|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **TỈNH QUẢNG NAM** | **KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT ĐỢT 2**  **NĂM HỌC 2022 – 2023** |
| |  | | --- | | **HDC CHÍNH THỨC** | | **HƯỚNG DẪN CHẤM**  **MÔN: TOÁN 10** |

*(Bản hướng dẫn này gồm 06 trang)*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Nội dung** | **Điểm** |
| **Câu 1. (3,0 điểm)** *Giải phương trình sau* | | **3,0** |
| **Cách 1** | Điều kiện: | 1,0 |
| Bình phương hai vế ta được | 1,0 |
| Thử lại:  Loại nghiệm .  Nhận 2 nghiệm . | 0,5  0,5 |
| **Cách 2** | Điều kiện: |  |
|  | 0,5 |
|  | 1,0 |
|  | 0,5 |
| Phương trình | 0,5 |
| Xét phương trình còn lại vô nghiệm.  Tập nghiệm của phương trình đã cho là | 0,5 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 2. (3,0 điểm)**  Cho *a, b, c* là các số thực dương thỏa mãn . Chứng minh rằng  . | | **3,0** |
|  | Ta có: | 0,5 |
| nên  tương tự ; .  BĐT trở thành | 0,5 |
| Đặt , ta được BĐT | 1,0 |
| Ta có , , | 0,5 |
| suy ra: |  |
| Đẳng thức xảy ra khi , điều này là không thể.  Vậy  hay  . | 0,5 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | | **Nội dung** | **Điểm** |
| **Câu 3. (3,0 điểm)**  Cho  là số thực, tìm tất cả các hàm đơn điệu  thỏa mãn . | | | **3,0** |
|  | | Giả sử tồn tại hàm  thỏa yêu cầu đề bài,  đơn điệu trên  nên là hàm số đơn ánh. | 0,25 |
| Xét ,    Hàm số  không thỏa yêu cầu hàm số đơn điệu. | 0,25  0,25 |
| Xét |  |
| Thay  ta có  suy ra | 0,25 |
| do đó  và . | 0,5 |
| Từ phương trình ban đầu thay  bởi  ta được  . | 0,5 |
| Suy ra  là hàm cộng tính, hơn nữa  đơn điệu nên  (*c* là hằng số). | 0,25 |
| Kết hợp biểu thức  và  ta được | 0,25 |
| Thử lại  thỏa mãn yêu cầu của đề. | 0,5 |
| **Câu 4. (3,0 điểm)**  *a) Chứng minh rằng số  không phải là số chính phương.* | | | **1,0** |
|  | | Ta có | 0,25 |
| Với ta có | 0,5 |
| Vì là hai số chính phương liên tiếp, nên giữa chúng không tồn tại số chính phương nào.  Vậy  không phải số chính phương. | 0,25 |
| *b) Cho đa thức  với hệ số nguyên và xác định trên tập số thực . Chứng minh rằng phương trình  có số nghiệm nguyên không lớn hơn 2026.* | | | **2,0** |
|  | | với | 0,25 |
| Gọi  là  nghiệm nguyên phân biệt của phương trình ,  và  là  nghiệm nguyên phân biệt của phương trình .  Khi đó  với mọi | 0,25 |
| Giả sử *m + n* > 2026. Vì  nên .  Do đó tồn tại các nghiệm nguyên  thỏa mãn . | 0,5 |
| Các nghiệm  nói trên thỏa mãn:    Suy ra | 0,25 |
| Vì  với mọi  nên từ (1) suy ra , điều này mâu thuẫn với .  Do đó . Vậy phương trình  có số nghiệm nguyên không lớn hơn 2026. | 0,5  0,25 |
| **Câu 5. (5,0 điểm)**  *a)**Cho  là tam giác nhọn,  là điểm bất kỳ trên cạnh  thỏa . Trên các cạnh  lần lượt lấy các điểm  sao cho . Gọi  lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác . Gọi  là trực tâm của tam giác . Chứng minh tứ giác  nội tiếp.* | | | **2,0** |
|  | |  | 0,25 |
| Do các tam giác  lần lượt cân tại  nên . | 0,5 |
| Ta có: *.* | 0,5 |
| Vì  là trực tâm của  nên . | 0,5 |
| Suy ra: . Vậy tứ giác  nội tiếp. | 0,25 |
| *b) Cho tam giác nhọn  có đường cao . Gọi điểm D trên cạnh thỏa mãn , điểm  di động trên đoạn . Gọi  là giao điểm của  và ,  là giao điểm của  và . Chứng minh rằng điểm  thuộc đường thẳng cố định.* | | | **3,0** |
|  | Gọi *H* là giao điểm của *DI* và cạnh *BC*.  Ta có 3 đường thẳng đồng quy trong tam giác *DKC* là *DH, KE, FC*, theo định lý Ceva ta được . | | 1,0 |
| Ba điểm thẳng hàng *B, E, F*, theo định lý Menelaus ta được .  Nhân (1) với (2) vế theo vế ta được | | 1,0  0,5 |
| suy ra   nên *DH* cố định.  Vậy *I* thuộc đoạn thẳng cố định. | | 0,5 |
|  | | **Nội dung** | **Điểm** |
| **Câu 6. (3,0 điểm)**  *Cho đa giác đều  cạnh . Gọi  lần lượt là số tam giác và số tứ giác lập ra từ các đường chéo của đa giác đều đã cho. Tìm  biết* . | | | **3,0** |
|  | | Gọi số đỉnh của đa giác đều  cạnh lần lượt là .  Số tam giác có 3 cạnh là 3 đường chéo của đa giác là | 1,0 |
| Xét tứ giác có 4 cạnh là 4 đường chéo của đa giác và có 1 đỉnh là :  Khi đó  không phải là đỉnh của tứ giác. Ta cần chọn thêm các đỉnh  thỏa mãn:  (vì 2 đỉnh của tứ giác không phải là 2 đỉnh kề nhau của đa giác).  Mỗi cách chọn bộ 3 đỉnh như trên là 1 cách chọn bộ 3 số phân biệt trong  số tự nhiên từ  đến  .  Do đó có  tứ giác có đỉnh  thỏa yêu cầu bài toán. | 0,5  0,25 |
| Vì đa giác có  đỉnh và mỗi tứ giác được đếm lặp lại 4 lần (*theo cách đếm trên*) nên số tứ giác có thể lập được từ các đường chéo của đa giác đã cho là | 0,5 |
|  | | Theo giả thiết:  . | 0,5 |
|  | | Đối chiếu giả thiết chọn *n* = 10. | 0,25 |

***\* Lưu ý:***

*Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong hướng dẫn chấm nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.*