ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

HUYỆN NAM SƠN-Năm học 2017-2018

Câu 1. (4,0 điểm)

Chứng minh rằng:

a) $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{11}$ chia hết cho 40

b) $B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{100^2} < 1$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho $a + b + c = 0$, chứng minh rằng : $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) So sánh hai số sau: $C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ và $D = 2^{32}$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = 2x^2 - 8x + 1$

Câu 4. (3,0 điểm)

Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác ấy.

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại $A(AB < AC)$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Qua I vẽ IM vuông góc với AB tại M và IN vuông góc với AC tại N.

a) Chứng minh tứ giác $AMIN$ là hình chữ nhật

b) Gọi D là điểm đối xứng của I qua N. Chứng minh tứ giác $ADCI$ là hình thoi.

c) Đường thẳng BN cắt DC tại K. Chứng minh rằng $DK = \frac{1}{3}DC.$

Câu 6. (1,0 điểm)

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{11}$

$= \left(1 + 3 + 3^2 + 3^3\right) + \left(3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7\right) + \left(3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11}\right)$

$= \left(1 + 3 + 3^2 + 3^3\right) + 3^4.\left(1 + 3 + 3^2 + 3^3\right) + 3^8.\left(1 + 3 + 3^2 + 3^3\right)$

$= 40 + 3^4.40 + 3^8.40$

$= 40.\left(1 + 3^4 + 3^8\right) \vdots 40$

Vậy $A \vdots 40$

b)

$$B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{100^2}$$

$$= \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + ... + \frac{1}{100.100}$$

$$< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{99.100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} < 1$$

Vậy $B < 1$

Câu 2.

a)

Ta có: $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c$

Mặt khác

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

$\Rightarrow (-c)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(-c)$

$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \ (dfcm)$

b)

$C = (2 + 1)\left(2^2 + 1\right)\left(2^4 + 1\right)\left(2^8 + 1\right)\left(2^{16} + 1\right)$

$(2 - 1)C = (2 - 1)(2 + 1)\left(2^2 + 1\right)\left(2^4 + 1\right)\left(2^8 + 1\right)\left(2^{16} + 1\right)$

$C = \left(2^2 - 1\right)\left(2^2 + 1\right)\left(2^4 + 1\right)\left(2^8 + 1\right)\left(2^{16} + 1\right)$

$C = \left(2^4 - 1\right)\left(2^4 + 1\right)\left(2^8 + 1\right)\left(2^{16} + 1\right)$

$C = (2^8 - 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$

$C = (2^{16} - 1)(2^{16} + 1) = 2^{32} - 1$

Vì $2^{32} - 1 < 2^{32}$ nên $C < D$

Câu 3.

a)

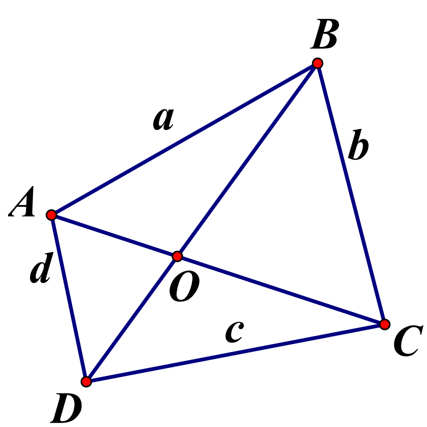
$$\begin{aligned}
&x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019\\
&= x^4 + (x^2 + 2018x^2) + 2018x + (2018 + 1) + x^3 - x^3\\
&= (x^4 + x^3 + x^2) + (2018x^2 + 2018x + 2018) - (x^3 - 1)\\
&= x^2(x^2 + x + 1) + 2018(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)\\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2018 - x + 1)\\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2019)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&E = 2x^2 - 8x + 1\\
&= 2x^2 - 8x + 8 - 7\\
&= 2(x - 2)^2 - 7 \geq -7 \qquad (\forall x)
\end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $E = -7 \Leftrightarrow x = 2$

Câu 4.



Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của tứ giác $ABCD.$

Đặt $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$

Xét $\Delta AOB,$ ta có: $OA + OB > AB$ (quan hệ giữa ba cạnh của tam giác)
Xét $\Delta COD,$ ta có: $OC + OD > CD$ (quan hệ giữa ba cạnh của tam giác)
Suy ra :
$OA + OB + OC + OD > AB + CD$
$\Rightarrow AC + BD > AB + CD$
$\Rightarrow AC + BD > a + c \qquad (1)$
Chứng minh tương tự : $AC + BD > AD + BC \Rightarrow AC + BD > d + b \qquad (2)$
Từ (1) và (2) suy ra

$$2(AC + BD) > a + b + c + d \Rightarrow AC + BD > \frac{a + b + c + d}{2} (*)$$

Xét $\Delta ABC,$ ta có: $AC < a + b$
Xét $\Delta ADC,$ ta có: $AC < d + c$

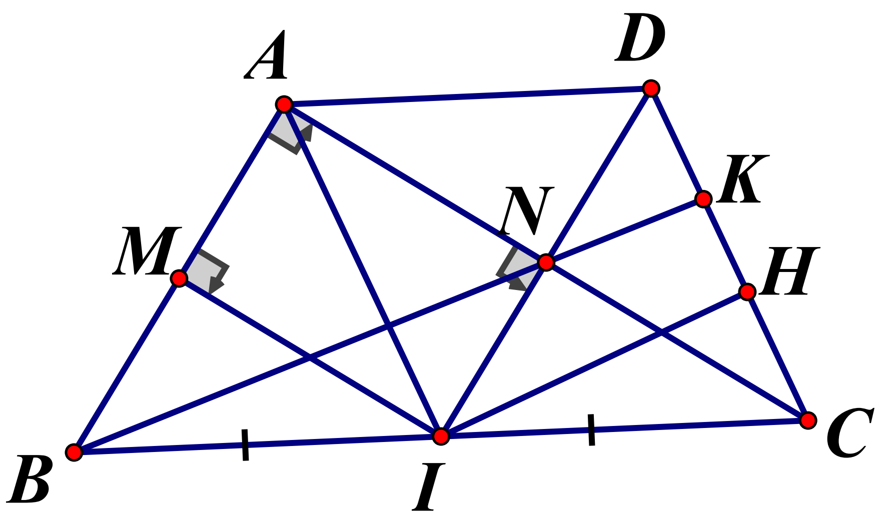
Suy ra : $2AC < a + b + c + d \Rightarrow AC < \dfrac{a + c + d + b}{2} \qquad (3)$

Chứng minh tương tự: $BD < \dfrac{a + c + d + b}{2}$ (**) $\quad (4)$

Từ $(3);(4)$ suy ra $AC + BD < a + b + c + d$

Từ $(*)$ và (**) suy ra $\dfrac{a + c + d + b}{2} < AC + BD < a + b + c + d \qquad (dfcm)$

Câu 5.



a) Xét tứ giác $AMNI$ có:

$\widehat{MAN} = 90^0$ (vì ΔABC vuông ở A)

$\widehat{AMI} = 90^0$ (Vì IM vuông góc với AB)

$\widehat{ANI} = 90^0$ (Vì IN vuông góc với AC)

Vậy tứ giác $AMIN$ là hình chữ nhật (vì có 3 góc vuông)

b) ΔABC vuông tại A, có AI là trung tuyến nên $AI = IC = \frac{1}{2}BC$

Do đó ΔAIC cân tại I, có đường cao IN đồng thời là trung tuyến

$\Rightarrow NA = NC$

Mặt khác $: NI = ND$ (tính chất đối xứng) nên $ADCI$ là hình bình hành (1)

Mà $AC \perp ID$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $ADCI$ là hình thoi.

c) Kẻ qua I đường thẳng IH song song với BK cắt CD tại H

$\Rightarrow IH$ là đường trung bình ΔBKC

$\Rightarrow H$ là trung điểm của CK hay $KH = HC$ (3)

Xét ΔDIH có N là trung điểm của DI, $NK // IH \left(IH // BK\right)$

Do đó K là trung điểm của DH hay $DK = KH$ (4)

Từ $(3),(4) \Rightarrow DK = KH = HC \Rightarrow DK = \frac{1}{3}DC$

Câu 6.

Ta có:

$$\left(\frac{1}{2}a-b\right)^2\ge 0\Rightarrow \frac{1}{4}a^2+b^2\ge ab\quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2}a-c\right)^2\ge 0\Rightarrow \frac{1}{4}a^2+c^2\ge ac\quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{2}a-d\right)^2\ge 0\Rightarrow \frac{1}{4}a^2+d^2\ge ad\quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{2}a-e\right)^2\ge 0\Rightarrow \frac{1}{4}a^2+e^2\ge ae\quad (4)$$

Ta cộng $(1),(2),(3),(4)$ vế theo vế ta được:

$$4.\frac{1}{4}a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge ab+ac+ad+ae$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$$