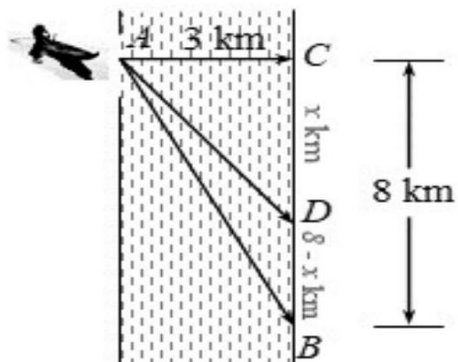
$8 - x$ (km) là độ dài quãng đường DB .

Thời gian chèo thuyền trên quãng đường $AD = \sqrt{x^2 + 9}$

là: $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6}$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường DB là: $\frac{8 - x}{8}$ (giờ)

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là:



$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}$ trên khoảng $[0; 8]$.

$$f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+9} = 4x \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$$

Ta có

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{9}{\sqrt{7}}$	8
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B

là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 80'$.