

## ĐỀ BÀI

**Câu 1. ( 5 điểm)** Tìm số tự nhiên  $n$  để:

a)  $A = n^3 - n^2 + n - 1$  là số nguyên tố

b)  $B = \frac{n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 6n - 2}{n^2 + 2}$  có giá trị là một số nguyên

c)  $D = n^5 - n + 2$  là số chính phương.

**Câu 2. (5 điểm)** Chứng minh rằng:

a)  $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1} = 1$  biết  $abc = 1$

b) Với  $a + b + c = 0$  thì  $a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + bc + ca)^2$

c)  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c}$

**Câu 3. (5 điểm)** Giải các phương trình sau:

a)  $\frac{x - 214}{86} + \frac{x - 132}{84} + \frac{x - 54}{82} = 6$

b)  $2x(8x - 1)^2 \cdot (4x - 1) = 9$

c)  $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$  với  $x, y$  nguyên dương.

**Câu 4. (5 điểm)** Cho hình thang  $ABCD (AB \parallel CD)$ ,  $O$  là giao điểm hai đường

chéo. Qua  $O$  kẻ đường thẳng song song với  $AB$  cắt  $DA$  tại  $E$ , cắt  $BC$  tại  $F$

a) Chứng minh : Diện tích tam giác  $AOD$  bằng diện tích tam giác  $BOC$

b) Chứng minh:  $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{EF}$

c) Gọi  $K$  là điểm bất kỳ thuộc  $OE$ . Nêu cách dựng đường thẳng đi qua  $K$  và chia đôi diện tích tam giác  $DEF$



## ĐÁP ÁN

### Câu 1.

a)  $A = n^3 - n^2 + n - 1 = (n^2 + 1)(n - 1)$

Để A là nguyên tố thì  $n - 1 = 1 \Leftrightarrow n = 2$ . Khi đó  $A = 5$

b)  $B = n^2 + 3n - \frac{2}{n^2 + 2}$

B có giá trị nguyên  $\Leftrightarrow 2 : n^2 + 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^2 + 2 = 1 \\ n^2 + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 = -1 \text{ (ktm)} \\ n = 0 \text{ (tm)} \end{cases}$$

$n^2 + 2$  là ước tự nhiên của 2

Vậy với  $n = 0$  thì B có giá trị nguyên.

c)

$$D = n^5 - n + 2 = n(n^4 - 1) + 2 = n(n+1)(n-1)(n^2+1) + 2$$

$$= n(n-1)(n+1) \left[ (n^2 - 4) + 5 \right] + 2 = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) + 5n(n-1)(n+1) + 2$$

Mà  $n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) : 5$  (tích 5 số tự nhiên liên tiếp)

Và  $5n(n-1)(n+1) : 5$ . Vậy D chia 5 dư 2

Do đó D có tận cùng là 2 hoặc 7 nên D không phải là số chính phương.

Vậy không có giá trị nào của  $n$  để D là số chính phương.

### Câu 2.

a)

$$\begin{aligned} \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1} &= \frac{ac}{abc+ac+c} + \frac{abc}{abc^2+abc+ac} + \frac{c}{ac+c+1} \\ &= \frac{ac}{1+ac+c} + \frac{abc}{c+1+ac} + \frac{c}{ac+c+1} = \frac{abc+ac+1}{abc+ac+1} = 1 \end{aligned}$$

b)

$$a+b+c=0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = -2(ab+ac+bc) \quad (1)$$

$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) = 4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+8abc(a+b+c)$$

(Vì  $a+b+c=0$ )

$$\Rightarrow 2(ab+ac+bc) = 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow a^4+b^4+c^4 = 2(ab+ac+bc)^2$

c) Áp dụng bất đẳng thức  $x^2 + y^2 \geq 2xy$ . Dấu bằng xảy ra khi  $x = y$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = 2 \cdot \frac{a}{c}$$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a} = 2 \cdot \frac{c}{b}$$

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2 \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{c} = 2 \cdot \frac{b}{a}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$2 \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \right) \geq 2 \left( \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \right) \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

Dấu "=" xảy ra khi  $a = b = c$

### Câu 3.

a)

$$\frac{x - 214}{86} + \frac{x - 132}{84} + \frac{x - 54}{82} = 6$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{x - 214}{86} - 1 \right) + \left( \frac{x - 132}{84} - 2 \right) + \left( \frac{x - 54}{82} - 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 300}{86} + \frac{x - 300}{84} + \frac{x - 300}{82} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 300) \left( \frac{1}{86} + \frac{1}{84} + \frac{1}{82} \right) = 0 \Leftrightarrow x - 300 = 0 \Leftrightarrow x = 300$$

Vậy  $S = \{300\}$

b)

$$2x(8x - 1)^2 \cdot (4x - 1) = 9$$

$$\Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(8x^2 - 2x) = 9 \Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(64x^2 - 16x) = 72$$

$$64x^2 - 16x + \frac{1}{2} = k$$

Đặt

Ta có:

$$(k + 0,5)(k - 0,5) = 72 \Leftrightarrow k^2 = 72,25 \Rightarrow k = \pm 8,5$$

Với  $k = 8,5$  ta có phương trình :

$$64x^2 - 16x - 8 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(4x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Với  $k = -8,5$  ta có phương trình:

$$64x^2 - 16x + 9 = 0 \Leftrightarrow (8x - 1)^2 + 8 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy  $S = \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{1}{4} \right\}$

c)  $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) - 7 = 0$

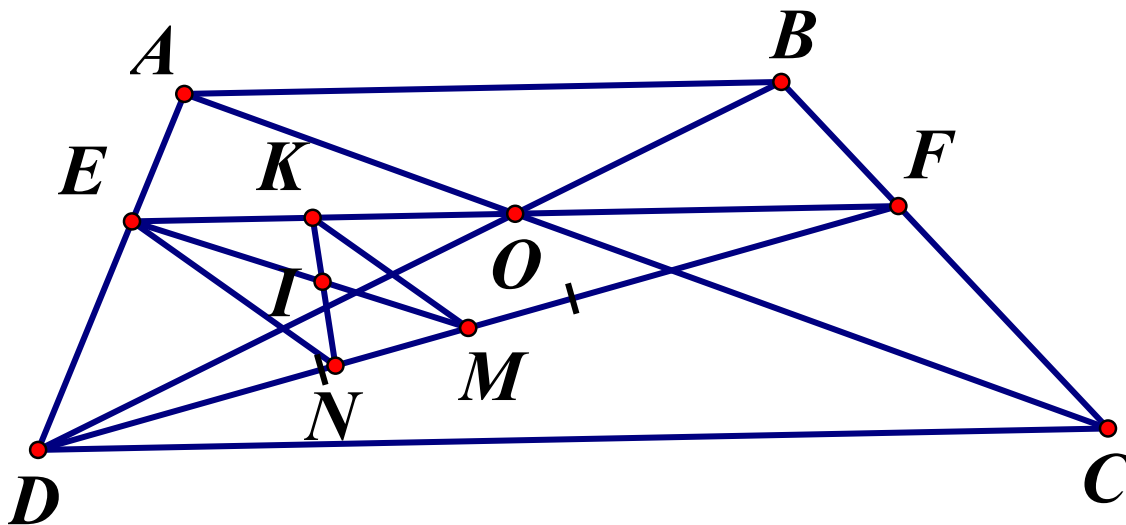
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - (y+2)^2 = 7 \Leftrightarrow (x - y - 1)(x + y + 3) = 7$$

Vì  $x, y$  nguyên dương nên  $x + y + 3 > x - y - 1$

$$\Rightarrow x + y + 3 = 7 \text{ và } x - y - 1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm dương duy nhất  $(x; y) = (3; 1)$

**Câu 4.**



a) Vì  $AB \parallel CD \Rightarrow S_{DAB} = S_{CBA}$  (cùng đáy và cùng đường cao)  
 $\Rightarrow S_{DAB} - S_{AOB} = S_{CBA} - S_{AOB}$  hay  $S_{AOD} = S_{BOC}$

b) Vì  $EO \parallel DC \Rightarrow \frac{EO}{DC} = \frac{AO}{AC}$ . Mặt khác  $AB \parallel DC$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{AO}{OC} \Rightarrow \frac{AB}{AB+BC} = \frac{AO}{AO+OC} \Rightarrow \frac{AB}{AB+BC} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow \frac{EO}{DC} = \frac{AB}{AB+DC}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{2DC} = \frac{AB}{AB+DC} \Rightarrow \frac{AB+DC}{AB \cdot DC} = \frac{2}{EF} \Rightarrow \frac{1}{DC} + \frac{1}{AB} = \frac{2}{EF}$$

c) dựng trung tuyến  $EM$ , dựng  $EN \parallel MK (N \in DF)$

Kẻ đường thẳng  $KN$  là đường phải dựng.

Chứng minh:  $S_{EDM} = S_{EFM}$  (1)

Gọi giao điểm của  $EM$  và  $KN$  là  $I$  thì  $S_{IKE} = S_{IMN}$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $S_{DEKN} = S_{KFN}$