

TUYỂN CHỌN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 11

TỪ NĂM 2010 – 2018

ĐỀ SỐ 32

(Đề thi HSG lớp 11, TP. Đà Nẵng, năm học 2010 – 2011)

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình lượng giác $\sin^2 3x \cdot \cos 2x + \sin^2 x = 0$.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2-x)(2+y)=8 \\ x\sqrt{4-y^2}+y\sqrt{4-x^2}=4 \end{cases}$$
.

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Cho a, b, c là ba hằng số và (u_n) là dãy số được xác định bởi công thức:

$$u_n = a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} + c\sqrt{n+3} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ khi và chỉ khi $a + b + c = 0$.

2. Các số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số nhân có tổng bằng 2^6 . Tìm các số đó biết rằng: nếu một cấp số cộng có a là số hạng thứ nhất, b là số hạng thứ ba thì c là số hạng thứ chín.

Câu 3. (2,0 điểm)

1. Chứng minh rằng: với mọi số tự nhiên n , số $2^{3^n} + 1$ chia hết cho 3^{n+1} nhưng không chia hết cho 3^{n+2} .

2. Từ tập hợp tất cả các số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số tự nhiên lấy ra được chỉ có một ba chữ số khác nhau.

Câu 4. (3,0 điểm)

1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên cạnh AB lấy điểm M khác A và B . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ACD') .

a) Trình bày cách dựng thiết diện của hình hộp và mặt phẳng (P) .

b) Xác định vị trí của M để thiết diện nói trên có diện tích lớn nhất.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M là trung điểm của SC . Một mặt phẳng (P) chứa AM và lần lượt cắt các cạnh SB, SD tại các điểm B', D' khác S . Chứng

minh rằng:
$$\frac{4}{3} \leq \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \leq \frac{3}{2}.$$

Câu 5. (1,0 điểm)

Khảo sát tính chẵn – lẻ, tính tuần hoàn và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sin(\pi |\sin x|).$$

ĐỀ SỐ 33

(Đề thi HSG lớp 11, Vĩnh Phúc, Hệ không chuyên, năm học 2010 – 2011)

Câu 1. (2,0 điểm)

Giải phương trình: $3 \tan 2x - \frac{3}{\cos 2x} - 2 \frac{1 - \cot x}{1 + \cot x} + 2 \cos 2x = 0$.

Câu 2. (2,5 điểm)

1. Cho khai triển:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2010})^{2011} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{4042110} x^{4042110}.$$

a) Tính tổng $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{4042110}$.

b) Chứng minh đẳng thức sau:

$$C_{2011}^0 a_{2011} - C_{2011}^1 a_{2010} + C_{2011}^2 a_{2009} - C_{2011}^3 a_{2008} + \dots + C_{2011}^{2010} a_1 - C_{2011}^{2011} a_0 = -2011.$$

2. Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có chín chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc tập A . Tính xác suất để chọn được một số thuộc A và số đó chia hết cho 3.

Câu 3. (2,5 điểm)

1. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau $u_1 = 2011$, $u_{n-1} = n^2 (u_{n-1} - u_n)$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

2. Tính giới hạn: $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{3x-2} - 2}{x^2 - 1}$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a .

1. Chứng minh rằng AC' vuông góc với mặt phẳng $(A'BD)$ và đường thẳng AC' đi qua trọng tâm tam giác $A'BD$.

2. Hãy xác định các điểm M , N lần lượt nằm trên các cạnh $A'D$, CD' sao cho MN vuông góc với mặt phẳng $(CB'D')$. Tính độ dài đoạn MN theo a .

ĐỀ SỐ 34

(Đề thi học sinh giỏi lớp 11, Vĩnh Phúc, Hệ chuyên, năm học 2010 – 2011)

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (4 điểm)

1. Giải phương trình: $(\sqrt{3}+1)\cos^2 x + (\sqrt{3}-1)\sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x - \sqrt{3} = 0$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ 2y^2 - 3z^2 = 1 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

Câu 2. (2 điểm)

Giả sử A, B, C, D lần lượt là các số đo các $\angle DAB, \angle ABC, \angle BCD, \angle CDA$ của tứ giác lồi $ABCD$ bất kì.

1. Chứng minh rằng: $\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{A+B+C}{3}$.

2. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = -\sin \frac{A}{3} + \sin B + \sin C + \sin D$.

Câu 3. (1 điểm)

Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập A . Tính xác suất để chọn được một số thuộc A và số đó chia hết cho 9.

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC . Phân giác trong của các góc A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1 . Đường thẳng AA_1 cắt đường thẳng CC_1 tại I ; đường thẳng AA_1 cắt BC tại điểm N ; đường thẳng BB_1 cắt đường thẳng A_1C_1 tại điểm P . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IPC_1 . Đường thẳng OP cắt đường thẳng BC tại điểm M . Biết rằng $BM = MN$ và $\angle BAC = 2\angle ABC$. Tính các góc của tam giác ABC .

Câu 5. (1 điểm)

Cho hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện $f(3x) \geq f\left(\frac{1}{2}f(2x)\right) + 2x, \forall x > 0$. Chứng minh rằng $f(x) \geq x, \forall x > 0$.

ĐỀ SỐ 35

(Đề thi HSG lớp 11, Chuyên Đại Học Vinh, năm học 2010-2011)

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1. Giải phương trình: $\cos^3 x - \sin^3 x = \sqrt{3} \cos 2x (\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x})$.

Bài 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$$
.

Bài 3. Cho dãy
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Tính $[u_{2010}]$. (Kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

Bài 4. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca \leq 3abc$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{c+a}} + 3 \leq \sqrt{2} (\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a})$$
.

Bài 5. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . M nằm trên tia đối của tia BA . Một đường thẳng đi qua M cắt nửa đường tròn (O) tại C và D ($MD < MC$). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOC và BOD cắt nhau tại điểm thứ hai K . Gọi L là giao điểm của AD và BC .

a) Chứng minh rằng tứ giác $AKLB$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $LK \perp OK$.

c) Chứng minh K, L, M thẳng hàng.

Bài 6. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy có hai điểm $A(1;0), B(3;0)$. H là điểm thay đổi trên Oy . AH và BH lần lượt cắt đường tròn đường kính AB ở điểm thứ hai tại D và E . Chứng minh rằng đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định. Xác định tọa độ điểm cố định đó.

ĐỀ SỐ 36

(Đề thi chọn HSG lớp 11, Chuyên Đại Học Vinh, năm học 2011-2012)

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1. Giải phương trình $32x^2 - 6x = \sqrt{1 - 4x^2}$.

Bài 2. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2011$

Với $x_1 \leq 20$, $x_2 \geq 11$, $x_3 > 7$.

Bài 3. Chứng minh trong tam giác ABC ta luôn có

$$2 \sin^3 A + \sin^2 B + \sin^2 C < \frac{25}{8}$$

Bài 4. Cho hai điểm B, C cố định trên đường tròn $(O; R)$, điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Gọi H là trực tâm tam giác ABC .

1. Chứng minh rằng khi $\angle BAC = 60^\circ$ thì $AH = R$.

2. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác HBC .

Bài 5. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I , bán kính r có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, p là nửa chu vi. Gọi R , R_1 , R_2 , R_3 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC , IBC , ICA , IAB . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{R_1^2} + \frac{b}{R_2^2} + \frac{c}{R_3^2} = \frac{p}{r.R}$$

Đề số 37

(Đề thi HSG lớp 11, Vĩnh Phúc, hệ không chuyên, năm học 2011 – 2012)

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (1,5 điểm)

Giải phương trình:
$$\frac{\tan^2 x + \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Câu 2. (3,0 điểm)

1. Gọi A là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A , tính xác suất để số được chọn chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1.

2. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\left(C_{2012}^0\right)^2 - \left(C_{2012}^1\right)^2 + \left(C_{2012}^2\right)^2 - \left(C_{2012}^3\right)^2 + \dots - \left(C_{2012}^{2011}\right)^2 + \left(C_{2012}^{2012}\right)^2 = C_{2012}^{1006}.$$

Câu 3. (2,5 điểm)

1. Chứng minh rằng phương trình $8x^3 - 6x - 1 = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt. Tìm ba nghiệm đó

2. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = \sin 1; u_n = u_{n-1} + \frac{\sin n}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Chứng minh rằng dãy số (u_n) được xác định như trên là một dãy số bị chặn.

Câu 4. (3,0 điểm)

1. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, các cạnh bên bằng nhau và bằng $3a$ ($a > 0$). Hãy xác định điểm O sao cho O cách đều tất cả các đỉnh của hình chóp $S.ABCD$ và tính độ dài SO theo a .

2. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mp(SBC). Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mp(ABC). Chứng minh rằng $SB \perp SC$ biết rằng $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}$

3. Cho tứ diện $ABCD$ thỏa mãn điều kiện $AB = CD, BC = AD, AC = BD$ và một điểm X thay đổi trong không gian. Tìm vị trí điểm X sao cho tổng $XA + XB + XC + XD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đề số 38

(Đề thi HSG lớp 11, Thái Nguyên, năm học 2011 – 2012)

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (4,0 điểm)

Giải phương trình: $\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{\tan x + \cot 2x}} = \sqrt{2} + 2 \sin 2x$.

Câu 2. (4,0 điểm)

Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{9}(u_n + 4 + 4\sqrt{1 + 2u_n}) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tìm công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số.

Câu 3. (4,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC , trên cạnh BC lấy các điểm E, F sao cho $\angle BAE = \angle CAF$, gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc F trên các đường thẳng AB, AC , kéo dài AE cắt đường tròn ngoại tiếp ABC tại D . Chứng minh rằng tứ giác $AMDN$ và tam giác ABC có diện tích bằng nhau.

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; \dots; 18\}$. Có bao nhiêu cách chọn 5 số trong tập A sao cho hiệu hai số bất kì trong 5 số đó không nhỏ hơn 2.

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a+1}{1+b^2} + \frac{b+1}{1+c^2} + \frac{c+1}{1+a^2} \geq 3$

Đề số 39

(Đề thi HSG lớp 11, Duyên hải và Đồng bằng Bắc bộ, năm học 2011 – 2012)

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (4,0 điểm)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-1)(y^2+6)=y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6)=x(y^2+1) \end{cases}$$

Câu 2. (4,0 điểm)

Cho đoạn thẳng AC cố định với trung điểm K . Hai điểm B, D di động luôn đối xứng nhau qua K . Đường phân giác của góc BCD cắt các đường thẳng AB, AD lần lượt tại I, J gọi M là giao điểm thứ hai khác A của các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và AIJ . Chứng minh M luôn chạy trên đường tròn cố định khi B, D thay đổi.

Câu 3. (4,0 điểm)

Cho $P(x)$ và $Q(x)$ là hai đa thức với hệ số nguyên thỏa mãn: $P(x^3)+xQ(x^3)$ chia hết cho x^2+x+1 . Gọi d là ước số chung lớn nhất của hai số $P(2013)+Q(2013)$. Chứng minh rằng d chia hết cho 2012.

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho dãy số $(a_n): a_1 = a_2 = 1; a_{n+1} = \sqrt{6a_n^2 - a_{n-1}^2} + 4 \cdot (-1)^n, \forall n \geq 2$.

Chứng minh rằng:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{a_k a_{k+3}} - \frac{1}{a_k a_{k+2}} \right) = \frac{2}{3}.$$

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho dãy số nguyên dương n lớn hơn 1. Ta xét tất cả các số dương k thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

k có n chữ số

Tất cả các chữ số của k đều lẻ.

Giá trị tuyệt đối của hiệu hai chữ số liên tiếp bất kì của k luôn bằng 2.

Tìm tổng tất cả các số k có tận cùng là 5 khi n chẵn.

Đề số 40

(Đề thi HSG lớp 11, Vĩnh Phúc, Hệ không chuyên, năm học 2012 – 2013)

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (2,0 điểm)

Giải phương trình: $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + (2 + \sqrt{3}) \sin x - \cos x = 1 + \sqrt{3}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Xét khai triển: $(1+x)(1+2x)\dots(1+2013x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2013}x^{2013}$.

Tính $a_2 + \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \dots + 2013^2)$.

b) Chọn ngẫu nhiên một số có 4 chữ số đôi một khác nhau. Tính xác suất số được chọn không nhỏ hơn 2013.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $u_1 = 1, u_2 = 3, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1, n = 1; 2; \dots$

Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n^2}$

b) Tính $m(x-1)(x^3-4x)+x^3-3x+1=0$. (m là tham số). Chứng minh với mọi giá trị thực của m phương trình đã cho có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt.

Câu 4. (2,0 điểm)

a) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh $mp(A'BD)$ song song với $mp(CB'D')$.
Tìm điểm M trên đoạn BD và điểm N trên đoạn CD' sao cho đường thẳng MN vuông góc với $mp(A'BD)$.

b) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AD, BB', C'D'$. Xác định thiết diện cắt bởi $mp(MNP)$ với hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, tính theo a diện tích thiết diện đó.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho các số dương a, b, c là các hằng số thực và $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Tìm tất cả các số a, b, c sao cho $f(2) = 26$ và $|f(x)| \leq 1$ với mọi số thực x sao cho $|x| \leq 1$

Đề số 41

(Đề thi HSG lớp 11, Vĩnh Phúc, Hệ chuyên, năm học 2012 – 2013)

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (2,5 điểm)

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, (x; y; z \in \mathbb{R}) \\ x^3 + y^3 + z^3 = 34 \end{cases}$$

1. Giải hệ phương trình:

2. Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực, nhận giá trị trong tập số thực và thỏa mãn $xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{x}{y}\right)$ với mọi số thực $x, y, x \neq 0$.

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho trước số thực $a \in (0; 1)$. Cho dãy số $(x_n)_{n \geq 1}$, bị chặn và thỏa mãn $x_{n+2} \leq (1-a)x_{n+1} + ax_n$, $\forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số đã cho hội tụ.

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có $AB \neq AC$ nội tiếp trong đường tròn (O) , các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại T , đường thẳng AT cắt lại đường tròn tại X . Gọi Y là điểm đối xứng với X qua O . Các đường thẳng YB, XC cắt nhau tại P , các đường thẳng XB, YC cắt nhau tại Q .

1. Chứng minh rằng P, Q, T thẳng hàng.

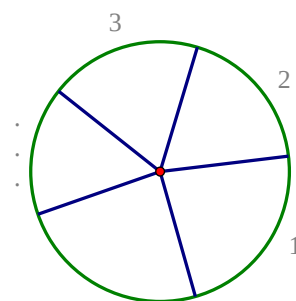
2. Chứng minh rằng các đường thẳng PQ, BC, AY đồng quy.

Câu 4. (2,0 điểm)

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn $\frac{x}{y} + \frac{y}{z+1} + \frac{z}{x} = \frac{5}{2}$

Câu 5. (1,0 điểm)

Một vòng tròn được chia thành k cung, được đánh số từ 1 đến k như hình vẽ. Ban đầu tại mỗi cung đặt một viên bi. Mỗi lần dịch chuyển, người ta dịch chuyển hai viên bi, một viên theo cùng chiều kim đồng hồ, một viên ngược chiều kim đồng hồ, vào cung kề với cung chứa nó (hai viên bi được dịch chuyển không nhất thiết phải từ cùng một cung). Hỏi sau hữu hạn bước như vậy, có đưa được tất cả các viên bi về cùng một cung hay không?



ĐỀ 42

(Đề thi HSG lớp 11, Yên Bái, năm học 2012 – 2013)

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (4,0 điểm)

$$2\sqrt{3\sin 2x} = \frac{3\tan 2x}{2\sqrt{\sin 2x - 1}} - \sqrt{3}$$

Giải phương trình:

Câu 2. (4,0 điểm)

$$\begin{cases} x^2 + 1 + y^2 + xy = 4y \\ x + y - 2 = \frac{y}{x^2 + 1} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình:

Câu 3. (3,0 điểm)

Xác định các hàm số $f(x), g(x)$ biết
$$\begin{cases} f(x+4) + 3g(3x+14) = 2x+1 \\ f\left(\frac{x+3}{3}\right) - g(x+5) = x-1 \end{cases} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Câu 4. (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC .

1. Gọi O, r tương ứng là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Chứng minh rằng:

a) $OA^2 \cdot OB^3 + OB^2 \cdot OC^3 + OC^2 \cdot OA^3 \geq 96r^5$;

b) $OA^{1005} \cdot OB^{1007} + OB^{1005} \cdot OC^{1007} + OC^{1005} \cdot OA^{1007} \geq 3 \cdot (2r)^{2012}$.

2. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho

$$\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB} = k \quad (k > 0)$$

Chứng minh rằng: Tồn tại tam giác mà độ dài các cạnh của tam giác đó lần lượt bằng độ dài các đoạn thẳng AM, NB, CP . Tìm k để tam giác đó có diện tích nhỏ nhất.

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho ba số thực dương: x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$.

Chứng minh: $\frac{x^3}{xy + yz} + \frac{y^3}{xz + yz} + \frac{z^3}{xy + xz} \geq \frac{1}{2}.$

ĐỀ 43

(Đề thi HSG lớp 11, Chuyên Đại Học Vinh, năm học 2012 – 2013)

Thời gian làm bài: 150 phút

- Câu 1.** Giải phương trình: $\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{\cos 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}$.
- Câu 2.** Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Từ tập A lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn lớn hơn 2012 gồm các chữ số đôi một khác nhau sao cho chữ số 1 luôn có mặt?
- Câu 3.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \leq 1$ và $x + \frac{2}{z} \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = y^2 + 2z^2$.
- Câu 4.** Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I và thỏa mãn $\frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2c + a}{\sqrt{4c^2 - a^2}}$.
- a) Chứng minh tam giác ABC là tam giác cân.
- b) Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn (I) . BE cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai là K . Biết $BE = 9\sqrt{2}$ và K là trung điểm của BE . Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC .
- Câu 5.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi M, E, Q lần lượt là trung điểm của AB, AD, CD và N, P lần lượt là trực tâm tam giác AME và tam giác DQE . Chứng minh: tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

ĐỀ 44

(Đề thi HSG lớp 11, Quảng Bình, năm học 2012 – 2013)

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (3,0 điểm)

$$\begin{cases} x + \frac{2}{y} + \frac{x}{y} = 10 \\ x^2 + \frac{1}{y^2} + 2x = 12 \end{cases}$$

- a) Giải hệ phương trình: $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2 \sin 3x$.
- b) Giải phương trình:

Câu 2. (2,5 điểm)

- a) Tính giới hạn dãy số: $\lim (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^6 + 1})$.
- b) Cho dãy số (u_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 = 2013 \\ u_{n+1} = \sqrt[n+1]{u_n^n + \frac{1}{2013^n}} \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

Tìm công thức số hạng tổng quát và giới hạn dãy số (u_n) ?

Câu 3. (2,5 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AB \parallel CD$) và $BC = 2a$, $AB = AD = DC = a$ ($a > 0$). Mặt bên SBC là tam giác đều. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Biết SD vuông góc với AC .

a) Tính SD .

b) Mặt phẳng (α) qua điểm M thuộc đoạn OD (M khác O, D) và song song với hai đường thẳng SD và AC .

Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) . Biết $MD = x$. Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho phương trình: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

a) Với $d = -2013$, chứng minh rằng phương trình có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

b) Với $d = 1$, giả sử phương trình có nghiệm, chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$.

ĐỀ 45

(Đề thi HSG lớp 11, Hà Tĩnh, năm học 2012 – 2013)

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (6,0 điểm)

$$\frac{2\sqrt{3}\sin x(1+\cos x) - 4\cos x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} - 3}{2\sin x - 1} = 0$$

a) Giải phương trình:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3x+1} \cdot \sqrt[4]{3 \cdot 4x+1} \dots \sqrt[2013]{2012 \cdot 2013x-1}}{x}$$

b) Tính giới hạn sau:

Câu 2. (4,5 điểm)

a) Cho khai triển: $(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{10})^{11} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{110}x^{110}$.

Chứng minh đẳng thức sau: $C_{11}^0 a_0 - C_{11}^1 a_1 + C_{11}^2 a_2 - C_{11}^3 a_3 + \dots + C_{11}^{10} a_{10} - C_{11}^{11} a_{11} = 11$.

$$S = -\frac{C_n^1}{2 \cdot 3} + \frac{2C_n^2}{3 \cdot 4} - \frac{3C_n^3}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{(-1)^n n C_n^n}{(n+1)(n+2)}$$

b) Tính tổng:

Câu 3. (5,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC có độ dài các đường cao $BB' = \sqrt{5}$, $CC' = 2$ và $\cos \angle BB'C' = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
Tính diện tích tam giác ABC .

b) Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn $A \leq B \leq C \leq \frac{\pi}{2}$. Tính các góc của tam giác đó khi biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất $P = 2\cos 4C + 4\cos 2C + \cos 2A + \cos 2B$.

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B . Biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$

và góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SAC) bằng α với $\sin \alpha = \sqrt{\frac{13}{19}}$.

Tính độ dài SC theo a .

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho dãy số (a_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} a_1 = \frac{4}{3} \\ (n+2)^2 a_n = n^2 a_{n+1} - (n+1)a_n a_{n+1} \end{cases} \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

Tính $\lim a_n$.

ĐỀ 46

(Đề thi HSG lớp 11, Trại hè Hùng Vương lần 8, năm học 2012 – 2013)

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (6,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt[3]{6\cos x + 2} = 2\cos 3x + 2\cos x - 2$.

b) Giải bất phương trình: $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leq 2 - \frac{x^2}{4}$.

Câu 2. (4,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(f(y + f(x))) = f(x + y) + f(x) + y; \forall x, y$.

Câu 3. (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A và M là điểm di động trên BC (M khác B, C). Hình chiếu của M trên AB, AC theo thứ tự là H và K . Gọi I là giao điểm của BK và CH . Chứng minh rằng đường thẳng MI luôn qua một điểm cố định.

Câu 4. (3,0 điểm)

Giải phương trình $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{12}^4 = 2013$ với $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{12} \in \mathbb{Z}$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Tìm số cách chọn ra 11 số nguyên phân biệt từ 2012 số nguyên dương đầu tiên sao cho trong sự lựa chọn đó không có hai số nguyên liên tiếp.

ĐỀ SỐ 47

(Đề thi HSG lớp 11, Trại hè Hùng Vương lần 9, năm học 2013 – 2014)

Thời gian làm bài 180 phút

Câu 1. (5 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $(u_1 = 2014), u_{n+1} = \frac{u_n^4 + 2013^2}{u_n^3 - u_n + 4026}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Đặt $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k^3 + 2013}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\lim v_n$.

Câu 2. (5 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi D là trung điểm AC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD giao với phân giác góc $\widehat{BAC}$ tại E nằm trong tam giác ABC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE giao với BD tại F (khác B), AF giao với BE tại I . CI giao với BD tại K . Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABK .

Câu 3. (4 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây

1. $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) \leq e^x - 1$ với mỗi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 4. (4 điểm)

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - (x+y)} = \frac{y}{\sqrt[3]{x-y}} & (x, y \in \mathbb{R}) \\ 2(x^2 + y^2) - 3\sqrt{2x-1} = 11 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình sau:

Câu 5. (2 điểm)

Trên bảng ô vuông 3×3 , người ta đặt một số viên sỏi sao cho mỗi ô vuông có không quá một viên sỏi. Với mỗi cách đặt ta cho tương ứng với số điểm bằng tổng số: các hàng, các cột, các đường chéo chứa số lẻ các viên sỏi trên đó. Bảng không có sỏi ứng với 0 điểm.

a) Tồn tại hay không cách đặt sỏi sao cho ô chính giữa bảng không có sỏi và số điểm tương ứng với cách đặt đó là 8.

b) Chứng minh rằng số cách đặt sỏi với số điểm số là một số chẵn bằng số cách đặt sỏi với số điểm số là một số lẻ.

ĐỀ SỐ 48

(Đề thi HSG lớp 11, Khu vực Duyên hải và Đồng bằng Bắc Bộ, năm học 2013 – 2014)

Thời gian làm bài 180 phút

Câu 1. (4 điểm)

$$\begin{cases} 2x - 2y + \sqrt{2x + y + 2xy + 1} = 1 \\ \sqrt[3]{3y + 1} = 8x^3 - 2y - 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình:

Câu 2. (4 điểm)

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_1 = 1; a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 5a_n + 10}{5 - a_n}, \forall n \geq 1.$$

Cho dãy

a) Chứng minh dãy (a_n) hội tụ và tính $\lim a_n$.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} < \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \quad \forall n \geq 1.$$

b) Chứng minh

Câu 3. (4 điểm)

Gọi AD, BE, CF là ba đường phân giác trong của tam giác ABC vuông ở A . Đoạn thẳng AD cắt EF tại K . Đường thẳng qua K song song với BC cắt AB, AC lần lượt ở M, N .

$$MN \geq \frac{2 - \sqrt{2}}{2} (AB + AC).$$

Chứng minh rằng:

Câu 4. (4 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^2 + y^2) = xf(x) + yf(y), \forall x, y \in \mathbb{R} (1)$.

Câu 5. (4 điểm)

Cho 100 số tự nhiên không lớn hơn 100 có tổng bằng 200. Chứng minh rằng từ các số đó có thể chọn được ít nhất một bộ các số có tổng bằng 100.

ĐỀ SỐ 49

(Đề thi HSG lớp 11, Hà Nam, năm học 2013 – 2014)

Thời gian làm bài 180 phút

Câu 1. (5 điểm)

Tính tổng các nghiệm của phương trình sau trên $[0; 1007\pi]$:

$$\frac{8\sin^2 x \cdot \cos x - \sqrt{3} \sin x - \cos x}{\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) - \sqrt{3}\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 0$$

Câu 2. (5 điểm)

1. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $(1 - x - 3x^2)^{2n}$ biết rằng n là số tự nhiên thỏa mãn

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{2014} - 1$$

2. Từ các chữ số $1, 3, 4, 8$ lập các số tự nhiên có sáu chữ số, trong đó chữ số 3 có mặt đúng ba lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần. Trong các số được tạo thành nói trên, chọn ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 4 ?

Câu 3. (5 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 = 2014 \\ u_{n+1} = 1 + u_1 u_2 \dots u_n \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$
. Đặt $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k}$. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Câu 4. (3 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O, R) , $AD = R$. Dụng các hình bình hành $ABMD$, $ACND$. Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác DMN .

Câu 5. (2 điểm)

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Gọi I là tâm của hình vuông $CDD'C'$, K là trung điểm của cạnh CB .

a) Dụng thiết diện của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cắt bởi mặt phẳng (AKI) . Tính diện tích của thiết diện theo a .

b) Tính góc tạo bởi hai đường thẳng $A'D'$ và AQ với Q là giao điểm của (AKI) và CC' .

ĐỀ SỐ 50

(Đề thi HSG lớp 11, Hà Tĩnh, năm học 2013 – 2014)

Thời gian làm bài 180 phút

Câu 1.

a) Giải phương trình:

$$3 \tan 2x - \frac{3}{\cos 2x} - \frac{2 \tan x - 2}{1 + \tan x} + 4 \cos^2 x = 2.$$

b) Tính giới hạn sau:

$$L = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{3x+4} - \sqrt{2x+3}}{x^3 + 2x^2 + x}.$$

Câu 2.

a) Tìm các số nguyên dương n, k biết $n < 20$ và các số $C_n^{k-1}, C_n^k, C_n^{k+1}$ theo thứ tự đó là số hạng thứ nhất, thứ ba, thứ năm của một cấp số cộng.

b) Tam giác ABC có các góc thỏa mãn $\sin^2 B + \sin^2 C + \sin B \sin C \leq \sin^2 A$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \cot A + \cot B + \cot C$.

Câu 3.

Cho tam giác nhọn ABC . Trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm S (khác A). Kẻ đường cao BH của tam giác ABC (H thuộc AC). Gọi (P) là mặt phẳng qua C và vuông góc với SB , giả sử (P) cắt tia đối của tia AS tại M . Đường thẳng MH cắt SC tại N .

a) Chứng minh $MC \perp (SHB)$ và $SC \perp (MBN)$.

b) Biết cạnh $BC = a, \angle ABC = \alpha, \angle ACB = \beta$. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác SMC theo a, α, β khi S di động trên tia Ax .

Câu 4.

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn:
$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 3 \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n^2}{u_{n-1}^2} - 2, n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$$
 Chứng minh:
$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} < \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

ĐỀ SỐ 51

(Đề thi HSG lớp 11, Bắc Giang, năm học 2013 – 2014)

Thời gian làm bài 180 phút

Câu 1. (4 điểm)

- Giải phương trình $(3 - 4\sin^2 x)(3 - 4\sin^2 3x) = 1 - 2\cos 10x$.
- Tìm x để $\sin x, \sin^2 2x, 1 - \sin 7x$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Câu 2. (6 điểm)

- Một đoàn tàu có 4 toa chở khách với mỗi toa có ít nhất 5 chỗ trống. Trên sân ga có 5 hành khách chuẩn bị lên tàu. Tính xác suất để trong 5 hành khách lên tàu đó có một toa có 3 khách lên, hai toa có 1 khách lên và một toa không có khách nào lên tàu.

- Tìm hệ số của số hạng chứa x^{13} trong khai triển $f(x) = \left(\frac{1}{4} + x + x^2\right)^3 (2x+1)^{15}$ thành đa thức.
- Tìm số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện $1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + nP_n = P_{2014}$, với P_n là số các hoán vị của tập hợp có n phần tử.

Câu 3. (2 điểm)

Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2014} - 2014x + 2013}{(x-1)^2}$.

Câu 4. (6 điểm)

- Cho đường tròn (O) và dây cung AB thay đổi sao cho AB luôn đi qua điểm I cố định nằm trong đường tròn (O) (I không trùng với tâm O). Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn $IA + IB = IM$.
- Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a; AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \angle BAD = 60^\circ$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $A'B'$, E là giao điểm của MN và $A'C'$.
 - Tính cosin của góc tạo bởi đường thẳng BE và mặt phẳng $(ACC'A')$.
 - Chứng minh rằng AC' vuông góc với mặt phẳng $(BDMN)$.

Câu 5. (2 điểm)

Cho các số thực dương $a, b (a > b)$ và hai dãy số $\{u_n\}; \{v_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = a; v_1 = b \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}; v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng hai dãy số $\{u_n\}; \{v_n\}$ có giới hạn hữu hạn và $\lim u_n = \lim v_n$.

ĐỀ SỐ 52

(Đề thi chọn ĐTHSG lớp 11, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2013 – 2014)

Thời gian làm bài: 180 phút

Ngày thi thứ nhất

Câu 1.

Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_1 = 1$ và $x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + 2x_n + 2} - \sqrt{x_n^2 - 2x_n + 2}$ với mọi n nguyên dương. Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Câu 2.

Tìm tất cả các nghiệm thực của hệ phương trình sau đây
$$\begin{cases} x + x^2 y = y + 2 \\ (2x + y)^2 + 3y^2 = 12 \end{cases}$$

Câu 3.

Cho tam giác nhọn ABC và các đường cao AD, BE, CF . Các đường tròn đường kính AB, AC theo thứ tự cắt các tia DF, DE ở Q, P . Gọi N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF . Chứng minh rằng

1. $AN \perp PQ$
2. AN, BP, CQ đồng quy.

Câu 4.

Cơ sở dữ liệu tạp chí của thư viện Quốc gia có đúng 2016 loại sách khác nhau. Thư viện này cho phép 2013 thư viện địa phương kết nối để có thể khai thác cơ sở dữ liệu tạp chí của nó. Biết rằng mỗi thư viện địa phương được phép khai thác cơ sở dữ liệu tạp chí của nó. Biết rằng mỗi thư viện địa phương được phép khai thác ít nhất 1008 loại tạp chí khác nhau và hai thư viện địa phương bất kì thì chỉ có tối đa 504 loại tạp chí mà cả hai thư viện địa phương đó cùng được phép khai thác. Chứng minh rằng có không quá một loại tạp chí trong cơ sở dữ liệu của thư viện Quốc gia mà cả 2013 thư viện địa phương đều không thể khai thác được.

Ngày thi thứ hai

Câu 1.

Cho hàm số $f : [0; 2013] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây

1. $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in [0; 2013]$ và $f(2013) = -2013$.
2. $f(x_1) + \dots + f(x_n) \geq f(x_1 + \dots + x_n)$ với mọi số nguyên dương n và với n số thực x_i tùy ý thuộc đoạn $[0; 2013]$ sao cho $x_1 + \dots + x_n \leq 2013$.

Chứng minh rằng $f(x) \geq -2x$ với mọi $x \in [0; 2013]$.

Câu 2.

Với mỗi số nguyên dương k ta đặt $f(k) = 6^k + 9^k + 10^k + 15^k$ số nguyên dương $(m; n)$ được gọi là cặp đôi hạnh phúc nếu $f(m)$ và $f(n)$ cùng chia hết cho mn .

1. Cho hai số nguyên lẻ m, n cùng lớn hơn 1 thỏa mãn $(m; n)$ là một cặp đôi hạnh phúc. Chứng minh rằng $25 \mid mn$ nhưng $125 \nmid mn$.
2. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k để $(k; k)$ là cặp đôi hạnh phúc và nếu phân tích $k = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ thì $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = 1911^{103}$. Ở đây $p_1, \dots, p_r$ là các số nguyên tố đôi một phân biệt $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ là các số nguyên không âm.

Câu 3.

Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) và không phải hình thang. Gọi E, F, G, H lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (AC, BD) , (AB, CD) , (AD, CB) và (OE, FG) . Đường tròn (S) đi qua O, H và cắt (O) tại các điểm M, N . Gọi X, Y theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác FAD, FBC . Chứng minh rằng

1. E, M, N thẳng hàng.
2. $SX = SY$

Câu 4.

Cho hai đường gấp khúc khép kín không tự cắt, mỗi đường có 2013 cạnh. Biết rằng trong các đường chứa các cạnh của hai đường gấp khúc nói trên, không có ba đường nào đồng quy. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra từ mỗi đường gấp khúc một cạnh sao cho các đầu mút của chúng là bốn đỉnh của một tứ giác lồi.

Ghi chú: Một đường gấp khúc khép kín không tự cắt là một dãy các đoạn thẳng liên tiếp (mỗi đoạn được gọi là một cạnh) $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ và A_nA_1 trong đó không có hai đoạn thẳng nào cắt nhau tại điểm khác đầu mút.

ĐỀ SỐ 53

(Đề thi HSG lớp 11, Trại hè Hùng Vương lần 10, năm học 2014-2015)

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (4 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 = 2014 \\ u_{n+1} = u_n^2 + (1 - 2a)u_n + a^2, \forall n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Tìm điều kiện của $a \in \mathbb{R}$ để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Câu 2. (4 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Đường tròn tâm I tiếp xúc với hai cạnh AC, BC lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với đường tròn tâm O tại P . Một đường thẳng song song với AB tiếp xúc với đường tròn tâm I tại Q nằm trong tam giác ABC .

a) Gọi K, L lần lượt là giao điểm thứ hai của PE và PF với (O) . Chứng minh rằng $KL \parallel FE$.

b) Chứng minh rằng $\angle ACP = \angle QCB$.

Câu 3. (4 điểm)

Cho $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức với hệ số thực, có bậc bằng 2014 và có hệ số cao nhất bằng 1.

Chứng minh rằng nếu phương trình $P(x) = Q(x)$ không có nghiệm thực thì phương trình sau có nghiệm thực $P(x + 2013) = Q(x - 2013)$.

Câu 4. (4 điểm)

Trong mặt phẳng cho $2n+1 (n \in \mathbb{N}^+)$ đường thẳng phân biệt sao cho không có hai đường nào song song hoặc vuông góc và không có ba đường nào đồng quy. Chúng cắt nhau tạo thành các tam giác.

Chứng minh số các tam giác nhọn tạo thành không vượt quá $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Câu 5. (4 điểm)

Tìm tất cả các bộ ba số (x, y, z) nguyên dương thỏa mãn: $1 + 4^x + 4^y = z^2$.

ĐỀ SỐ 54

(Đề thi Olympic Truyền thống 30/4 lần 20, lớp 11, năm học 2014 – 2015)

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (4 điểm)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 125y^5 - 125y^3 + 6\sqrt{15} = 0 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 2. (4 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{(-1)^n}{n+1}, n \geq 1 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng
$$u_{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}, n \geq 1.$$

b) Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

Câu 3. (3 điểm)

Hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ ($R_1 > R_2$) cắt nhau tại điểm M và M' . Một tiếp tuyến chung T_1T_2 của hai đường tròn cắt đường thẳng O_1O_2 tại P (T_1 thuộc (O_1) , T_2 thuộc (O_2)). Đường thẳng PM cắt (O_1) và (O_2) lần lượt tại M_1 và M_2 khác M . Đường thẳng PM' cắt (O_1) và (O_2) lần lượt tại M'_1 và M'_2 khác M' . Gọi A, B, C, D lần lượt là trung điểm của $MM_1, MM_2, M'_1M'_2, M'_1M'_2$. Chứng minh rằng A, B, C, D nằm trên một đường tròn và đường tròn này tiếp xúc với T_1T_2 .

Câu 4. (3 điểm)

Xác định các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn $P(x) \cdot P(x^2) = P(x^3 + 3x), \forall x \in \mathbb{R}.$

Câu 5. (3 điểm)

Cho hai số tự nhiên m và n sao cho $m > n \geq 1$. Biết rằng hai chữ số tận cùng của 2014^m bằng với hai chữ số tận cùng của 2014^n theo cùng thứ tự. Tìm các số m và n sao cho tổng $m+n$ có giá trị nhỏ nhất.

Câu 6. (3 điểm)

Cho đa giác đều 9 đỉnh $A_1A_2 \dots A_9$. Mỗi đỉnh của đa giác hoặc có màu đỏ hoặc có màu xanh. Chứng minh rằng tồn tại hai tam giác phân biệt bằng nhau có tất cả các đỉnh là các đỉnh của đa giác và cùng màu.

ĐỀ SỐ 55

(Đề thi chọn HSG lớp 11, Chuyên Đại Học Vinh, năm học 2014 - 2015)

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. (2,0 điểm) Giải phương trình $2\sin^2 \frac{x}{2} + \frac{\sin 3x}{\cos 2x} = (\sin x + 2\cos x)\tan 2x$

Câu 2. (1,5 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1; u_{n+1} = u_n + \frac{1 + \sin n}{n^2}, \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng (u_n) là dãy số tăng và bị chặn.

Câu 3. (1,5 điểm) Gọi M là tập hợp các số tự nhiên gồm 4 chữ số (các chữ số không cần phân biệt). An và Bình độc lập mỗi người chọn ngẫu nhiên một số từ tập M và viết lên bảng. Tính xác suất để trên bảng có đúng một số chia hết cho 7 và có chữ số hàng đơn vị là 1.

Câu 4. (1,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x + yz} + \frac{y}{y + zx} + \frac{z}{z + xy} \leq \frac{9}{4}$$

Câu 5. (2,0 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = BC = CD = a$ không đối. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$.

Câu 6. (2,0 điểm) Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $AB + CD, AC + BD, AD + BC$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác thì tam giác đó có các góc đều nhọn.

ĐỀ SỐ 56

(Đề thi HSG lớp 11, Cụm Hoàn Kiếm - Hai Bà Trưng - Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. (5 điểm)

a) Giải phương trình: $\sin 2x + \sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2$

b) Giải phương trình: $\frac{-2\cos^2 x - 3\sin x + 3}{\tan x - 1} = 0$

c) Cho tam giác ABC thỏa mãn $\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} = 1$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

Câu 2. (3 điểm)

a) Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $C_n^1 + A_n^2 + C_n^3 = 7n$.

b) Cho $x \neq 0$. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{45}$.

c) Có bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số, mỗi chữ số thuộc tập hợp $\{1; 2; 3; 4\}$ trong đó chữ số 4 có mặt đúng 4 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng 1 lần.

Câu 3. (4 điểm)

a) Tìm các số thực dương x, y biết rằng $x, y, x+4$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và $x+1, y+1, 2y+2$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

b) Cho dãy số dương (u_n) thỏa mãn $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{2u_n^2 + 3u_n + 2}{3u_n + 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm giới hạn của dãy số.

Câu 4. (2 điểm)

Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{49x^2 + x} - \sqrt{16x^2 + x} - \sqrt{9x^2 + x})$

Câu 5. (3 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc các đoạn thẳng SA, SB, SC, SD sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}, \frac{SN}{SB} = \frac{1}{4}, \frac{SQ}{SC} = \frac{1}{5}, \frac{SP}{SD} = \frac{1}{6}$. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Câu 6. (3 điểm)

Trong mặt phẳng (P) cho hai điểm cố định A, B và đường tròn (C) đường kính AB . S là điểm cố định trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A , S khác A . Điểm M chuyển động trên đường tròn (C) , M không trùng với A, B gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với SB , (Q) cắt SB, SM lần lượt tại H và K .

a) Chứng minh rằng tam giác AHK là tam giác vuông.

b) Cho $SA = AB = a, \angle ABM = \varphi$. Tính theo a, φ diện tích tam giác AHK . Xác định $\tan \varphi$ để diện tích tam giác AHK lớn nhất.

ĐỀ SỐ 57

(Đề thi HSG lớp 11, Quảng Bình, vòng 1, năm học 2014 - 2015)

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Giải phương trình: $8\sin^2 x \cos x - \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + \frac{1}{x} + y + \frac{2}{y} = 6 \\ (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^2 = 8 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho dãy số:
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^{2015} + u_n + 1}{u_n^{2014} - u_n + 3} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

a) Chứng minh $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và (u_n) là dãy số tăng.

b) Tìm $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i^{2014} + 2}$.

Câu 3. (2,5 điểm)

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và tất cả các cạnh của hình chóp có độ dài bằng $\sqrt{2}$. M là một điểm trên đoạn AO và $AM = x (0 < x < 1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và song song với AD và SO .

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) . Chứng minh thiết diện là hình thang cân

b) Tính diện tích thiết diện theo x .

Câu 4. (1,5 điểm)

Có bao nhiêu cách sắp xếp 6 chữ cái từ bộ chữ cái MAYMAN thành một hàng sao cho mỗi cách sắp xếp hai chữ cái giống nhau không đứng cạnh nhau.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{4a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{b}{\sqrt{4b^2 + c^2 + a^2}} + \frac{c}{\sqrt{4c^2 + a^2 + b^2}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

ĐỀ SỐ 58

(Đề thi HSG lớp 11, Quảng Bình, vòng 2, năm học 2014 - 2015)

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (2,0 điểm)

Tìm các giới hạn

a) $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 4 + \dots + 2^n}{1 + 5 + 25 + \dots + 5^n}.$

b) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2014x} \cdot \sqrt[3]{1 + 2015x} - 1}{x}.$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm với mọi giá trị của tham số m :

$$2014x^{2015} - x^3 + mx^2 + 1 = m.$$

b) Giải phương trình: $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x(1 + 2\sqrt{1 - x^2})$.

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho dãy số:
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2n}{n+1}u_n - \frac{1}{n-1} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

a) Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

b) Tìm n để nu_n là số chính phương.

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B . Tiếp tuyến chung gần B của hai đường tròn lần lượt tiếp xúc với (O) và (O') tại C và D . Qua A kẻ đường thẳng song song CD cắt (O) và (O') lần lượt tại M, N . Các đường thẳng BC, BD lần lượt cắt MN tại P và Q . Các đường thẳng CM, DN cắt nhau tại E . Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng AE và CD vuông góc với nhau,

b) Tam giác EPQ cân.

Câu 5. (1,5 điểm)

Mỗi số nguyên từ 1 đến n ($n \geq 3$) được tô bởi hai màu: xanh hoặc đỏ. Tìm số nguyên n nhỏ nhất để với mọi cách tô màu, đều tồn tại ba số cùng màu lập thành cấp số cộng.

ĐỀ SỐ 59

(Đề thi HSG lớp 11, Nghệ An, Bảng A, năm học 2014 - 2015)

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. (6 điểm)

a) Giải phương trình: $2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} \right) = 3 - 4 \cos x$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 2x^2 + y^2 + 3 = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 1 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
.

Câu 2. (6 điểm)

a) Cho số nguyên dương n thỏa mãn $\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + \frac{1}{A_4^2} + \dots + \frac{1}{A_n^2} = \frac{2014}{2015}$. Tìm số hạng chứa x^{1015} trong khai triển nhị thức Niu-tơn $(2x^2 - x)^{n-1}$.

b) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2, u_{n+1} = \frac{1}{9}(u_n + 2\sqrt{4u_n + 1} + 2), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm công thức số hạng tổng quát u_n theo n .

Câu 3. (4 điểm)

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ và O là tâm của đáy. Mặt phẳng (P) thay đổi chứa SO và cắt các đoạn thẳng AB, AC lần lượt tại các điểm M, N (M và N khác A).

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{3}{a}$

b) Tính độ dài các đoạn thẳng AM, AN theo a để góc tạo bởi đường thẳng SA và mặt phẳng (P) có số đo lớn nhất.

Câu 4. (4 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là $I(1;0)$. Đường thẳng vuông góc với AI tại I cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm M, N sao cho $BM.CN = 50$. Viết phương trình đường thẳng AC biết rằng $P(3;11)$ thuộc đường thẳng AB ; M thuộc đường thẳng $x + y + 7 = 0$ và M có hoành độ âm.

Câu 5. (2 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $3xyz \geq x + y + z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{xy + yz + zx - 1}{\sqrt{3x^2 + 1} + \sqrt{3y^2 + 1} + \sqrt{3z^2 + 1}}.$$

ĐỀ SỐ 60

(Đề thi HSG lớp 11, Nghệ An, Bảng B, năm học 2014 - 2015)

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1 (6 điểm)

- a) Giải phương trình: $\sin^2 x + \cos x \cdot \cos 3x + \sin 2x \cdot \cos 2x = 0$.
- b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 2x^2 + y^2 + 3 = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 1 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 2 (6 điểm)

- a) Cho số nguyên dương n thỏa mãn $C_n^1 + C_n^2 = \frac{4}{5} C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^6 trong khai triển nhị thức Niu-tơn $(x+1)^n$.
- b) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3, u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm công thức số hạng tổng quát u_n theo n .

Câu 3. (4 điểm)

- Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ và O là tâm của đáy. Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi chứa SO và song song với BC . Mặt phẳng (P) cắt AB, AC theo thứ tự tại các điểm M, N .
- a) Chứng minh rằng đường thẳng AO vuông góc với mặt phẳng (P) .
- b) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (P) .

Câu 4. (4 điểm)

- Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác nhọn ABC có $B(-1; -2)$ và $C(6; -1)$ nội tiếp đường tròn tâm $I(2; 2)$. Gọi M là trung điểm AC , H là hình chiếu vuông góc của M lên AB . Tìm tọa độ của A biết rằng H thuộc đường thẳng $5x - y - 1 = 0$ và H có hoành độ dương.

Câu 5. (2 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ca}{b(b+c)} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}$$

ĐỀ SỐ 61

(Đề thi chọn ĐTHSG lớp 11, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Thời gian làm bài: 180 phút

Ngày thi thứ nhất

Câu 1. Cho dãy số $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn $x_1 = 1$ và $x_{n+1} = 5(\sqrt{x_n + 11} - \sqrt{x_n + 4})$ với mọi n nguyên dương.

Chứng minh rằng dãy số $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn ấy.

Câu 2. Xét M là tập tất cả các đa thức $p(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0$, trong đó n là số nguyên dương và a_k là số thực thuộc đoạn $[100; 101]$ với mọi $k = 0, 1, \dots, 2n$.

1. Chứng minh rằng tồn tại đa thức $p(x)$ thuộc M có bậc bằng 200 và có nghiệm thực.
2. Tìm số nguyên dương n bé nhất thỏa mãn tính chất: tồn tại một đa thức $p(x)$ thuộc M có bậc bằng $2n$ và có nghiệm thực.

Câu 3. Cho tam giác ABC . Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC ở D . M là một điểm thay đổi trên cạnh BC khác B, C . (I_1) , (I_2) theo thứ tự là đường tròn nội tiếp các tam giác ABM và ACM . PQ là tiếp tuyến chung ngoài khác BC của (I_1) , (I_2) (với $P \in (I_1)$ và $Q \in (I_2)$). S là giao điểm BP và CQ . Chứng minh rằng

1. Bốn điểm M , I_1 , I_2 , D cùng nằm trên một đường tròn.
2. S luôn chạy trên một đường tròn cố định.

Câu 4. Một bộ ba số nguyên $(x; y; z)$ được gọi là một bộ ba *Pythagore* nếu như $x^2 + y^2 = z^2$. Tìm số k nhỏ nhất sao cho trong mỗi tập con gồm k phần tử của tập $S = \{1; 2; \dots; 25\}$, luôn có ba phần tử tạo thành một bộ ba *Pythagore*.

Ngày thi thứ hai

Câu 1. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B phân biệt, cố định không thuộc đường tròn. Đường thẳng Δ thay đổi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt M, N . Gọi P, Q là các giao điểm thứ hai của BM, BN với (O) . Các đường thẳng PQ và AB cắt nhau tại C . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MCP chạy trên một đường thẳng cố định.

Câu 2. Cho dãy số $(x_n), n \geq 0$ xác định bởi $x_0 = 0$ và $x_{n+1} = \frac{7x_n + 3\sqrt{4 + 5x_n^2}}{2}$ với mọi số nguyên không âm n .

1. Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy $(x_n), n \geq 0$ là số tự nhiên và x_{2014} chia hết cho x_{19} .
2. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương a sao cho với mọi số nguyên dương n , trong biểu diễn nhị phân của số x_{an} có ít nhất 46^{2014} chữ số 1.

Câu 3. Cho x, y, z là các số thực không âm và đôi một phân biệt. Chứng minh rằng :

$$\frac{x+y}{(x-y)^2} + \frac{y+z}{(y-z)^2} + \frac{z+x}{(z-x)^2} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

Câu 4. Có một người sử dụng bản đồ trên điện thoại di động để đi từ một điểm A đến một điểm B . Anh ta đã đi đến được điểm B sau một số lần cứ đi một đoạn thẳng lại phải chỉnh lại hướng bằng cách quay một góc nhọn theo chiều kim đồng hồ. Biết rằng tổng các góc phải điều chỉnh này bằng

$$\alpha < 180^\circ, \quad \frac{AB}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

. Chứng minh rằng độ dài đoạn đường anh ta đi không vượt quá

ĐỀ SỐ 62**(Đề thi HSG lớp 11, Duyên hải và Đồng bằng Bắc Bộ lần VIII , năm học 2014 - 2015)**

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1 (4 điểm)

$$\begin{cases} x^6 + 2x^3 - 10y^2 = \sqrt{xy - x^2y^2} \\ 4x^3(2y+1) - 28y^2 + 3 = 2\sqrt{x^2 + 4(y^2 + 1)} - 4xy \end{cases}$$

Giải hệ phương trình

Câu 2 (4 điểm)

Cho dãy số $u_1 = 2$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{u_n + 1} \quad \forall n \geq 1$. Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$.

Câu 3 (4 điểm)

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A, B . AX, AY lần lượt là các đường kính của (O_1) và (O_2) . Gọi O là trung điểm của XY , I là điểm thuộc đường phân giác của góc XAY sao cho OI không vuông góc với XY và I không thuộc hai đường tròn. Đường thẳng đi qua A vuông góc với AI lần lượt cắt các đường tròn $(O_1), (O_2)$ tại các điểm E, F khác A . IX cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai K , IY cắt đường tròn (O_2) tại điểm thứ hai L .

1. Gọi C là giao điểm của EF với IX . Chứng minh rằng OE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEK .

2. Chứng minh ba đường thẳng EK, FL, OI đồng quy.

Câu 4 (4 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(x + xy + f(y)\right) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right) \left(f(y) + \frac{1}{2}\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 5 (4 điểm)

Một bảng ô vuông kích thước 3×3 được gọi là bảng “ 2015 - hoàn thiện” nếu tất cả các ô của nó được điền bởi các số nguyên không âm (không nhất thiết phân biệt) sao cho tổng các ô trên mỗi hàng và mỗi cột đều bằng 2015 .

Hỏi có tất cả bao nhiêu bảng “ 2015 - hoàn thiện” sao cho số nhỏ nhất trong các số ở các ô trên đường chéo chính nằm ở vị trí tâm của bảng?

(Đường chéo chính của bảng vuông là đường nối ô vuông ở góc trên cùng bên trái với ô vuông ở góc dưới cùng bên phải).

Đề số 63

(Đề thi chọn học chọn ĐTHSG lớp 11, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội, năm học 2015-2016)

Thời gian làm bài: 180 phút

Ngày thi thứ nhất.

- Câu 1.** Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ và $u_{n+2} = \sqrt[3]{u_{n+1}^2 + 6u_n}$ với mọi số nguyên dương n . Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Hãy tìm giới hạn đó.
- Câu 2.** Cho ba số không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng :
$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-c^2} \geq 2 + (\sqrt{6} - 2)(ab + bc + ca).$$
- Câu 3.** Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O) . Một đường thẳng d thay đổi, vuông góc với AO , cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại N, P ($N \neq P$) và cắt đường thẳng BC tại S , CN cắt BP tại T và AT cắt BC tại M . Đường thẳng SA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai L . Đường thẳng đi qua M , song song với d , cắt AB, AC lần lượt tại X và Y . Chứng minh rằng:
a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác SXY luôn đi qua một điểm cố định.
b) Đường thẳng TL luôn đi qua một điểm cố định.
- Câu 4.** Trong một ô của một bảng hình chữ nhật kẻ ô vuông có kích thước 1×2015 , người ta đặt một đồng xu. Các đồng xu này có hai mặt: một mặt màu đỏ và một mặt màu đen. Giả sử ban đầu số các đồng xu có mặt đỏ ngửa lên là một số lẻ. Mỗi lần ta bỏ đi một đồng xu tùy ý mà có mặt đỏ ngửa lên, đồng thời lật ngược lại các đồng xu ở các ô lân cận của đồng xu vừa bỏ đi. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn lần thực hiện cách bỏ xu như trên, ta có thể bỏ đi tất cả các đồng xu trong bảng. (Hai ô được gọi là lân cận của nhau nếu chúng có chung một cạnh).

Ngày thi thứ hai

- Câu 1.** Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ thỏa mãn $2f(x+y) + f(xy) = 2x + 2y + xy$ với $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$. Ở đây kí hiệu $\mathbb{R}_+$ là tập tất cả các số thực dương.
- Câu 2.** Kí hiệu S là tập tất cả các số nguyên dương m mà chỉ có ước nguyên tố có dạng $4k+1$ với k là số nguyên.
- a) Chứng minh rằng với mỗi số $m \in S$, tồn tại số nguyên a sao cho $a^2 \equiv -1 \pmod{m}$.
- b) Một số n nguyên dương được gọi là tốt nếu: với mỗi số $m \in S$, đều tồn tại các số nguyên dương x, y thỏa mãn $(x, m) = (y, m) = 1$ và $x^n + 65y^n + 1 \equiv 0 \pmod{m}$. Hãy xác định số nguyên dương bé nhất mà không phải là tốt.
- Câu 3.** Cho tam giác ABC không cân, có đường tròn nội tiếp tâm I tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại D, E, F . Đường thẳng qua D vuông góc với AD theo thứ tự cắt IB, IC tại M, N , FM, EN cắt nhau tại K . CMR:
- a) $\Delta AFM = \Delta AEN$.
- b) $\angle KIA = \angle IDA$.
- Câu 4.** Trên bảng ta ghi 2015 số nguyên dương đầu tiên. Ta thực hiện thao tác xóa và ghi số như sau: Mỗi bước xóa hai số x, y trên bảng mà $x - y \geq 2$ đồng thời ghi thêm hai số $x-1, y+1$. Hỏi ta có thể thực hiện được tối đa bao nhiêu bước như trên.

ĐỀ SỐ 64

(Đề thi HSG lớp 11, trại hè Hùng Vương, lần 11, năm học 2015-2016)

Thời gian làm bài: 180 phút

Ngày thi 01/08/2015

Câu 1. (4 điểm)

Cho dãy số thực (u_n) được xác định bởi: $u_1 = \frac{3}{2}$ và $u_{n+1} = \sqrt{u_n^3 + 3u_n^2 - 9u_n + \frac{9n+10}{n+1}} - 1$ với mọi $n \geq 1$

- a) Chứng minh rằng: (u_n) là dãy bị chặn dưới.
b) Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Hãy tìm giới hạn đó.

Câu 2. (4 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao BE, CF cắt nhau tại $H (E \in AC, F \in AB)$. Đường thẳng EF cắt BC tại G . Lấy điểm T trên (O) sao cho $\angle ATH = 90^\circ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GTO cắt EF tại $K (K \neq G)$. Chứng minh rằng:

- a) Ba điểm G, T, A thẳng hàng.
b) Đường thẳng OK vuông góc với đường thẳng AT

Câu 3. (4 điểm)

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực, thỏa mãn điều kiện:

$$P(x).P(x+2015) = P(P(x)+2015x) \text{ với mọi số thực } x.$$

Câu 4. (4 điểm)

Cho $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ và $x_{n+3} = x_{n+2} \cdot x_{n+1} + x_n$ với mọi số nguyên dương n . Chứng minh rằng với bất kì số nguyên dương m , tồn tại số nguyên dương k sao cho x_k chia hết cho m .

Câu 5. (4 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn:
 $11^n = xy(x^2 + 1) + (x^2 + y^2)z$.

ĐỀ SỐ 65

Đề thi chọn đội tuyển dự thi HSG Quốc gia THPT năm học 2015-2016 –

Trường Đại học Vinh - Môn Toán

Thời gian làm bài : 180 phút

Ngày thi thứ nhất: 28/09/2015

Bài 1. (5 điểm)

Cho số $a > 0$ và dãy (x_n) xác định bởi: $x_1 = x_2 = a, x_{n+1} = x_n + \frac{2\sqrt{x_{n-1}}}{n^3}, n = 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng: $x_n < 2(a+3)$ với $n = 1, 2, 3, \dots$

Bài 2. (5 điểm)

Tìm tất cả các hàm $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ sao cho các bất đẳng thức

$$(i) f(x+y) \geq f(x) + 2y$$

$$(ii) f(f(x)) \leq 4x,$$

Đúng với mọi số thực dương x, y

Bài 3. (5 điểm)

Cho tam giác ABC và điểm X nằm trong tam giác đó. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của X lên các cạnh BC, BA và A', C' lần lượt là điểm đối xứng của X qua BC, BA .

a) Gọi $E = BC \cap XK, F = AB \cap XH$. Chứng minh rằng các điểm A', B, C', E, F cùng thuộc một đường tròn

b) Gọi Y là giao điểm thứ hai của đường tròn $(A'BC')$ với đường tròn đường kính BX . Chứng minh rằng $\frac{KX}{KY} = \frac{HX}{HY}$.

Bài 4. (5 điểm)

Trong một lớp học có n học sinh chơi trò tô màu trên một bảng vuông $n \times n$ ô như sau:

- Trong phút đầu tiên, n học sinh tô màu n ô không cùng hàng hoặc cùng cột;
- Trong mỗi phút tiếp theo, mỗi học sinh tô một ô có cạnh chung với ô mà học sinh đó tô ở phút liền trước;
- Mỗi ô chỉ được tô đúng một lần

Hỏi sau n phút bảng ô vuông có thể được tô kín hay không trong các trường hợp:

a) $n = 30$?

b) $n = 31$?

Ngày thi thứ hai: 29/09/2015

Bài 5. (7 điểm).

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a+b+1}{a^2+b^2+1} + \frac{b+c+1}{b^2+c^2+1} + \frac{c+a+1}{c^2+a^2+1}$$

Bài 6. (6 điểm).

Cho tứ giác $ABCD$ là tứ giác vừa nội tiếp vừa ngoại tiếp đường tròn. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác. Đường thẳng qua I , song song với AB cắt AD và BC tại H và K . Chứng minh rằng độ dài HK bằng một phần tư chu vi tứ giác $ABCD$.

Bài 7. (7 điểm)

Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên n sao cho p^n có chứa 2015 chữ số bằng nhau liên tiếp.

Đề số 66

(Đề thi HSG lớp 11, khu vực Duyên Hải và đồng bằng bắc bộ lần thứ IX năm 2015-2016)

Thời gian làm bài: 180 phút

Ngày thi: 23/04/2016

Câu 1: (4 điểm)

Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n) biết:

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = 673, u_{n+2} = \frac{2(n+2)^2 u_{n+1} - (n^3 + 4n^2 + 5n + 2)u_n}{n+3}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Câu 2: (4 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại S . Gọi d là đường thẳng chứa phân giác trong góc A của tam giác ABC . Các đường trung trực của các đoạn thẳng AB, AC cắt d lần lượt tại M và N . Gọi P là giao điểm của BM và CN , I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP , H là trực tâm của tam giác OMN .

a) Chứng minh H, I đối xứng với nhau qua d .

b) Chứng minh A, I, S thẳng hàng.

Câu 3: (4 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Câu 4: (4 điểm)

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) với x, y nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình: $2(x^3 - x) = y^3 - y$.

Câu 5: (4 điểm)

Cho n là số nguyên dương chẵn lớn hơn hoặc bằng 4. Ta tô màu mỗi số trong các số nguyên dương từ 1 đến n sao cho $\frac{n}{2}$ số trong chúng được tô màu xanh và $\frac{n}{2}$ số còn lại được tô màu đỏ. Với mỗi cách tô như vậy, kí hiệu f_n là số các số nguyên dương bất kì mà nó có thể viết được dưới dạng tổng hai số khác màu

a) Tìm tất cả các giá trị của f_4 .

b) Khi $n \geq 8$, chứng minh rằng $f_n < 2n - 3$. Hãy chỉ ra một cách tô màu thỏa mãn: $f_n = 2n - 5$.

B-ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

ĐỀ SỐ 32

Câu 1:

1. Có: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = (3 - 4\sin^2 x)\sin x = (1 + 2\cos 2x)\sin x$

Nên phương trình $\Leftrightarrow [(1 + 2\cos 2x)^2 \cos 2x + 1]\sin^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow (4\cos^3 2x + 4\cos^2 2x + \cos 2x + 1)\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos 2x)(1 + 4\cos^2 2x)\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$$

2. Điều kiện: $x, y \in [-2, 2]$. Đặt: $\begin{cases} x = 2\cos 2u \\ y = 2\cos 2v \end{cases}$ với $u, v \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Hệ phương trình: $\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \cos 2u)(1 + \cos 2v) = 2 \\ \cos 2u \cdot \sin 2v + \cos 2v \cdot \sin 2u = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 u \cdot \cos^2 v = \frac{1}{2} \\ \sin 2(u+v) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u \cdot \cos v = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ u+v = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(u+v) - \sin(u-v) = \sqrt{2} \\ u+v = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(u-v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ u+v = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v = \frac{\pi}{4} \\ u+v = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{\pi}{4} \\ v = 0 \end{cases} \quad \text{Thỏa mãn}$$

Vậy nghiệm hệ phương trình là: $\begin{cases} x = 2\cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ y = 2\cos 0 = 2 \end{cases}$.

Câu 2.

1. Đặt: $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n+1}} = a + b\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} + c\sqrt{\frac{n+3}{n+1}} \Rightarrow v_n \rightarrow a + b + c$ khi $n \rightarrow +\infty$

Ta có: $u_n = v_n \sqrt{n+1}$.

Cho nên: Nếu $a + b + c \neq 0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n (= \infty) \neq 0$.

Ngược lại: Nếu: $a + b + c = 0 \Rightarrow a = -b - c$ thì khi $n \rightarrow +\infty$, ta có:

$$u_n = b(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) + c(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) = \frac{b}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} + \frac{c}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}} \rightarrow 0$$

2. Gọi $u_1 = a, u_2 = b, u_3 = c$ là ba số theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có công bội q , (v_n) là cấp số cộng có công sai d với $v_1 = a, v_3 = b, v_9 = c$.

$$\begin{cases} u_1 = v_1 = a \\ u_2 = v_3 = b \\ u_3 = v_9 = c \\ u_1 + u_2 + u_3 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 = a \\ aq = a + 2d \quad (1) \\ aq^2 = a + 8d \quad (2) \\ 3a + 10d = 26 \quad (3) \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$\text{Để thấy } q = 1 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{26}{3}.$$

$$\text{Nếu } q \neq 1 \text{ (} ad \neq 0 \text{)} \text{ thì hệ trên trở thành } \begin{cases} a = \frac{2d}{q-1} \\ q^2 - 4q + 3 = 0 \\ 3a + 10d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 3 \\ a = d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2, b = 6, c = 18.$$

Câu 3:

$$1. \text{ Đặt } A_n = 2^{3^n} + 1.$$

Với $n = 0$ thì $A_0 = 2^1 + 1 = 3$ chia hết cho 3^1 mà không chia hết cho 3^2 .

Giả sử $A_k = 2^{3^k} + 1$ chia hết cho 3^{k+1} mà không chia hết cho 3^{k+2} ($A_k = B \cdot 3^{k+1}$; với B nguyên, không chia hết cho 3). Ta có:

$$A_{k+1} = 2^{3^{k+1}} + 1 = (2^{3^k} + 1) \left((2^{3^k})^2 - 2^{3^k} + 1 \right)$$

$$A_{k+1} = A_k (A_k^2 - 3 \cdot 2^{3^k}) = B \cdot 3^{k+1} \left[(B \cdot 3^{k+1})^2 - 3 \cdot 2^{3^k} \right] = 3^{k+2} \left[B^3 \cdot 3^{2k+1} - B \cdot 2^{3^k} \right].$$

Dễ thấy $B^3 \cdot 3^{2k+1}$ chia hết cho 3 mà $B \cdot 2^{3^k}$ không chia hết cho 3 (vì B không chia hết cho 3) nên $B^2 \cdot 3^{2k+1} - 2^{3^k}$ không chia hết cho 3 .

Suy ra A_{k+1} chia hết cho 3^{k+2} , nhưng không chia hết cho 3^{k+3} .

2. Ta có: $|\Omega| = 9^5 = 59049$.

Gọi A là biến cố cần tìm xác suất, ta có:

Số cách chọn 3 chữ số phân biệt a, b, c từ 9 chữ số thập phân khác 0 là C_9^3 . Chọn hai chữ số còn lại từ 3 chữ số đó, có hai trường hợp rời nhau sau đây:

Trường hợp 1: Cả 2 chữ số còn lại cùng bằng 1 trong 3 chữ số a, b, c : có 3 cách; mỗi hoán vị từ $5!$ hoán vị của 5 chữ số (chẳng hạn) a, a, a, b, c tạo ra từ một số tự nhiên n ; nhưng cứ $3!$ hoán vị của các vị trí mà a, a, a chiếm chỗ thì chỉ tạo ra cùng một số n , nên trong trường hợp 1 này có cả $3 \cdot \frac{5!}{3!} = 60$ số tự nhiên.

Trường hợp 2: 1 trong 2 chữ số còn lại bằng 1 trong 3 chữ số a, b, c và chữ số kia bằng 1 chữ số khác trong ba chữ số đó: có 3 cách; mỗi hoán vị từ $5!$ hoán vị của 5 chữ số (chẳng hạn) a, a, b, b, c tạo ra một số tự nhiên n ; nhưng cứ $2!$ hoán vị của các vị trí mà a, a chiếm chỗ và $2!$ hoán vị của các vị trí mà b, b chiếm chỗ thì chỉ tạo ra cùng một số tự nhiên n , nên trong trường hợp 2 có cả $3 \cdot \frac{5!}{2!2!} = 90$ số tự nhiên.

Vậy $|\Omega_A| = (60 + 90)C_9^3 = 150 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 = 12600$.

Kết luận $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{12600}{59049} = 0,213382106$.

Câu 4:

1.

a) Trong mp $(ABCD)$, qua M vẽ đường thẳng song song với AC cắt BD , BC lần lượt tại E, N .

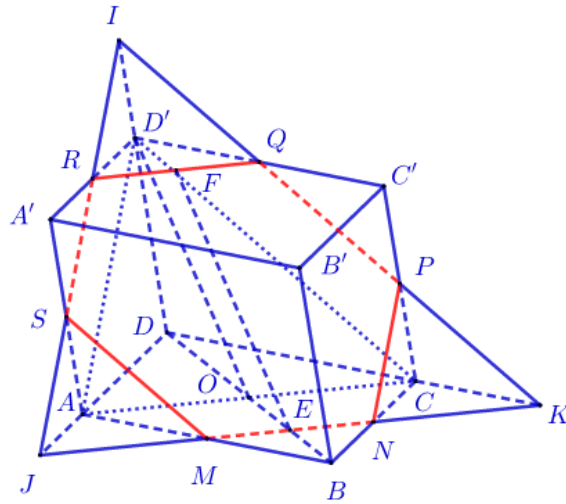
Trong mặt phẳng $(BDD'B')$ qua E vẽ đường thẳng song song với $D'O$ ($O = AC \cap BD$) cắt $B'D'$ tại F .

Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ qua F vẽ đường thẳng song song với AC cắt $A'D'$, $D'C'$ lần lượt tại R, Q .

Trong mặt phẳng $(AA'D'D)$, qua R vẽ đường thẳng song song với AD' cắt AA' tại S .

Trong mặt phẳng $(CC'D'D)$, qua Q vẽ đường thẳng song song với CD' cắt CC' tại P .

Vậy thiết diện là lục giác $MNPQRS$.



b) Do các mặt đối diện của hình hộp song song nên các cạnh đối của hình lục giác thiết diện $MNPQRS$ song song và 3 cặp cạnh đó lần lượt song song với các cạnh tam giác ACD' .

Suy ra các tam giác JKI , ACD' , RQI , JMS , NKP đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{MJ}{MN} = \frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NB} = \frac{NK}{PQ} = \frac{PC}{PC'} = \frac{PK}{PQ} = \frac{QD'}{QC'} = \frac{QI}{QP} \Rightarrow MJ = NK \text{ và } PK = QI.$$

Suy ra các tam giác RQI , JMS , NKP bằng nhau (gọi diện tích của chúng là S_1 và gọi diện tích các tam giác JKI , ACD' lần lượt là S_2 và S).

Đặt $\frac{AM}{AB} = k$, ta có điều kiện $0 < k < 1$ và có:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{JM}{AC} \right)^2 = \left(\frac{AM}{DC} \right)^2 = \left(\frac{AM}{AB} \right)^2 = k^2 \Rightarrow S_1 = k^2 S$$

$$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{JK}{AC} \right)^2 = \left(\frac{JM + MK}{AC} \right)^2 = \left(\frac{JM}{AC} + \frac{MK}{AC} \right)^2 = (k+1)^2 \Rightarrow S_2 = (k^2 + 2k + 1)S$$

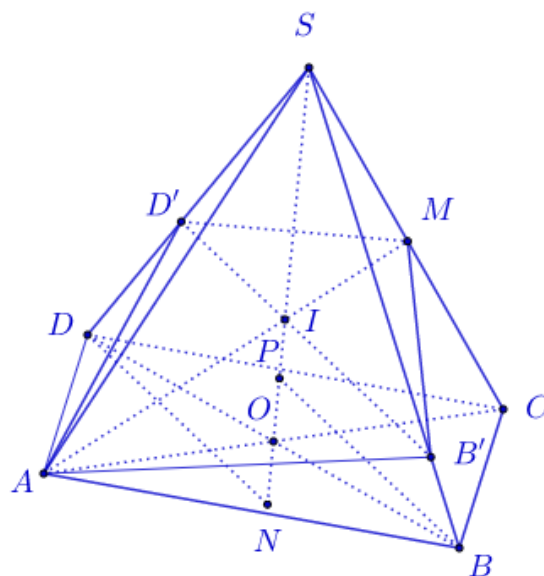
$$\Rightarrow S_{\text{đ}} = 2S \left(-k^2 + k + \frac{1}{2} \right) = 2S \left[\frac{3}{4} - \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \leq \frac{3S}{2}$$

Diện tích thiết diện: (dấu bằng xảy ra

$$S \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M$$

lớn nhất là trung điểm của AB .

2. Gọi $I = AM \cap B'D'$ và $O = AC \cap BD$.



Ta có: S, O, I là các điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) $(SBD) \Rightarrow S, O, I$ thẳng hàng.

Và I là trọng tâm của tam giác SAC

$$\Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}.$$

Vẽ $BP \parallel B'I$ và $DN \parallel D'I$ ($P, N \in SO$) $\Rightarrow OP = ON$.

Đặt $x = \frac{SD}{SD'}$, $y = \frac{SB}{SB'}$

$$\Rightarrow x+y = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{SP}{SI} + \frac{SN}{SI} = \frac{2SO}{SI} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \Rightarrow x, y \in [1, 2] (*)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{xy} \geq 3 \left(\frac{2}{x+y} \right)^2 = \frac{4}{3}.$$

Suy ra:

$$(*): 1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x(3-x) \geq 2 \Leftrightarrow xy \geq 2.$$

Từ

$$\Leftrightarrow \frac{3}{xy} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{3}{2}.$$

Câu 5: Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \sin(\pi|\sin x|)$ là $D = \mathbb{R}$ (đối xứng qua 0).

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x).$$

Vậy, f chẵn (f không lẻ vì nó không đồng nhất bằng 0)

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = f(x).$$

Vậy, f tuần hoàn.

Tập giá trị của hàm số $t = \pi|\sin x| \in [0, \pi]$ là nên $\min_{0 \leq t \leq \pi} f = \min_{0 \leq t \leq \pi} \sin t = 0, \max_{0 \leq t \leq \pi} f = \max_{0 \leq t \leq \pi} \sin t = 1.$

ĐỀ SỐ 33

Câu 1:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \cot x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x + \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$\frac{3\sin 2x - 3}{\cos 2x} - 2 \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} + 2 \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sin 2x - 3}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} + 2 \cos 2x = 0$$

$$3\sin 2x - 3 + 2(\cos x - \sin x)^2 + 2\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin 2x - 3 + 2(1 - \sin 2x) + 2(1 - \sin^2 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 2x + \sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1; \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

+) $\sin 2x = 1 \Rightarrow \cos 2x = 0$ không thỏa mãn điều kiện.

+) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k)$$

Câu 2: 1. a) Từ khai triển trên lần lượt cho $x = -1, x = 1$, ta được

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{4042110} = 2011^{2011} \\ a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{4042110} = 1 \end{cases}$$

Cộng từng vế hai đẳng thức trên và chia cả hai vế cho 2 ta được

$$A = a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{4042110} = \frac{2011^{2011} + 1}{2}$$

b) Xét $x \neq 1$ từ khai triển trên ta có:

$$(1 - x^{2011})^{2011} = (1 - x)^{2011} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{4042110}x^{4042110}).$$

Hệ số của x^{2011} trong vế trái bằng $-C_{2011}^1 = -2011$.

Hệ số của x^{2011} trong vế phải bằng

$$C_{2011}^0 a_{2011} - C_{2011}^1 a_{2010} + C_{2011}^2 a_{2009} - C_{2011}^3 a_{2008} + \dots + C_{2011}^{2010} a_1 - C_{2011}^{2011} a_0.$$

Từ đó ta có đẳng thức

$$C_{2011}^0 a_{2011} - C_{2011}^1 a_{2010} + C_{2011}^2 a_{2009} - C_{2011}^3 a_{2008} + \dots + C_{2011}^{2010} a_1 - C_{2011}^{2011} a_0 = -2011.$$

$$n(A).$$

2. +) Trước hết ta tính Với số tự nhiên có chín chữ số đôi một khác nhau thì chữ số đầu tiên có 9 cách chọn và có A_9^8 cho 8 vị trí còn lại. Vậy $n(A) = 9A_9^8$.

+) Giả sử $B = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ta thấy tổng các phần tử của B bằng $45:3$ nên số có chín chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 3 sẽ được tạo thành từ 9 chữ số của các tập $B \setminus \{0\}; B \setminus \{3\}; B \setminus \{6\}; B \setminus \{9\}$ $A_9^9 + 3.8.A_8^8$.
nên số các số loại này là

$$\frac{A_9^9 + 3.8.A_8^8}{9.A_9^8} = \frac{11}{27}.$$

Vậy xác suất cần tìm là

Câu 3: 1. Từ công thức truy hồi của dãy ta chọn

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right) u_{n-2} = \dots = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) u_1.$$

$$u_n = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} \cdot \frac{(n-2)n}{(n-1)^2} \dots \frac{4.2}{3^2} \cdot \frac{3.1}{2^2} \cdot 2011 = \frac{n+1}{2n} \cdot 2011.$$

Do đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{2011}{2}.$$

Từ đó

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{3x-2} - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{2x-1} - 1 + \sqrt[3]{3x-2} - 1}{x^2 - 1}$$

2. Ta có

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x\sqrt{2x-1} - 1}{x^2 - 1} + \frac{\sqrt[3]{3x-2} - 1}{x^2 - 1} \right]$$

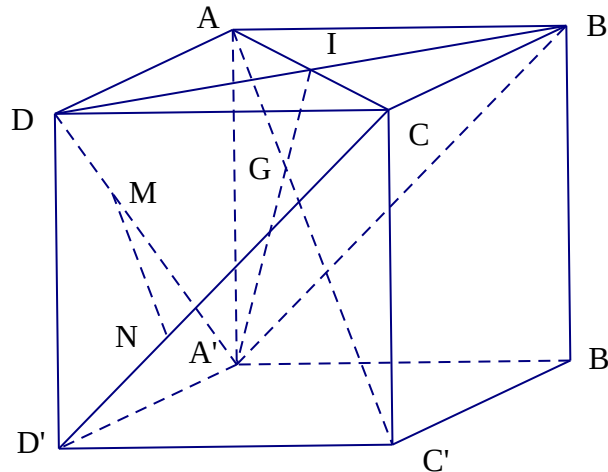
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2x^3 - x^2 - 1}{(x^2 - 1)(x\sqrt{2x-1} + 1)} + \frac{3x - 3}{(x^2 - 1) \left[\sqrt[3]{(3x-2)^2} + \sqrt[3]{3x-2} + 1 \right]} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2x^2 + x + 1}{(x+1)(x\sqrt{2x-1} + 1)} + \frac{3}{(x+1) \left[\sqrt[3]{(3x-2)^2} + \sqrt[3]{3x-2} + 1 \right]} \right]$$

$$= \frac{4}{4} + \frac{3}{6} = \frac{3}{2}$$

WORD HÓA HỌC SINH GIỎI 11 TRANG 202 – 206

Câu 4.1.



Cách 1. Ta có $BD \perp AC$ và $BD \perp AA'$ nên $BD \perp (ACC'A') \Rightarrow AC' \perp BD$.

Tương tự ta chứng minh được $AC' \perp A'D$. Từ đó suy ra $AC' \perp (A'BD)$.

Gọi I là giao điểm của AC và BD . Khi đó $G = AC' \cap A'I$ chính là giao điểm của AC' và mặt phẳng $(A'BD)$. Do $AC \parallel A'C' \Rightarrow \frac{GI}{GA'} = \frac{AI}{A'C'} = 2 \Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác $A'BD$. Hay AC' đi qua trọng tâm G của tam giác $A'BD$.

Cách 2.

Xét hệ trục tọa độ vuông góc $A'xyz$, ta có

$$A'(0;0;0), D'(a;0;0), B'(0;a;0), A(0;0;a), C'(a;a;0), B(0;a;a), D(a;0;a).$$

$$\text{Ta có } AC' = (a;a;-a), A'B = (0;a;a), A'D = (a;0;a).$$

$$\text{Vậy } AC' \cdot A'D = a \cdot a + 0 \cdot a + (-a) \cdot a = 0 \Rightarrow AC' \perp A'D \quad (1)$$

$$\text{Ta cũng có: } AC' \cdot A'B = a \cdot 0 + a \cdot a + (-a) \cdot a = 0 \Rightarrow AC' \perp A'B \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có $AC' \perp (A'BD)$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác $A'BD \Rightarrow G = \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{2a}{3} \right)$.

Ta có $\vec{AG} = \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; -\frac{a}{3} \right) = \frac{1}{3}(a; a; -a) = \frac{1}{3}\vec{AC'}$.

Vậy A, G, C' thẳng hàng. Hay AC' đi qua trọng tâm G của tam giác $A'BD$.

Cách 3.

Xét hệ trục tọa độ vuông góc $A'xyz$, ta có

$A'(0;0;0), D'(a;0;0), B'(0;a;0), A(0;0;a), C'(a;a;0), B(0;a;a), D(a;0;a)$.

Phương trình mặt phẳng $(A'BD): mx + ny + pz = 0$:

Vì $(A'BD)$ đi qua $D(a;0;a); B(0;a;a)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} ma + pa = 0 \\ na + pa = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = n - p.$$

Vậy $(A'BD): x + y - z = 0$. Từ đây $n_{(A'BD)} = (1; 1; -1)$.

Do $AC' = (a; a; -a) = an_{(A'BD)}$. Vậy $AC' \perp (A'BD)$.

Phương trình đường thẳng AC' là: $\frac{x}{a} = \frac{y}{a} = \frac{z-a}{-a}$

Gọi G là trọng tâm của tam giác $A'BD \Rightarrow G = \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{2a}{3} \right)$

Do $G = \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{2a}{3} \right)$ thỏa $\frac{\frac{a}{3}}{a} = \frac{\frac{a}{3}}{a} = \frac{\frac{2a}{3}-a}{-a}$ nên $G \in AC'$.

(**Chú ý:** Cách 2,3 dùng cho các em học sinh đã học qua phương pháp tọa độ trong không gian)

$AA' = m, A'D' = n, A'B' = p \Rightarrow |m| = |n| = |p| = a, mn = n.p = p.m = 0$
 2. Đặt và
 $A'M = x.A'D'; D'N = y.D'C$

$A'M = x.m + x.n; D'N = y.m + y.p \Rightarrow MN = MA' + A'D' + D'N = (y-x).m + (1-x).n + y.p$
Ta có:

Do đường thẳng MN vuông góc với mặt phẳng $(CB'D')$ nên ta có

$$\begin{cases} \vec{MN} \cdot \vec{B'C} = 0 \\ \vec{MN} \cdot \vec{D'C} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ((y-x).m + (1-x).n + y.p)(m+n) = 0 \\ ((y-x).m + (1-x).n + y.p)(m+p) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+y-2x=0 \\ 2y-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy M, N là các điểm sao cho $A'M = \frac{2}{3}A'D; D'N = \frac{1}{3}D'C$.

Do đó ta có $MN = -\frac{1}{3}m + \frac{1}{3}n + \frac{1}{3}p \Rightarrow MN^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

ĐỀ SỐ 34

Câu 1.1. Ta có:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3}+1)\cos^2 x + (\sqrt{3}-1)\sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x - \sqrt{3} = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{3}(\cos^2 x - 1) + \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow & -\sqrt{3}\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow & -\sqrt{3}\sin x(\sin x - \cos x) - \cos x(\sin x - \cos x) + \sin x - \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sin x - \cos x)(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \\ \sqrt{3}\sin x + \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

2.

+) Nếu $x=0$ thay vào hệ ta có hệ vô nghiệm.

+) Nếu $x \neq 0$ ta đặt $y=ax; z=bx$ thay vào hệ ta được

$$(1) \begin{cases} x^2(1-2a^2)=1 \\ x^2(2a^2-3b^2)=1 \\ x^2(a+ab+b)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2a^2=2a^2-3b^2 \\ 1-2a^2=a+ab+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2-3b^2=1 \\ 2a^2+a-1+b(a+1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2-3b^2=1 \\ (a+1)(2a-1)+b(a+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2-3b^2=1 \\ (a+1)(2a-1+b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=\pm 1 \\ b=1-2a \\ 2a^2-3a+1=0 \end{cases}$$

+) Nếu $\begin{cases} a=-1 \\ b=\pm 1 \end{cases}$ thay vào (1) không thỏa mãn.

+) Nếu $\begin{cases} b=1-2a \\ 2a^2-3a+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ a=\frac{1}{2} \\ b=0 \end{cases}$ thay $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ vào (1) không thỏa mãn,

Thay $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=0 \end{cases}$ vào (1) ta có $x=\pm\sqrt{2}$. Do đó nghiệm của hệ là:

$$(x, y, z) = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

Câu 2.1. Cách 1: Nhận xét. Nếu $0 < x, 0 < y, \frac{x+y}{2} < \pi$ thì

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \leq 2 \sin \frac{x+y}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y$.

Sử dụng nhận xét trên ta có

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C + \sin \frac{A+B+C}{3} &\leq 2 \sin \frac{A+B}{2} + 2 \sin \frac{A+B+4C}{6} \\ &\leq 4 \sin \frac{\frac{A+B}{2} + \frac{A+B+4C}{6}}{2} = 4 \sin \frac{A+B+C}{3} \\ \sin A + \sin B + \sin C &\leq 3 \sin \frac{A+B+C}{3}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $A=B=C$.

Cách 2: Trên đoạn $[0, \pi]$, $\sin x$ là một hàm lõm, nên áp dụng bất đẳng thức Jensen đối với hàm

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right).$$

lõm, ta có

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{A+B+C}{3}.$$

Vậy Dấu bằng xảy ra khi $A=B=C$.

2. Đặt $t = \frac{B+C+D}{3}$, ta có $A = 2\pi - 3t; \frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3}$ (1)

$$P \leq -\sin\left(\frac{2\pi - 3t}{3}\right) + 3\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t + \frac{5}{2}\sin t$$

Khi đó theo phần II.1 ta có

$$P \leq \sqrt{\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2 + \left[\frac{5}{2}\right]^2} (\sin^2 t + \cos^2 t) = \sqrt{7}.$$

Khi đó

$$\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}; \sin t = \frac{5}{\sqrt{28}} \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\text{Vậy } \max P = \sqrt{7} \Leftrightarrow B=C=D=t, A=2\pi-3t \quad (\text{Với } t \text{ xác định bởi (1) và (2)}).$$

Câu 3. +) Trước hết ta tính $n(A)$. Với số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau thì chữ số đầu tiên có 9 cách chọn và có A_9^7 cho 7 vị trí còn lại. Vậy $n(A) = 9A_9^7$.

+) Giả sử $B = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ta thấy tổng các phần tử của B bằng $45:9$ nên số có tám chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 9 sẽ được tạo thành từ 8 chữ số đôi một khác nhau của các tập

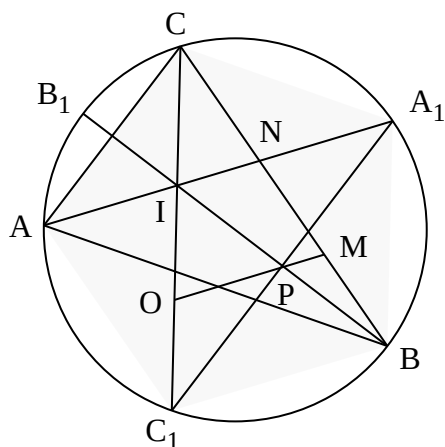
$$B \setminus \{0, 9\}; B \setminus \{1, 8\}; B \setminus \{2, 7\}; B \setminus \{3, 6\}; B \setminus \{4, 5\}$$

nên các số loại này là $A_8^8 + 4.7.A_7^7$.

$$\frac{A_8^8 + 4.7.A_7^7}{9.A_9^7} = \frac{1}{9}.$$

Vậy xác suất cần tìm là

Câu 4.



Từ $\angle BAC = 2\angle ABC$, suy ra $\angle IPC_1 = 90^\circ$, do đó O là trung điểm của IC_1

+) $\angle IOP = 2\angle IC_1P = \angle CAB = \angle CC_1B \Rightarrow BC_1 \parallel OP$. Do $BM = MN, OC_1 = OI \Rightarrow IN \parallel IC_1B$

Do đó $\angle CIA_1 = \angle BAC$, mà $\angle CIA_1 = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ACB)$.

Vậy $\angle BAC = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ACB) \Rightarrow \angle BAC = \angle ACB$ cùng với $\angle BAC = 2\angle ABC$ ta được

$$\angle BAC = \angle ACB = 72^\circ; \angle ABC = 36^\circ$$