BÀI 27. THỂ TÍCH

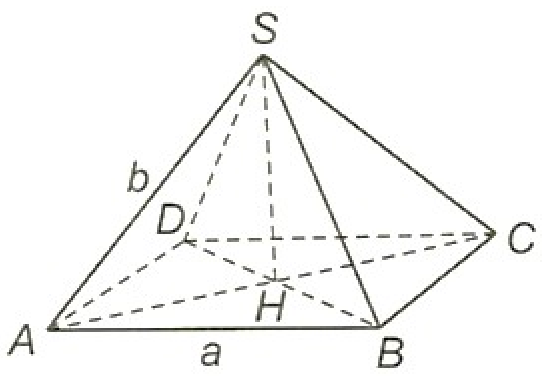
CHƯƠNG 7. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Tính thể tích

Câu 1. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Tính thể tích của khối chóp.

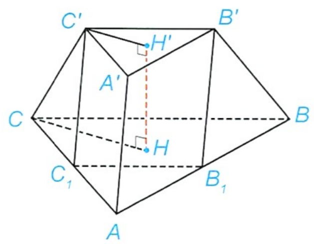
Lời giải



Hình 7.32

$$SH=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}\Rightarrow V=\frac{1}{3}a^2\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}.$$

Câu 2. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho khối chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ có đường cao $HH'=h$, hai mặt đáy $ABC, A'B'C'$ có cạnh tương ứng bằng $2a, a$.



Hình 7.96

a) Tính thể tích của khối chóp cụt.

b) Gọi B_1, C_1 tương ứng là trung điểm của AB, AC. Chứng minh rằng $AB_1C_1.A'B'C'$ là một hình lăng trụ. Tính thể tích khối lăng trụ $AB_1C_1.A'B'C'$.

Lời giải

a) Diện tích đáy trên là $S_1=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích đáy dưới là $S_2=a^2\sqrt{3}$.

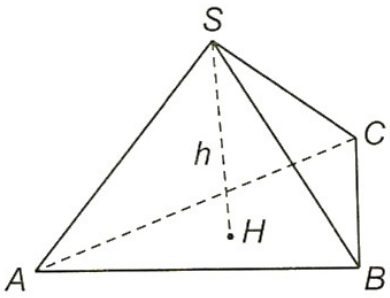
Thể tích của khối chóp chụt đêu là $V=\frac{1}{3}h\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right)=\frac{7\sqrt{3}}{12}a^2h$.

b) $AA'C'C_1$ là hình bình hành $\Rightarrow C'C_1//AA', B'B_1//AA' \Rightarrow AB_1C_1.A'B'C'$ là hình lăng trụ.

Thể tích của khối lăng trụ là: $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}h$.

Câu 3. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho khối chóp đều $S.ABC$, đáy có cạnh bằng a, cạnh bên bằng b. Tính thể tích của khối chóp đó. Từ đó suy ra thể tích của khối tứ diện đều có cạnh bằng a.

Lời giải



Hình 7.33

Thể tích: $V = \dfrac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2}$. Khi $a = b \Rightarrow V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 4. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có $AA' = 5\,cm, AB = 6\,cm, BC = 2\,cm, \widehat{ABC} = 150^\circ$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Lời giải

Diện tích mặt đáy: $S = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \sin 150^\circ = 3\left(cm^2\right)$.

Do đó $V = 15\,cm^3$.

Câu 5. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho khối chóp đều $S.ABCD$, đáy có cạnh $6\,cm$. Tính thể tích của khối chóp đó trong các trường hợp sau:

a) Cạnh bên tạo với mặt đáy một góc bằng 60°;

b) Mặt bên tạo với mặt đáy một góc bằng 45°.

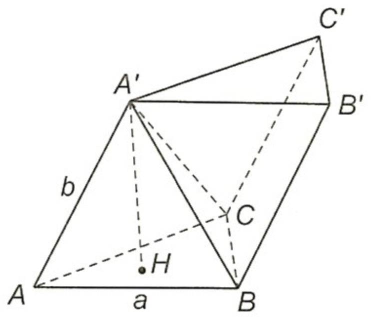
Lời giải

a) $h = OA \cdot \tan 60^\circ = 3\sqrt{6} \Rightarrow V = 36\sqrt{6}\,cm^3$.

b) $SO = h = OM = 3\,cm \Rightarrow V = 36\,cm^3$.

Câu 6. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là các tam giác đều cạnh $a, A'A = A'B = A'C = b$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Lời giải



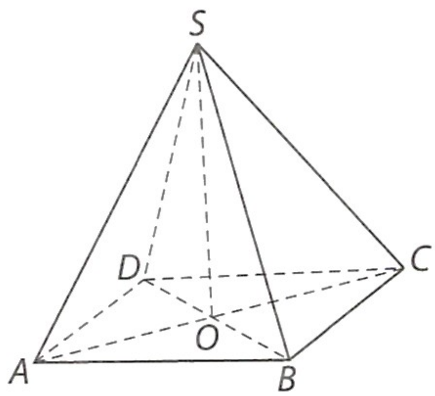
Hình 7.34

$h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}, S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$.

Câu 7. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

(H.7.17)



Hình 7.17

Gọi O là giao điểm của AC và BD thì $SO \perp (ABCD)$ và góc giữa SA và $(ABCD)$ bằng góc SAO bằng 60°.

Xét tam giác SAO vuông tại O, có $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $\widehat{SAO} = 60^\circ$.

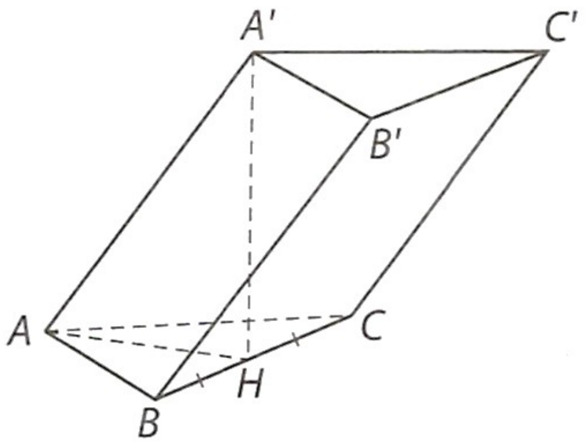
Khi đó SO $= AO \cdot \tan \widehat{SAO} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Do đó, $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 8. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh $AA' = a$ và hình chiếu vuông góc H của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải

(H.7.18)



Hình 7.18

Ta có $A'H$ là đường cao của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, tam giác ABC đều có đường cao AH nên ta tính được $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AA' = a$ và tam giác $A'AH$ vuông tại H nên theo định lí Pythagore ta tính được $A'H = \frac{a}{2}$.

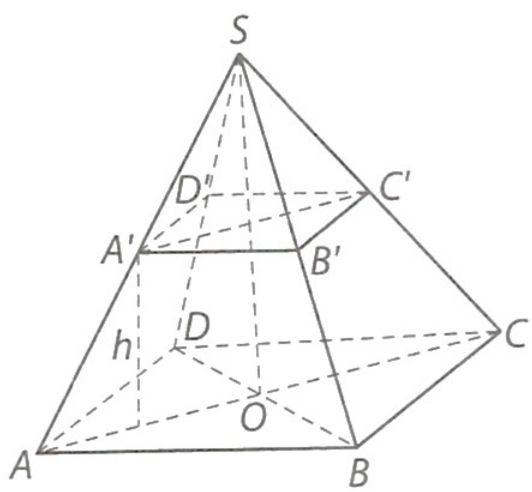
Tam giác ABC đều có cạnh bằng a nên diện tích tam giác ABC bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 9. Cho hình chóp cụt đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy lớn $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ là hình vuông cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, các cạnh bên bằng nhau và bằng a. Tính theo a thể tích khối chóp cụt $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

Lời giải

(H.7.19)



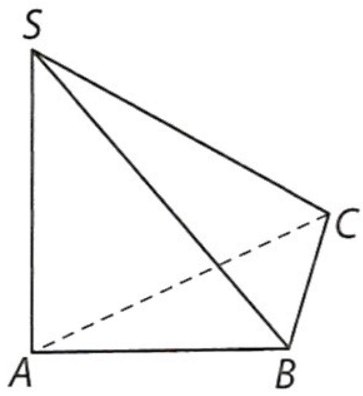
Hình 7.19

Gọi O là giao điểm của AC và BD, S là giao điểm của AA' và CC'. Vì $A'B' = \frac{1}{2}AB$ nên A' là trung điểm của SA. Từ đó, suy ra $SA = SC = 2a$.

Vì $ABCD$ là hình vuông và $AB = a\sqrt{2}$ nên $AC = 2a$.
Do đó, tam giác SAC đều, có đường cao SO.
Từ đó, ta tính được $SO = a\sqrt{3}$. Vì A' là trung điểm của SA và $SO \perp (ABCD)$ nên chiều cao h của hình chóp cụt $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $\frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Diện tích đáy lớn và đáy nhỏ của hình chóp cụt $ABCD.A'B'C'D'$ lần lượt là $2a^2; \frac{a^2}{2}$.
Vậy thể tích khối chóp cụt $ABCD.A'B'C'D'$ bằng
$\frac{1}{3}\cdot\left(2a^2 + \frac{a^2}{2} + \sqrt{2a^2\cdot\frac{a^2}{2}}\right)\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC); AB = a; AC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{SBA} = 60^\circ$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

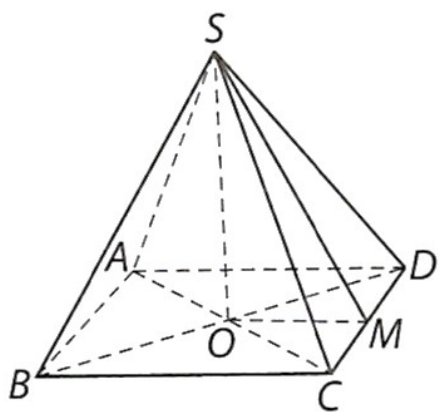


Hình 7.52

Ta có: $SA = AB\cdot\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$; $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\widehat{BAC} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 11. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Hình 7.53

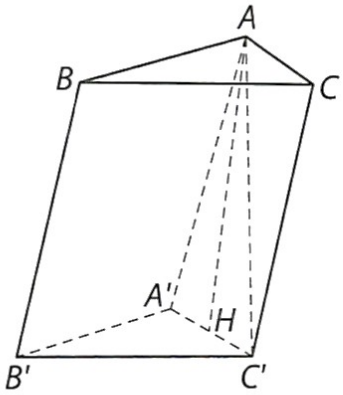
Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có SO vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Kẻ OM vuông góc với CD tại M thì SM cũng vuông góc với CD nên góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng SM và OM, mà $(SM,OM)=\widehat{SMO}=60^\circ$.

Ta có: $OM=\frac{a}{2}; SO=OM\cdot\tan\widehat{SMO}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot SO=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 12. Cho hình lăng trụ $ABC\cdot A'B'C'$ có $A'B'C'$ và $AA'C'$ là hai tam giác đều cạnh a. Biết $(ACC'A')\perp(A'B'C')$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải



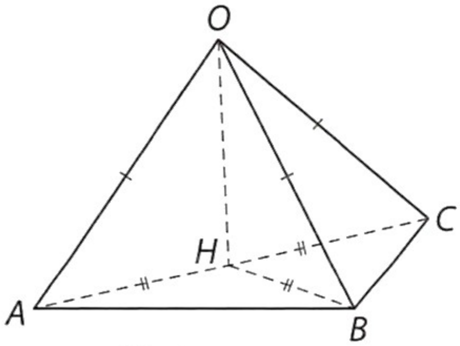
Hình 7.54

Kẻ $AH\perp A'C'$ tại H thì $AH\perp(A'B'C')$.

Ta có: $S_{A'B'C'}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}; AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, suy ra $V_{ABC.A'B'C'}=S_{A'B'C'}\cdot AH=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3a^3}{8}$.

Câu 13. Cho tứ diện $OABC$ có $OA=OB=OC=a$ và $\widehat{AOB}=90^\circ; \widehat{BOC}=60^\circ; \widehat{COA}=120^\circ$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $OABC$.

Lời giải



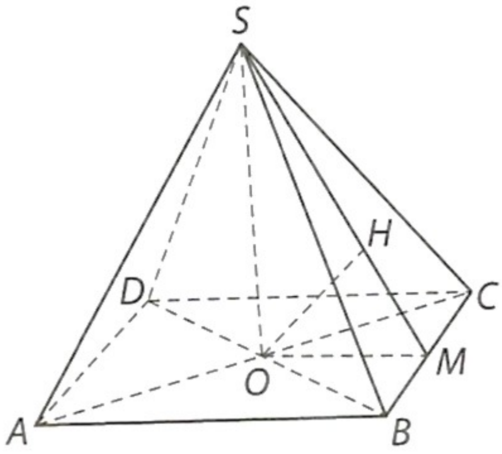
Hình 7.55

Ta có: $AB=a\sqrt{2}, BC=a, CA=a\sqrt{3}$, tam giác ABC vuông tại B. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H. Vì $OA=OB=OC$ nên $HA=HB=HC$, hay H là trung điểm của AC. Xét tam giác OAH vuông tại H, theo định lí Pythagore ta tính được: $OH=\frac{a}{2}$.

Do đó $V_{OABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot OH=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, biết $SO\perp(ABCD)$, $AC=2a\sqrt{3}, BD=2a$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Hình 7.56

Kẻ OM vuông góc với BC tại M, OH vuông góc với SM tại H, ta chứng minh được $OH\perp(SBC)$. Vì O là trung điểm của AC nên

$d(A,(SBC))=2\cdot d(O,(SBC))=2\cdot OH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, suy ra $OH=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

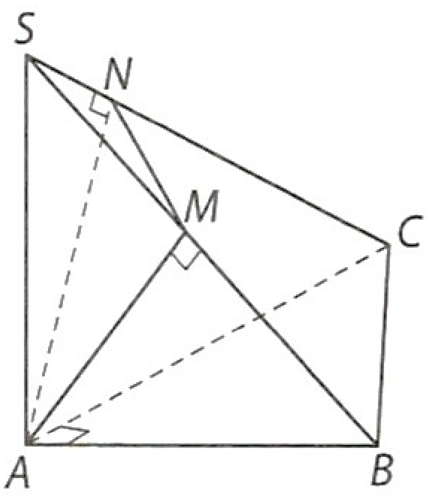
Tam giác OBC vuông tại O, có $OB=a, OC=a\sqrt{3}$ và đường cao OM nên $OM=\frac{OB\cdot OC}{BC}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SOM vuông tại O, đường cao OH nên $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{OS^2}$, suy ra $SO=\frac{a}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot SO=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\sqrt{3}\cdot 2a\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC), SA=$ a và đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB=a, AC=a\sqrt{3}$. Kẻ AM vuông góc với SB tại M, AN vuông góc với SC tại N. Tính theo a thể tích khối chóp $S.AMN$.

Lời giải



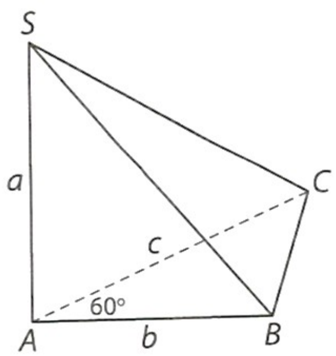
Hình 7.57

Ta có: $V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$, tam giác SAB vuông cân tại A nên $\frac{SM}{SB}=\frac{1}{2}$; tam giác SAC vuông tại A, đường cao AN nên $\frac{SN}{SC}=\frac{SN\cdot SC}{SC^2}=\frac{SA^2}{SC^2}=\frac{1}{4}$.

Do đó $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SB}\cdot\frac{SN}{SC}=\frac{1}{8}$, suy ra $V_{S.AMN}=\frac{1}{8}\cdot V_{S.ABC}=\frac{1}{8}\cdot\frac{a^3\sqrt{3}}{6}=\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và $\widehat{BAC}=60^\circ$, biết diện tích các tam giác ABC, SAB và SAC lần lượt là $3\sqrt{3};9;12$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

Lời giải



Hình 7.58

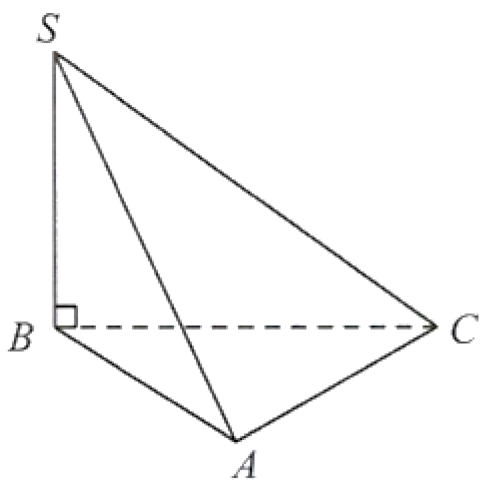
Đặt $SA=a, AB=b, AC=c$. Khi đó $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot SA=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot bc\cdot\sin 60^\circ\cdot a=\frac{abc\sqrt{3}}{12}$.

Theo đề bài, ta có: $S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin 60^\circ=3\sqrt{3}$, suy ra $bc=12$. $S_{SAB}=\frac{ab}{2}=9$, suy ra $ab=18; S_{SAC}=\frac{ac}{2}=12$, suy ra $ac=24$. Do đó $(abc)^2=12\cdot 18\cdot 24=72^2$, hay $abc=72$. Vậy $V_{S.ABC}=6\sqrt{3}$

.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng $(ABC), SB=2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Hình 9

Diện tích tam giác đều ABC :

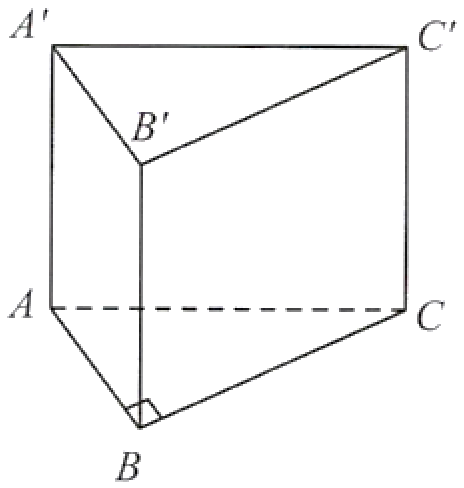
$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SB = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 18. Cho khối lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải



Hình 10

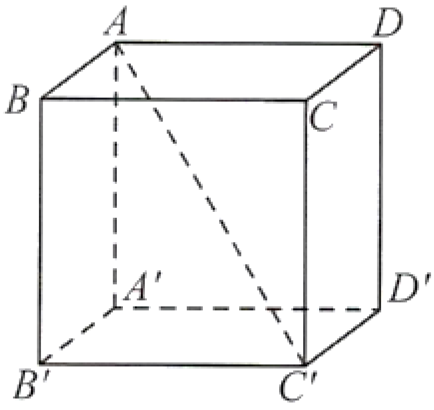
Chiều cao khối lăng trụ đứng là cạnh bên nên $h = BB' = a$. Tam giác ABC vuông cân tại B có $AC = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $V = S_{\Delta ABC} \cdot h = \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{2}$.

Câu 19. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AC' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

Lời giải



Hình 11

Đường chéo của một hình lập phương là $d=a\sqrt{3}$ với a là độ dài cạnh hình lập phương.
Dễ thấy rằng hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có AC' là đường chéo và cạnh là AB.

Do đó: $AC'=AB\sqrt{3}\Rightarrow AB=\dfrac{AC'}{\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=a$.

Vậy thể tích khối lập phương là $V=a^3$.

Câu 20. Tính thể tích của khối chóp cụt tam giác đều $ABC\cdot A'B'C'$ có chiều cao bằng $3a, AB=4a, A'B'=a$.

Lời giải

Diện tích tam giác đều $ABC: S=\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{(4a)^2\sqrt{3}}{4}=4a^2\sqrt{3}$.

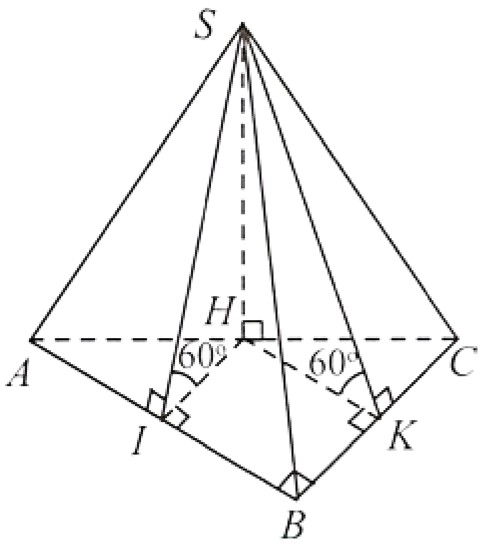
Diện tích tam giác đều $A'B'C': S'=\dfrac{A'B'^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp cụt:

$$V=\frac{1}{3}\cdot 3a\cdot\left(4a^2\sqrt{3}+\sqrt{4a^2\sqrt{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{21a^3\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại $B, AC=a\sqrt{2}$, mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt đáy (ABC). Các mặt bên $(SAB),(SBC)$ tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng 60°. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Hình 5

Ta có: $(SAC)\perp(ABC)$ và $(SAC)\cap(ABC)=AC$.

Trong mặt phẳng (SAC), vẽ $SH\perp AC(H\in AC)$ thì $SH\perp(ABC)$.

Gọi I,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên cạnh AB và BC thì $((SAB),(ABC))=\widehat{SIH}$, $((SBC),(ABC))=\widehat{SKH}$.

Mà $\widehat{SIH}=\widehat{SKH}=60^{\circ}$ nên $HI=HK$.

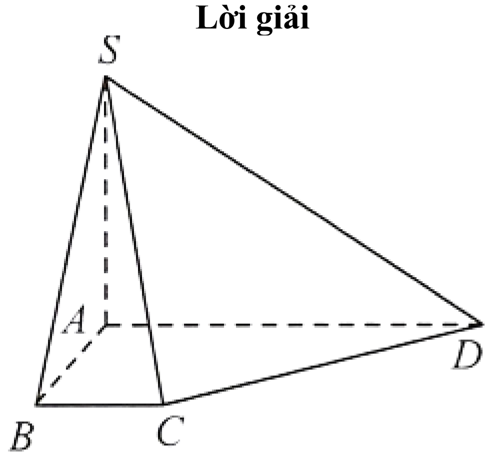
Suy ra tứ giác $BIHK$ là hình vuông nên H là trung điểm cạnh AC.

Khi đó tứ giác $BIHK$ là hình vuông cạnh $\frac{a}{2}$ và $SH=HI\cdot\tan 60^{\circ}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot SH=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB=a, AD=3a, BC=a$. Tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo a.

Lời giải



Hình 6

Ta có: $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AB\cdot(AD+BC)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot(3a+a)=2a^2$.

Lại có $S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 3a=\frac{3a^2}{2}$.

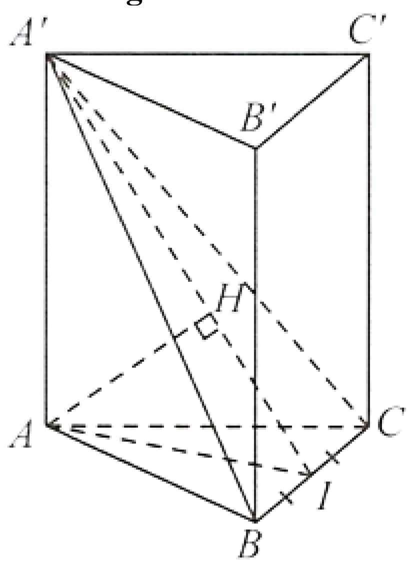
Suy ra $S_{\Delta BCD}=S_{ABCD}-S_{\Delta ABD}=\frac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{S.BCD}=\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot SA=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a\sqrt{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 23. Cho hình lăng trụ đều $ABC\cdot A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a.

Biết $d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=\frac{a\sqrt{57}}{12}$. Tính $V_{ABC\cdot A'B'C'}$.

Lời giải



Hình 7

Gọi I là trung điểm của BC và H là hình chiếu của A trên $A'I$.

Ta có: $BC\perp AI$ và $BC\perp AA'\Rightarrow BC\perp\left(A'AI\right)\Rightarrow\left(A'BC\right)\perp\left(A'AI\right)$.

Mặt khác: $\left(A'AI\right)\cap\left(A'BC\right)=A'I$ và $AH\perp A'I$.

Nên $d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=AH=\frac{a\sqrt{57}}{12}$.

ΔABC dều cạnh $a\Rightarrow AI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

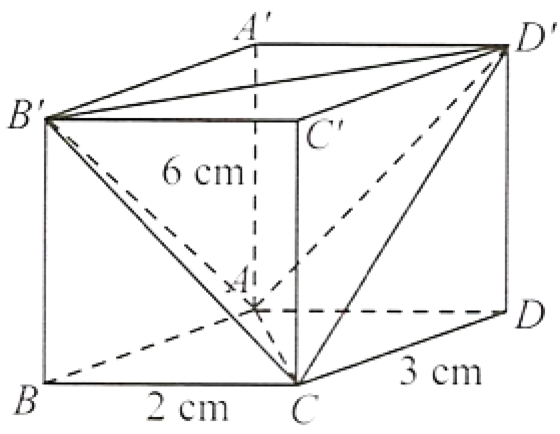
Xét tam giác $A'AI$ vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{A'A^2}=\frac{1}{AH^2}-\frac{1}{AI^2}=\frac{144}{57a^2}-\frac{4}{3a^2}=\frac{68}{57a^2}\Rightarrow AA'=\frac{a\sqrt{57}}{2\sqrt{17}}.$$

Vậy $V_{ABC\cdot A'B'C'}=S_{ABC}\cdot AA'=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{57}}{2\sqrt{17}}=\frac{a^3\sqrt{171}}{8\sqrt{17}}$.

Câu 24. Một hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có ba kích thước là $2cm, 3cm$ và $6cm$. Tính thể tích của khối tứ diện $ACB'D'$.

Lời giải



Hình 8

Ta có: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = V_{B.AB'C} + V_{D.ACD'} + V_{A'.B'AD'} + V_{C'.B'CD'} + V_{ACB'D'}$

$= 4V_{B.AB'C} + V_{ACB'D'}$

$\Rightarrow V_{ACB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4V_{B.AB'C}$

$= V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4\cdot\frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}$

$= \frac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'}$

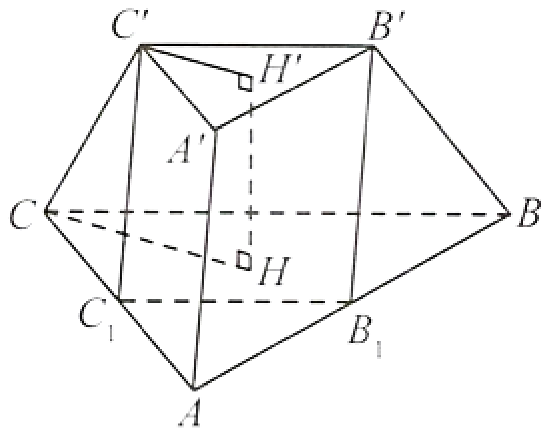
$= \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 3\cdot 6 = 12\left(cm^3\right).$

Câu 25. Cho hình chóp cụt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có đường cao $HH' = 2a$. Cho biết $AB = 2a, A'B' = a$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của AB, AC. Tính thể tích của:

a) Khối chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$;

b) Khối lăng trụ $AB_1C_1.A'B'C'$.

Lời giải



Hình 9

a) Áp dụng công thức $V = \frac{1}{3}h\left(S + \sqrt{SS'} + S'\right)$,

với $S = a^2\sqrt{3}, S' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, h = 2a$,

ta có: $V=\frac{1}{3}\cdot 2a\cdot\left(a^2\sqrt{3}+\sqrt{a^2\sqrt{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$
$=\frac{7a^3\sqrt{3}}{6}$.

b) Áp dụng công thức $V'=S'\cdot h'$ với $S'=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}, h'=2a$,

Ta có $V'=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2a=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Dạng 2. Ứng dụng

Câu 26. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Một sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt đều (H.7.98). Đáy và miệng sọt là các hình vuông tương ứng có cạnh bằng $30cm, 60cm$, cạnh bên của sọt dài $50cm$. Tính thể tích của sọt.

Hình 7.98

Lời giải

Diện tích mặt đáy lớn là $S_1=60^2\left(cm^2\right)$, diện tích mặt đáy nhỏ là $S_2=30^2\left(cm^2\right)$.

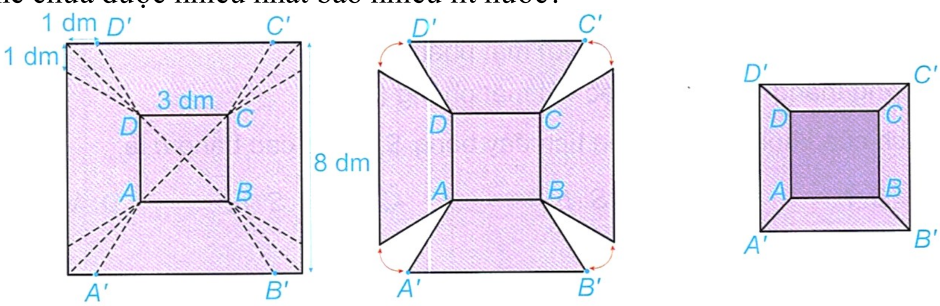
Chiều cao là $h=\sqrt{50^2-\frac{30^2}{2}}=5\sqrt{82}(cm)$. Do đó $V=\frac{1}{3}h\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right)\approx 95082\left(cm^3\right)$.

Câu 27. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Từ một tấm tôn hình vuông có cạnh $8dm$, bác Hùng cắt bỏ bốn phần như nhau ở bốn góc, sau đó bác hàn các mép lại để được một chiếc thùng (không có nắp) như Hình 7.99.

a) Giải thích vì sao chiếc thùng có dạng hình chóp cụt.

b) Tính cạnh bên của thùng.

c) Hỏi thùng có thể chứa được nhiều nhất bao nhiêu lít nước?



Hình 7.99

Lời giải

a) Vi $AB//A'B' \Rightarrow AB//\left(A'B'C'D'\right), AD//A'D' \Rightarrow AD//\left(A'B'C'D'\right)$. Do đó $(ABCD)//\left(A'B'C'D'\right)$.

b) Cạnh bên của hình chóp cụt bằng $\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{34}}{2}(dm)$.

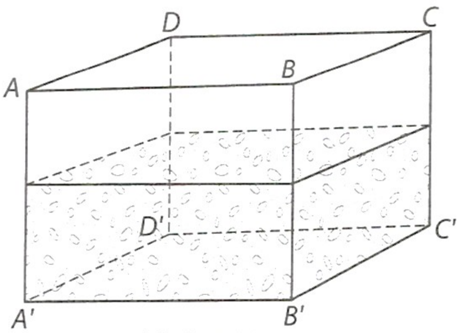
c) Xét mặt chứa đường chéo của hình vuông, nó là hình thang cân có chiều cao bằng chiều cao của hình chóp cụt và tính ra được $h=\sqrt{\frac{34}{4}-\frac{18}{4}}=2(dm)$.

Thể tích cần tìm là $V=42$ lít.

Câu 28. Một thùng nước có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D', AB=5m$, $AA'=3m, AD=4m$. Đáy bể là hình chữ nhật $A'B'C'D'$ được đặt trên một mặt phẳng nằm ngang.
a) Giải tích vì sao khi nước trong bể phẳng lặng, thì phần nước đó ứng với một khối hộp chữ nhật.
b) Tính mức nước trong bể (khoảng cách từ mặt nước đến đáy bể) khi thể tích phần nước trong bể là $40m^3$.

Lời giải

(H.7.20)



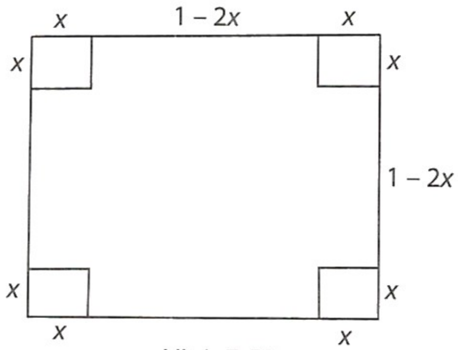
Hình 7.20

a) Vì mặt phẳng chứa bề mặt nước song song với mặt đáy nên phần nước trong bể là khối hình lăng trụ đứng, có đáy $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật nên phần nước trong bể là khối hộp chữ nhật.

b) Mực nước trong bể là $h=\dfrac{40}{4\cdot 5}=2(m)$.

Câu 29. Người ta cắt bỏ bốn hình vuông cùng kích thước ở bốn góc của một tấm tôn hình vuông có cạnh $1m$ để gò lại thành một chiếc thùng có dạng hình hộp chữ nhật không nắp. Hỏi cạnh của các hình vuông cần bỏ đi có độ dài bằng bao nhiêu để thùng hình hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

Lời giải



Hình 7.59

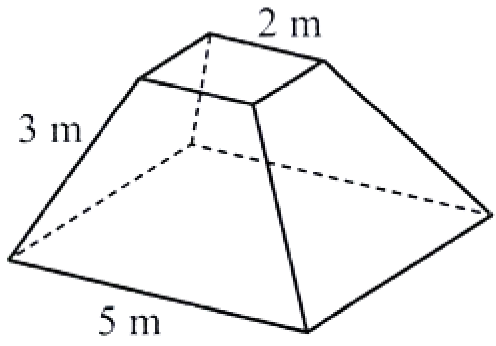
Gọi $x(m)$ là chiều dài cạnh hình vuông nhỏ tại mỗi góc của tấm tôn được cắt bỏ đi (với $0<x<\dfrac{1}{2}$). Thể tích hình hộp chữ nhật nhận được là

$$V=(1-2x)^2\cdot x=\frac{1}{4}\cdot(1-2x)\cdot(1-2x)\cdot 4x\le\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1-2x+1-2x+4x}{3}\right)^3=\frac{2}{27}$$

Dấu "=" xảy ra khi $1-2x=4x\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{6}$.

Vậy để thể tích chiếc thùng là lớn nhất thì các cạnh của hình vuông được cắt bỏ đi là $\dfrac{1}{6}m$.

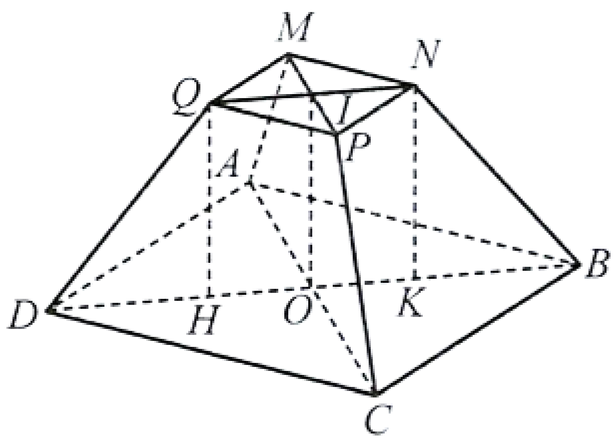
Câu 30. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình 46). Cạnh đáy dưới dài $5m$, cạnh đáy trên dài $2m$, cạnh bên dài $3m$. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1470000 đồng $/m^3$. Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn).



Hình 46

Lời giải

(Hình 47)



Hình 47

Giả sử chân tháp là khối chóp cụt tứ giác đều $ABCD.MNPQ$ với $ABCD$ là hình vuông cạnh $5m, MNPQ$ là hình vuông cạnh $2m, AM = BN = CP = DQ = 3m$.

Vì DQ, NB cắt nhau nên D, Q, N, B đồng phẳng. Mà $(ABCD)//(MNPQ)$ nên $NQ//BD$.

Gọi I là giao điểm của MP và NQ, O là giao điểm của AC và BD. Khi đó $IO \perp (MNPQ), IO \perp (ABCD)$.

Xét hình thang $QNBD$, gọi H là hình chiếu của Q trên BD, K là hình chiếu của N trên BD. Vì $IO \perp BD$, $QH \perp BD, NK \perp BD$ trong $(QNBD)$ nên $IO//QH//NK$.

Suy ra $QH \perp (MNPQ), QH \perp (ABCD)$ nên QH bằng chiều cao của khối chóp cụt đều.

Ngoài ra, ta có $QH = NK = IO$ và $QD = NB$. Suy ra $\Delta QHD = \Delta NKB$ nên ta có $HD = BK$.

Bên cạnh đó, $QNKH$ là hình chữ nhật nên $QN = HK$. Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} HD &= \frac{BD - HK}{2} = \frac{\sqrt{AD^2 + AB^2} - \sqrt{MN^2 + MQ^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{5^2 + 5^2} - \sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}(m). \end{aligned}$$

Xét tam giác QHD vuông tại H có:

$$QH=\sqrt{QD^2-HD^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}(m).$$

Diện tích của hai đáy là: $S_{ABCD}=AB^2=5^2=25\left(m^2\right)$, $S_{MNPQ}=MN^2=2^2=4\left(m^2\right)$.

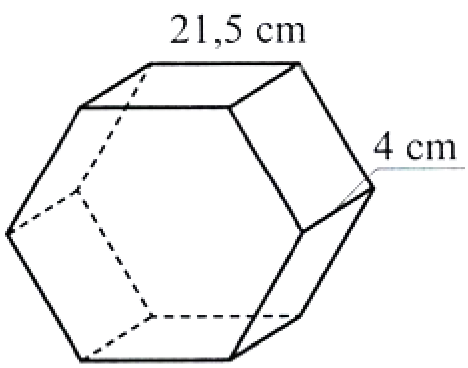
Suy ra thể tích của khối chóp cụt đều là:

$$V=\frac{1}{3}QH\left(S_{ABCD}+\sqrt{S_{ABCD}\cdot S_{MNPQ}}+S_{MNPQ}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}(25+\sqrt{25\cdot 4}+4)=\frac{39\sqrt{2}}{2}\left(m^3\right).$$

Số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp là:

$1470000\cdot\frac{39\sqrt{2}}{2}\approx 40538000$ (đồng).

Câu 31. Người ta cần đổ bê tông để làm những viên gạch có dạng khối lăng trụ lục giác đều (Hình 48) với chiều cao là $4cm$ và cạnh lục giác dài $21,5cm$. Tính thể tích bê tông theo đơn vị centimét khối để làm một viên gạch như thế (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 48

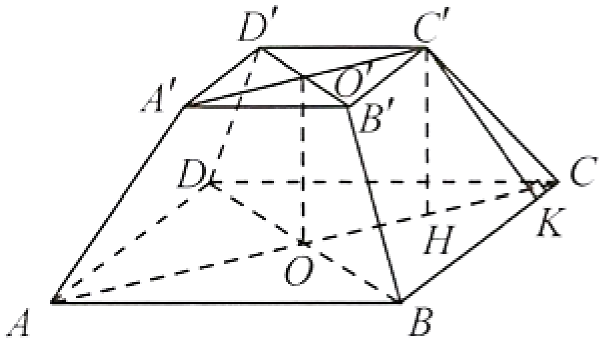
Lời giải

Chia hình lục giác đều trên hai mặt đáy thành 6 hình tam giác đều cạnh $21,5cm$. Khi đó diện tích đáy của viên gạch bằng: $6\cdot\frac{(21,5)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{5547\sqrt{3}}{8}\left(cm^2\right)$. Thể tích bê tông cần dùng bằng thể tích viên gạch, tức là: $4.\frac{5547\sqrt{3}}{8}\approx 4803,8\left(cm^3\right)$.

Câu 32. Tính thể tích một cái sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng $80cm$, đáy nhỏ có cạnh bằng $40cm$ và cạnh bên bằng $80cm$.

Hình 12

Lời giải



Hình 10

Ta có: $OC = 40\sqrt{2}, O'C' = 20\sqrt{2}$, suy ra $CH = 20\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông $C'CH$, ta có:

$C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = 20\sqrt{14}.$ Nên $OO' = C'H = 20\sqrt{14}$.

Thể tích của cái sọt đựng đồ là:

$V = \frac{1}{3} \cdot 20\sqrt{14} \cdot (6400 + \sqrt{6400 \cdot 1600} + 1600) \approx 279377,08 cm^2.$