Chương

Bài 4. TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác véctơ $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$.
B. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a};\vec{b})$.
C. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}.\vec{b}|.\cos(\vec{a};\vec{b})$.
D. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(\vec{a};\vec{b})$.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa tích vô hướng của hai véctơ.

» Câu 2. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$.Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

A. $8a^2$.
B. $8a$.
C. $8\sqrt{3}a^2$.
D. $8\sqrt{3}a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=4a.4a.\cos60^\circ=4a.4a.\frac{1}{2}=8a^2$.

» Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$.
B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a$.
C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\frac{a^2}{2}$.
D. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a^2$.

Lời giải

Chọn A

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB\perp CD$ do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$.

» Câu 4. Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a};\vec{b})$.
B. $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.
C. $|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2=|\vec{a}.\vec{b}|^2$.
D. $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right)$.

Lời giải

Chọn C

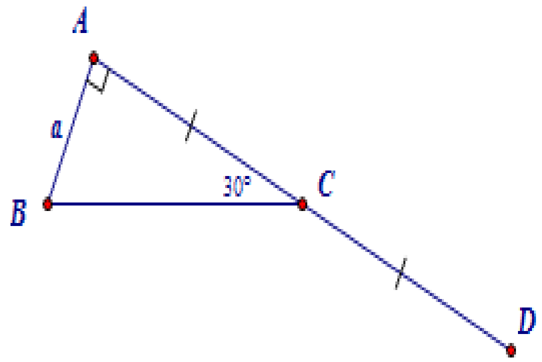
$|\vec{a}\vec{b}|^2=\left[|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})\right]^2=|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2.\cos^2(\vec{a},\vec{b})$ nên C sai.

» Câu 5. Cho tam giác ABC có $\hat{A}=90^0$, $\hat{B}=60^0$ và $AB=a$. Khi đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ bằng

A. $-2a^2$.
B. $2a^2$.
C. $3a^2$.
D. $-3a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi D là điểm đối xứng với A qua C.

Khi đó: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}=CD.CB.\cos 150^\circ=a\sqrt{3}.2a.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3a^2$.

» Câu 6. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{-a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D

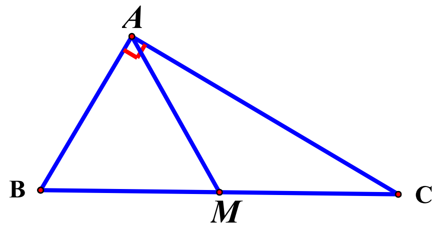
Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=a.a.\cos 120^\circ=-\frac{a^2}{2}$.

» Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a; AC=a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM}$

A. $\frac{a^2}{2}$. **B.** a^2. **C.** $-a^2$. **D.** $-\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có tam giác ABC vuông tại A và có AM là trung tuyến nên $AM=\frac{BC}{2}$.

$AM=\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt{AB^2+AC^2}}{2}=\frac{\sqrt{a^2+3a^2}}{2}=a$.

Tam giác AMB có $AB=BM=AM=a$ nên là tam giác đều. Suy ra góc $\widehat{MAB}=60^\circ$.

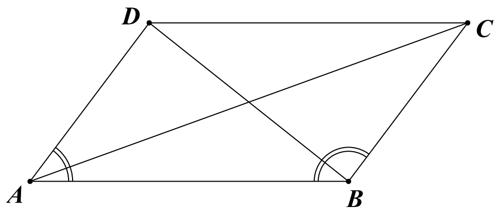
Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=-|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AM}|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})=-a.a\cos 60^\circ=-\frac{a^2}{2}$.

» Câu 8. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



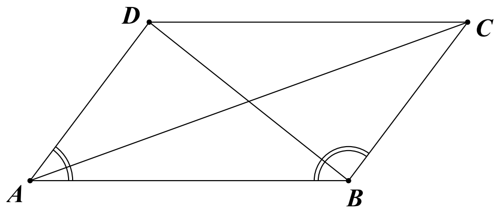
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=AB.AD.\cos\widehat{BAD}=2.1.\cos 60^\circ=1$.

» Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ bằng

A. -1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Theo giả thiết: $\widehat{BAD}=60^\circ \Rightarrow \widehat{ABC}=120^\circ$.

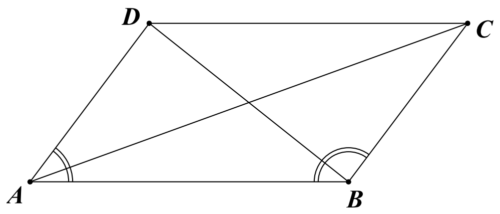
$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=AB.BC.\cos\widehat{ABC}=2.1.\cos 120^\circ=-1$.

» Câu 10. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60^\circ$. Độ dài đường chéo AC bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** 5. **D.** $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

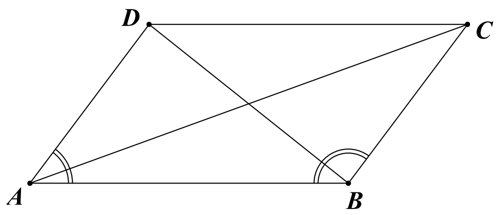
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\Rightarrow \overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow AC^2=2^2+1^2+2.1\Rightarrow AC=\sqrt{7}$.

» Câu 11. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60^\circ$. Độ dài đường chéo BD bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A



$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\Rightarrow \overrightarrow{BD}^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow BD^2=2^2+1^2+2.(-1)$

$\Rightarrow BD=\sqrt{3}$.

» Câu 12. Cho các véc tơ $\vec{a};\vec{b}$ và $\vec{c}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}|=x, |\vec{b}|=y$ và $|\vec{c}|=z$ và $\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$. Tính $A=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$.

A. $A=\dfrac{3x^2-z^2+y^2}{2}$. **B.** $A=\dfrac{3z^2-x^2-y^2}{2}$. **C.** $A=\dfrac{3y^2-x^2-z^2}{2}$. **D.** $A=\dfrac{3z^2+x^2+y^2}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-2\vec{c}$.

$\Rightarrow \vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2A=4\vec{c}^2$.

$\Rightarrow \left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2=\left(-2\vec{c}\right)^2$.

Sử dụng tính chất bình phương vô hướng bằng bình phương độ dài ta có:

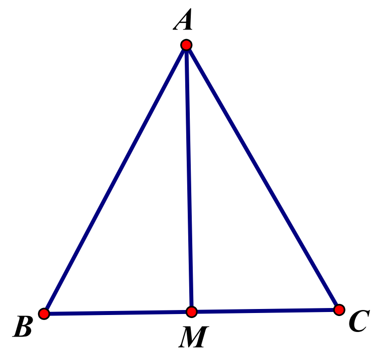
$x^2+y^2+z^2+2A=4z^2\Rightarrow A=\dfrac{3z^2-x^2-y^2}{2}$.

» Câu 13. Cho ΔABC đều; $AB=6$ và M là trung điểm của BC. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA}$ bằng

A. -18. **B.** 27. **C.** 18. **D.** -27.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)=\widehat{BAM}=30^\circ$.

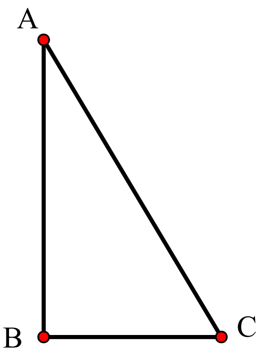
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AM}|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}) = -6.\frac{6\sqrt{3}}{2}.\cos 30^\circ = -27.$$

» Câu 14. Cho tam giác ABC vuông tại B, $BC = a\sqrt{3}$. Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

A. $3a^2$. **B.** $\frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-3a^2$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}|.|\overrightarrow{CB}|.\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}) = -AC.CB.\cos\widehat{ACB} = -AC.CB.\frac{CB}{AC} = -BC^2 = -3a^2$.

» Câu 15. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a},\vec{b}) = 30^0$. Tính $|\vec{a}+\vec{b}|$.

A. $\sqrt{11}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{12}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(|\vec{a}+\vec{b}|\right)^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$,

$\Rightarrow \left(|\vec{a}+\vec{b}|\right)^2 = 4 + 3 + 2.2.\sqrt{3}.\cos 30^0 = 13 \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{13}$.

» Câu 16. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D; $AB = AD = a, CD = 2a$. Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ bằng

A. $-a^2$. **B.** 0. **C.** $\frac{3a^2}{2}$. **D.** $\frac{-a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

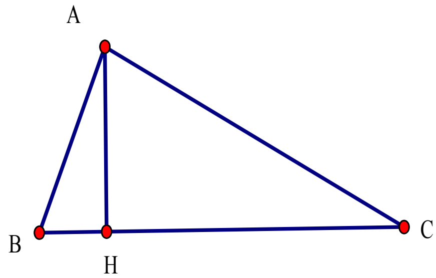
Ta có: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}) = AD^2 - 2AB^2 - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$
$= AD^2 - 2AB^2 = -a^2$.

» Câu 17. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a; BC = 2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = a^2$. **B.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. **C.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 2a^2$. **D.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Vẽ $AH \perp BC, H \in BC$.

Có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=BH.BC=BA^2=a^2$.

» Câu 18. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=4$. Kết quả $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ bằng

A. 16. **B.** 0. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Vì $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\widehat{ABC}$ nên $\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\cos\widehat{ABC}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{4}{BC}$.

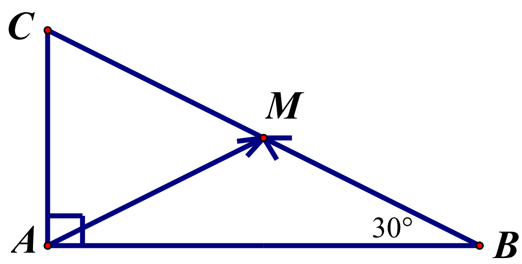
Do đó $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=AB.BC.\dfrac{4}{BC}=4.4=16$

» Câu 19. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B}=30^\circ, AC=2$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính giá trị của biểu thức $P=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$.

A. $P=-2$. **B.** $P=2\sqrt{3}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $P=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}).\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BM}^2$

$BC=\dfrac{AC}{\sin 30^\circ}=4;\ AB=AC.\cot 30^\circ=2\sqrt{3};\ BM=2$

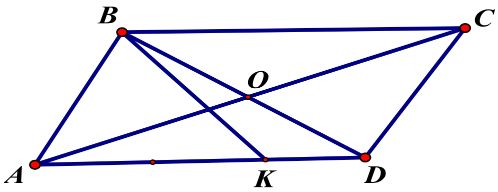
$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2=4;\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}=2\sqrt{3}.2.\cos 150^\circ=-6 \Rightarrow P=-2$

» Câu 20. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=2a, AD=3a, \widehat{BAD}=60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=-2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}$

A. $3a^2$. **B.** $6a^2$. **C.** 0. **D.** a^2.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Khi đó $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -AB^2 + \frac{2}{3}AD^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}$

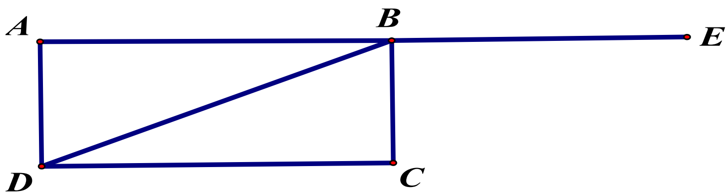
$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = -4a^2 + \frac{2}{3}.9a^2 - \frac{1}{3}2a3a\cos 60^\circ = a^2$

» Câu 21. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8, AD = 5$. Tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = 62$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = -64$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = -62$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = 64$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử E là điểm đối xứng với A qua B ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$

Xét ΔABD có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{89}$

Xét ΔABD có $\cos\widehat{ABD} = \frac{AB}{BD} = \frac{8}{\sqrt{89}}$ suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BD}\right) = \cos\widehat{DBE} = -\cos\widehat{ABD} = -\frac{8}{\sqrt{89}}$

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BD}\right) = 8.\sqrt{89}.\left(\frac{-8}{\sqrt{89}}\right) = -64$

» Câu 22. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a}.\vec{b} = -\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

A. $\alpha = 90^0$. **B.** $\alpha = 0^0$. **C.** $\alpha = 45^0$. **D.** $\alpha = 180^0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\alpha$. Mà $\vec{a}.\vec{b} = -\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$ nên $\cos\alpha = -1$. Suy ra, $\alpha = 180^0$.

» Câu 23. Cho hai véctơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác véctơ-không thỏa mãn $\vec{a}.\vec{b} = -\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng:

A. $\left(\vec{a};\vec{b}\right) = 45^0$. **B.** $\left(\vec{a};\vec{b}\right) = 0^0$. **C.** $\left(\vec{a};\vec{b}\right) = 180^0$. **D.** $\left(\vec{a};\vec{b}\right) = 90^0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases} \vec{a}\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}| \\ \vec{a}\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}) \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{a};\vec{b}) = -1 \Leftrightarrow (\vec{a};\vec{b}) = 180^0$.

» Câu 24. Cho hai véctơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a}-\vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai véctơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.

A. $\alpha = 60^0$. **B.** $\alpha = 30^0$. **C.** $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$|\vec{a}-\vec{b}| = 4 \Leftrightarrow (\vec{a}-\vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 16 \Leftrightarrow 4^2 - 2.4.3.\cos\alpha + 3^2 = 16 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{3}{8}$

» Câu 25. Cho hai vectơ $\vec{a};\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}|-\vec{a}|.|\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a};\vec{b}$ là

A. 60°. **B.** 120°. **C.** 150°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn A

Ta có $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$.

Vậy $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{1}{2}|-\vec{a}|.|\vec{b}| \Rightarrow \cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 60^\circ$.

» Câu 26. Cho hai vecto $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$ và hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. 120°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn C

Vì hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$(\vec{a}+\vec{b}).(2\vec{a}-\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2.|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b}) = 0$

$\Leftrightarrow 2.(\sqrt{2})^2 - 2^2 + \sqrt{2}.2.\cos(\vec{a},\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 90^\circ$.

» Câu 27. Cho hai điểm B,C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là :

A. Đường tròn đường kính BC. **B.** Đường tròn $(B;BC)$.

C. Đường tròn $(C;CB)$. **D.** Một đường khác.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BC.

» Câu 28. Cho ba điểm A,B,C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ là :

A. Đường tròn đường kính AB.

B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC.

C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC.

D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}\right).\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CB}=0$

Tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC.

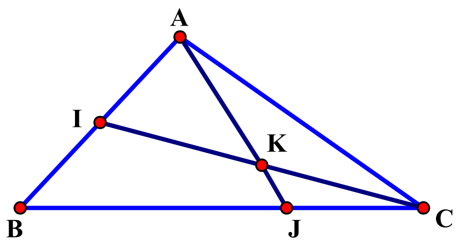
» Câu 29. Cho tam giác ABC, điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB, điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$. Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $\left(3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=0$. Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.

A. Đường tròn đường kính IJ. **B.** Đường tròn đường kính IK.

C. Đường tròn đường kính JK. **D.** Đường trung trực đoạn JK.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=4\overrightarrow{MK}$.

Lấy điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$. Ta có $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}}{4}+\frac{\overrightarrow{AC}}{2}$, mà $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$

nên $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{AK}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lại có $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Suy ra J là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng BC xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Ta có $3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{MK}+3\overrightarrow{KJ}=3\overrightarrow{MJ}$.

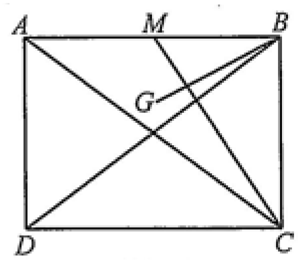
Như vậy $\left(3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=0 \Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{MJ}\right).\left(4\overrightarrow{MK}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{MK}=0$.

Từ đó suy ra điểm M thuộc đường tròn đường kính JK.

Vì J, K là các điểm cố định nên điểm M luôn thuộc một đường tròn đường kính JK là đường tròn cố định.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» Câu 30. Cho hình chữ nhật $ABCD, AB = 4a, AD = 3a$. Gọi M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ACM



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BC}$		
(b)	$\overrightarrow{BG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$		
(c)	$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$		
(d)	$\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CM} = -a^2.$		

✍ *Lời giải*

(a) $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BC}$

Ta có: $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$.

» Chọn SAI.

(b) $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$

Vì G là trọng tâm của tam giác ACM nên

$3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$

» Chọn SAI.

(c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BC = AD = 3a, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$.

» Chọn ĐÚNG.

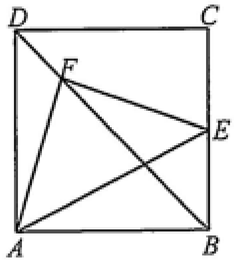
(d) $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CM} = -a^2.$

Ta có: $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CM} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right)$

$= \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2 = \frac{1}{4}(4a)^2 - \frac{1}{3} \cdot 4a \cdot 3a - \frac{1}{3}(3a)^2 = -3a^2.$

» Chọn SAI.

» Câu 31. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Lấy E là trung điểm của BC, điểm F thoả mãn $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$ Khi đó:



(a)	$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$		
(b)	$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AD}.$		
(c)	$\overrightarrow{EF}=\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$		
(d)	Tam giác AEF vuông cân		

Lời giải

(a) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Ta có: $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AD}.$

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}.$$

» Chọn SAI.

(c) $\overrightarrow{EF}=\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)-\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

» Chọn ĐÚNG.

(d) *Tam giác AEF vuông cân.*

Ta có: $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$

$=\frac{-3}{16}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{3}{16}\overrightarrow{AD}^2=0\Rightarrow AF\perp EF.$

Ta có: $\overrightarrow{AF}^2=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)^2=\frac{1}{16}\overrightarrow{AB}^2+\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{9}{16}\overrightarrow{AD}^2=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}^2$.

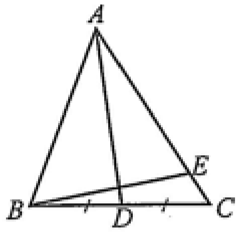
Và $\overrightarrow{EF}^2=\left(\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)^2=\frac{9}{16}\overrightarrow{AB}^2-\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{16}\overrightarrow{AD}^2=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}^2$.

$\Rightarrow AF^2=EF^2=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}^2\Rightarrow AF=EF$. Vậy tam giác AEF vuông cân tại F.

Chú ý: Ta có thể chứng minh tam giác AEF vuông bằng định lí Pythagore.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 32. Cho tam giác ABC có có $AB = 4\sqrt{2}, AC = 6, \widehat{BAC} = 45^\circ$. Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng BC. Điểm E thoả mãn $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC} (k \in \mathbb{R})$ (Hình). Khi đó:



(a)	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$		
(b)	$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$		
(c)	$BC = 3\sqrt{5}$		
(d)	$AD \perp BE$ khi $k = \frac{14}{15}$		

✍ Lời giải

(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = 4\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \cos 45^\circ = 24$.

» Chọn SAI.

(b) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

» Chọn ĐÚNG.

(c) $BC = 3\sqrt{5}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Khi đó:

$\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = 6^2 - 2 \cdot 24 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 20 \Rightarrow BC = 2\sqrt{5}$.

» Chọn SAI.

(d) $AD \perp BE$ *khi* $k = \frac{14}{15}$.

Ta có: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Từ đó, ta có: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left[24k + 6^2 \cdot k - \left(4\sqrt{2}\right)^2 - 24\right] = 30k - 28.$

Khi đó $AD \perp BE \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \Leftrightarrow 30k - 28 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{14}{15}$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 33. Cho tam giác ABC đều, đường cao AH. Khi đó:

(a)	$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=30^\circ$		
(b)	$\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CB}\right)=90^\circ$		
(c)	$\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BC}\right)=120^\circ$		
(d)	$\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BA}\right)=130^\circ$		

✍ *Lời giải*

(a) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=30^\circ$

Ta có: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=60^\circ$.

» Chọn SAI.

(b) $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CB}\right)=90^\circ$

Ta có: $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CB}\right)=90^\circ$ do $AH\perp BC$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BC}\right)=120^\circ$

Cách giải 1: Gọi D là điểm đối xứng với B qua C, ta có: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$.

Khi đó: $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)=\widehat{ACD}=120^\circ$.

Cách giải 2: Áp dụng tính chất được rút ra từ định nghĩa:

$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=180^\circ-\left(-\vec{a},\vec{b}\right)=180^\circ-\left(\vec{a},-\vec{b}\right)$, ta được:

$\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BC}\right)=180^\circ-\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=180^\circ-\widehat{ACB}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BA}\right)=130^\circ$

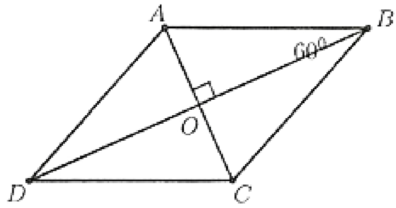
Ta có: $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BA}\right)=180^\circ-\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB}\right)=180^\circ-\widehat{BAH}=180^\circ-30^\circ=150^\circ$.

» Chọn SAI.

» Câu 34. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 2 và góc B bằng 60°. Khi đó:

(a)	$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^\circ$		
(b)	$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DA}\right)=30^\circ$		
(c)	$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=3$		
(d)	$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BA}=-3$		

✍ *Lời giải*



(a) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^\circ$

Xét hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC}=60^\circ \Rightarrow \widehat{BAD}=120^\circ$;

Tam giác ABC có $AB=BC=2,\widehat{ABC}=60^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ đều cạnh $2 \Rightarrow OB=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Ta có: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=60^\circ$,

» Chọn ĐÚNG.

(b) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DA}\right)=30^\circ$

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DA}\right)=180^\circ-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=180^\circ-\widehat{BAD}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

» Chọn SAI.

(c) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=3$

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\left|\overrightarrow{DA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC}\right|\cos\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)=DA\cdot DC\cdot\cos\widehat{ADC}=2\cdot 2\cdot\cos 60^\circ=2$;

» Chọn SAI.

(d) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BA}=-3$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}=-\left|\overrightarrow{BO}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\cos\widehat{ABO}=-BO\cdot BA\cdot\cos 30^\circ=-\sqrt{3}\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-3.$

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 35. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a,BC=2a$. Khi đó:

(a)	$\widehat{ACB}=60^\circ$		
(b)	$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=a^2$		
(c)	$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=3a^2$.		
(d)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-4a^2$		

✍ *Lời giải*

(a) $\widehat{ACB}=60^\circ$

Xét tam giác vuông ABC: $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=a\sqrt{3}$,

$\cos\widehat{ABC}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{a}{2a}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{ABC}=60^\circ\Rightarrow\widehat{ACB}=30^\circ$.

» Chọn SAI.

(b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=a^2$

Ta có: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=BA\cdot BC\cdot\cos\widehat{ABC}=a\cdot 2a\cdot\dfrac{1}{2}=a^2$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=3a^2$.

Ta có: $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=-\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA}\right|\cos\widehat{ACB}$

$=-CB\cdot CA\cdot\cos 30^\circ=-2a\cdot a\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-3a^2$.

» Chọn SAI.

(d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-4a^2$

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

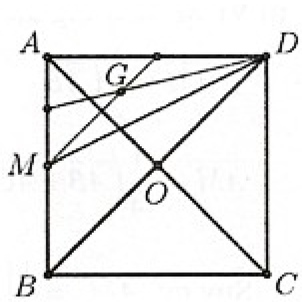
Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-a^2, \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-3a^2$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-a^2-3a^2=-4a^2$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 36. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, có cạnh a. Biết M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM. Khi đó:

(a)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=a^2$		
(b)	$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{3}$		
(c)	$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$		
(d)	$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=a^2$		



Lời giải

(a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=a^2$

Độ dài đường chéo hình vuông $ABCD$ cạnh a là $AC=BD=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

$=-AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}=-a\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=-a^2$

» Chọn SAI.

(b) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{3}$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right)=AM\cdot AC\cdot\cos\widehat{CAM}=\frac{a}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=\frac{a^2}{2}$.

» Chọn SAI.

(c) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$

Ta có: $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\left|\overrightarrow{DA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DB}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=DA\cdot DB\cdot\cos\widehat{ADB}-\frac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\cos\widehat{CAD}$

$=a\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos45^\circ-\frac{1}{2}a\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos45^\circ=a^2-\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}a^2.$

» Chọn ĐÚNG.

(d) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=a^2$

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).

Do đó: $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)$

$=\underbrace{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}_{0}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos\widehat{ACB}=a\cdot a\sqrt{2}\cos45^\circ=a^2$

(trong đó $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ vì $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$).

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 37. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh bằng a. Khi đó:

(a)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=2a^2$		
(b)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=a^2$		
(c)	$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OC}=-a^2$		
(d)	$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)=a^2$		

✍ ***Lời giải***

(a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=2a^2$ ***;***

Do $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)=0^0$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=AB\cdot DC\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)=a\cdot a\cdot\cos0^\circ=a^2.$

» Chọn SAI.

(b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=a^2$ ***;***

Hai vectơ $\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OC}$ cùng hướng, do đó $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}\right)=\widehat{BAO}=45^\circ$

Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=AB\cdot OC\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}\right)=a\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\cos45^\circ=\frac{a^2}{2}$.

» Chọn SAI.

(c) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OC}=-a^2$ ***;***

Hai vectơ $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OC}$ ngược hướng, do đó $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OC}\right)=180^\circ$.

Suy ra $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OC}=CA\cdot OC\cdot\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OC}\right)=a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\cos180^\circ=-a^2$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=a^2$

Ta có: $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})$

$=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ (trong đó $AC\perp BD\Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$).

Ta có: $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cdot\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=CA\cdot CB\cdot\cos\widehat{ACB}=a\sqrt{2}\cdot a\cdot\cos45^\circ=a^2$.

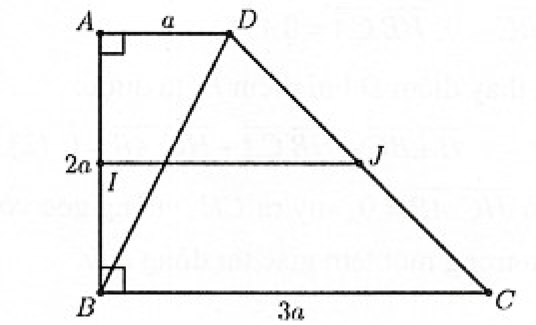
Vậy $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=a^2$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 38. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, biết $AD=a, BC=3a$ và cạnh $AB=2a$. Khi đó:

(a)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-4a^2$		
(b)	$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=2a^2$		
(c)	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-2a^2$		
(d)	Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB,CD. Khi đó $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ}=6a^2$		

Lời giải



(a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-4a^2$

Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$. Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}+\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}_{0}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}^2=-AB^2=-4a^2$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=2a^2$

Tính $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$. Ta có: $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=BC\cdot BD\cdot\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})=BC\cdot BD\cdot\cos\widehat{DBC}$

$=BC\cdot BD\cdot\cos\widehat{BDA}=BC\cdot BD\cdot\dfrac{AD}{BD}=BC\cdot AD=3a^3$.

(trong đó $\widehat{DBC}=\widehat{BDA}$ vì là hai góc so le trong).

» Chọn SAI.

(c) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-2a^2$

Tính $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$.

Ta có: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=-\overrightarrow{AB}^2+0+0+BC\cdot AD\cdot\cos 0^0=-AB^2+3a\cdot a\cdot 1=-(2a)^2+3a^2=-a^2$.

» Chọn SAI.

(d) *Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB,CD. Khi đó $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ}=6a^2$*

Ta có: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{IJ}=\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}}_{0}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IJ}=BC\cdot IJ\cdot\cos 0^0=3a\cdot 2a\cdot 1=6a^2$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 39. Cho tam giác đều ABC, đường cao AH. Khi đó:

(a)	$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^\circ$		
(b)	$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=120^\circ$		
(c)	$\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC}\right)=90^\circ$		
(d)	$\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{AB}\right)=120^\circ$		

Lời giải

(a) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^\circ$

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=60^\circ$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=120^\circ$

Dựng hình bình hành $ABCD$, ta có: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

Suy ra: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\widehat{BAD}=180^\circ-\widehat{ABC}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC}\right)=90^\circ$

Tam giác ABC đều nên $AH\perp BC$. Suy ra $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC}\right)=90^\circ$

» Chọn ĐÚNG.

(d) $\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{AB}\right)=120^\circ$

Dựng hình bình hành $ABEH$, ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HE}$.

Suy ra: $\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HE}\right)=\widehat{AHE}=180^\circ-\widehat{BAH}=180^\circ-30^\circ=150^\circ$.

» Chọn SAI.

» Câu 40. Cho tam giác ABC đều có cạnh a, có trọng tâm G. Khi đó:

(a)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$		
(b)	$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{4}$		

(c)	$\widehat{AGB}=120^\circ$		
(d)	$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\frac{a^2}{6}$		

✍ *Lời giải*

(a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}a^2$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{4}$

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AG}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AC}\right)=AG\cdot AC\cdot\cos 30^\circ=\frac{1}{2}a^2$

» **Chọn** SAI.

(c) $\widehat{AGB}=120^\circ$

Tam giác AGB có $\widehat{GAB}=\widehat{GBA}=30^\circ\Rightarrow\widehat{AGB}=120^\circ$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\frac{a^2}{6}$

$\Rightarrow\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=GA\cdot GB\cdot\cos\widehat{AGB}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}\cos 120^\circ=-\frac{a^2}{6}$

» **Chọn** SAI.

» Câu 41. Cho tam giác ABC có $AB=2a, AC=3a, \widehat{BAC}=60^\circ$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng BC. Điểm J thuộc đoạn AC thỏa mãn: $12AJ=7AC$. Khi đó:

(a)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4a^2$		
(b)	$\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$		
(c)	$\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$		
(d)	$AI\perp BJ$		

✍ *Lời giải*

(a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4a^2$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cos\widehat{BAC}=2a\cdot 3a\cdot\cos 60^\circ=3a^2$

» **Chọn** SAI.

(b) $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Do I là trung điểm BC nên $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

» **Chọn** SAI.

(c) $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$$

» Chọn ĐÚNG.

(d) $AI\perp BJ$

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}^2+\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-4a^2+\frac{7}{12}\cdot 3a^2-3a^2+\frac{7}{12}\cdot 9a^2\right)=0$$

Vậy $AI\perp BJ$

» Chọn ĐÚNG.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 42. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB=8$; đáy nhỏ $CD=4$; đường cao $AD=6$; I là trung điểm của AD. Tính $\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{ID}$.

Lời giải

✓Trả lời: -18

$$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{ID}$$

$$=-\overrightarrow{IA}^2+IB\cdot ID\cdot\cos BID$$

$$=-IA^2-IB\cdot ID\cdot\cos BIA$$

$$=-IA^2-IB\cdot ID\cdot\frac{IA}{IB}=-IA^2-IA^2=-2IA^2=-2\cdot 3^2=-18$$

» Câu 43. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=1, AC=2\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AM}$.

Lời giải

✓Trả lời: -0,5

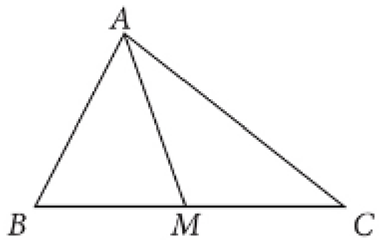
Tam giác AMB có $AM=BM=AB$ nên là tam giác đều. Suy ra $\widehat{MAB}=60^\circ$.

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)=-1.1\cdot\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}.$$

» Câu 44. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Khi đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AM^2-kBC^2$. Vậy $k=?$

Lời giải

✓Trả lời: 0,25



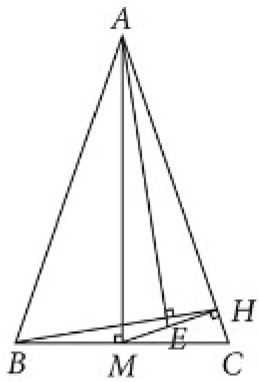
Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2-\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2}{4}=\dfrac{4AM^2-BC^2}{4}=AM^2-\dfrac{1}{4}BC^2$.

» **Câu 45.** Cho tam giác ABC cân tại $A;M$ là trung điểm của BC,H là hình chiếu của M trên $AC;E$ là trung điểm của MH. Tính $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BH}$

Lời giải

✓Trả lời: 0

Ta có biến đổi tích vô hướng như sau:



$2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BH}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AH})\cdot(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MH})$
$=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BM}$
$=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MH}+(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MH})\cdot\overrightarrow{BM}$
$=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MC}$
$=\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MH}$
$=\overrightarrow{MH}^2+\overrightarrow{MH}^2=0.$

Suy ra $AE\perp BH$ (đpcm).

Suy ra $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BH}=0$

» **Câu 46.** Cho tam giác ABC có $BC=a,CA=b,AB=c$. Biết M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AM}^2$ ta thu được kết quả $\dfrac{m\left(b^2+c^2\right)-a^2}{n}$, với $m;n$ là các số tự nhiên. Tính $S=m^n$

Lời giải

✓Trả lời: 16

Vì M là trung điểm của BC, nên: $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$;

$\overrightarrow{AM}^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2\right)$. Mà $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$;

Suy ra: $\overrightarrow{AM}^2=\dfrac{1}{4}\left(c^2+2\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}+b^2\right)=\dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\n=4\end{cases}\Rightarrow S=m^n=16$.

(đây cũng là công thức để tính độ dài đường trung tuyến tam giác).

» **Câu 47.** Cho nửa đường tròn đường kính AB. Biết rằng AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E. Tính $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BD}$ biết $AB=2$.

Lời giải

✓Trả lời: 4

Ta có: $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AE}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{BE}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$
$=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AD}.$
Vì AB là đường kính nửa đường tròn nên
$\widehat{ADB}=90^\circ, \widehat{ACB}=90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}=0, \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AD}=0.$
Khi đó: $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}$
$=\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2=4$

» Câu 48. Cho hình vuông $ABCD$, điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM=\frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm CD. Khi đó BMN là tam giác vuông và $MB=k\cdot MN$, với k là số tự nhiên. Xác định k.

Lời giải

✓ Trả lời: 1

Đặt $\overrightarrow{AD}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}$.

Khi đó: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{4}(-\vec{a}+3\vec{b})$ và

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{4}(3\vec{a}+\vec{b})$.

Hơn nữa: $\overrightarrow{MB}^2=\frac{1}{16}(-\vec{a}+3\vec{b})^2=\frac{1}{16}(\vec{a}^2+9\vec{b}^2-6\vec{a}\cdot\vec{b})=\frac{1}{16}(AD^2+9AB^2-0)=\frac{5}{8}AB^2$;

$\overrightarrow{MN}^2=\frac{1}{16}(3\vec{a}+\vec{b})^2=\frac{1}{16}(9\vec{a}^2+\vec{b}^2+6\vec{a}\cdot\vec{b})=\frac{1}{16}(9AD^2+AB^2+0)=\frac{5}{8}AB^2$.

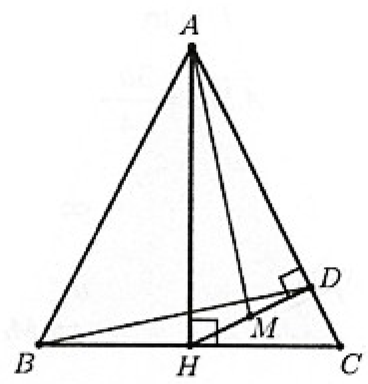
Suy ra $MB=MN$

Vậy $k=1$

» Câu 49. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC, D là hình chiếu của H trên AC, M là trung điểm của HD. Tính $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}$

Lời giải

✓ Trả lời: 0



Ta cần chứng minh: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

Ta có: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD}$ và $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD}\right)$

Do đó: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HD}\right)$

mà $\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}=0(\text{ do } AH\perp BC)\\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HD}=0(\text{ do } HD\perp AC)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HC}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HD}+\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HD}\right)\cdot\overrightarrow{HC}\right]$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HD}+\underbrace{\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}}_{0}+\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{HC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{HD}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

» Câu 50. Cho hai điểm A,B cố định có khoảng cách bằng 1. Tập hợp điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{3a^2}{4}$ là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Lời giải

✓ Trả lời: 1

Gọi I là trung điểm của AB ta có:

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow MI^2-IA^2=\frac{3}{4}$

$\overset{IA=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} MI^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow MI=1$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R=1$.

» Câu 51. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k. Tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=k$ là đường tròn có bán kính dạng $R=n\cdot\sqrt{\frac{k+a^2}{m}}$, với $m;n$ là các số tự nhiên. Tính $S=m+n$

Lời giải

✓ Trả lời: 3

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$

Ta có $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=MI^2-IA^2$.

Hoàn toàn tương tự, ta có: $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=MI^2-IB^2$.

Khi đó: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=k\Leftrightarrow 2MI^2-IA^2-IB^2=k\Leftrightarrow 2MI^2-2IA^2=k$

$\Leftrightarrow MI^2=\frac{k}{2}+IA^2\Leftrightarrow MI^2=\frac{k}{2}+\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow MI=\sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$

(trong đó $IA^2=\left(\frac{AC}{2}\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$).

Nếu $k<-a^2$: Tập hợp điểm M là tập rỗng.

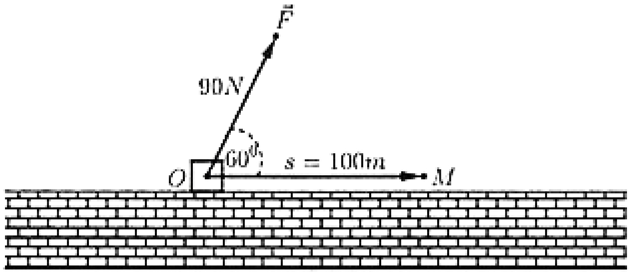
Nếu $k=-a^2$ thì $MI=0\Leftrightarrow M\equiv I$ (điểm M trùng với điểm I).

Nếu $k>-a^2$ thì $MI=\sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$.

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $R=\sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$.

Khi đó $\begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases}\Rightarrow S=m+n=3$

» Câu 52. Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn $90N$ làm một vật dịch chuyển một đoạn $100m$. Biết lực $\vec{F}$ hợp với hướng dịch chuyển một góc 60°. Công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ là bao nhiêu Jun?



✍ Lời giải

✓ Trả lời: 4500

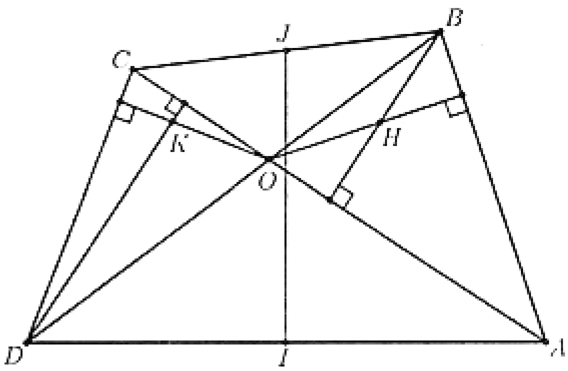
Đặt $OM=s$ là đoạn đường mà vật di chuyển được với O là điểm đặt vật ban đầu. Công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ là:

$A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{OM}=|\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{OM}|\cdot\cos\left(\vec{F},\overrightarrow{OM}\right)=90\cdot100\cdot\cos60^\circ=4500J.$

» Câu 53. Cho tứ giác lồi $ABCD$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABO và CDO. Gọi I,J lần lượt là trung điểm AD và BC. Tính $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{IJ}$?

✍ Lời giải

✓ Trả lời: 0



Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} \\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BJ} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

Suy ra: $\overrightarrow{HK} \cdot 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HK}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}\right) = \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{DB}$

$= \left(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DK}\right)\overrightarrow{AC} + \left(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK}\right)\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB}\right) = \overrightarrow{AC} \cdot \vec{0} = 0$.

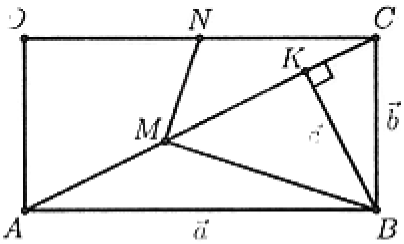
Vậy $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$

» Câu 54. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ $BK \perp AC, K \in AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK và CD. Tìm số đo góc $\widehat{BMN}$.

Trả lời: 90°

✍ Lời giải

✓Trả lời:



Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{BK} = \vec{c}$ và $BA = a, BC = b, BK = c$.

Khi đó: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}(2\vec{b} - \vec{c})$.

Do đó: $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}(2\vec{b} - \vec{c})(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{4}(2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c}^2)$

$= \frac{1}{4}\left[2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b} - \vec{a})\vec{c} + (\vec{b} - \vec{c})\vec{c}\right]$

Ta thấy rằng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ do $\vec{a} \perp \vec{b}$; $(\vec{b} - \vec{a})\vec{c} = \overrightarrow{AC} \cdot \vec{c} = 0$

Do $AC \perp BK$; $(\vec{b} - \vec{c})\vec{c} = \overrightarrow{KC} \cdot \vec{c} = 0$ do $CK \perp BK$.

Vì vậy $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Rightarrow \widehat{BMN} = 90^\circ$.

» Câu 55. Cho đoạn $AB = 20$. Tồn tại điểm M sao cho $T = 3MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị bé nhất $T_{\min}$. Tính giá trị $T_{\min}$?

✍ Lời giải

✓Trả lời: 480

Gọi điểm I thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} + 2\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$

Vậy điểm I thuộc đoạn AB và $IA = \frac{2}{5} \cdot AB = \frac{2}{5} \cdot 20 = 8, IB = 12$.

Ta có $T = 3MA^2 + 2MB^2 = 3\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 = 3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$

$= 3\overrightarrow{MI}^2 + 6\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{MI}^2 + 4\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IB}^2$

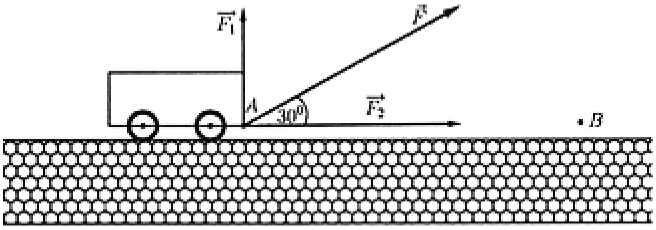
$= 5MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\underbrace{3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}\right) = 5MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2$.

Ta có $\left(3IA^2 + 2IB^2\right)$ là hằng số do ba điểm A, B, I cố định.

Do đó: T đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow 5MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ bé nhất $\Leftrightarrow$ Điểm M trùng với điểm I.

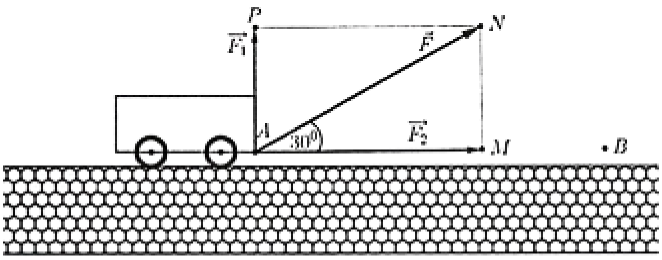
Khi đó giá trị T nhỏ nhất là $: T_{\min} = 3IA^2 + 2IB^2 = 3\cdot 8^2 + 2\cdot 12^2 = 480$.

» Câu 56. Một chiếc xe được kéo bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn $50N$, di chuyển theo quãng đường từ A đến B có chiều dài $200m$. Cho biết góc hợp bởi lực $\vec{F}$ và $\overrightarrow{AB}$ bằng 30° và lực $\vec{F}$ được phân tích thành hai lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}$. Gọi $m; n; k$ lần lượt là các công sinh ra bởi các lực $\vec{F}, \vec{F_1}, \overrightarrow{F_2}$. Khi đó tính $S = m - n - k$.



Lời giải

✓ Trả lời: 0



Đặt $\vec{F} = \overrightarrow{AN}, \vec{F_1} = \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{AM}$.

Khi đó $AMNP$ là hình bình hành, mà $AM \perp AP$ nên $AMNP$ là hình chữ nhật.

Ta có: $AN = 50, AM = AN\cdot\cos 30^\circ = 50\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$,

$AP = MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = 25.$

Lực $\vec{F}$ sinh ra công $A = |\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos 30^\circ = 50\cdot 200\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5000\sqrt{3}\,J$.

Lực $\vec{F_1}$ có độ lớn $25N$ và tạo với phương dịch chuyển góc 90° nên công sinh ra là $A_1 = \left|\vec{F_1}\right|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos 90^\circ = 0J$.

Lực $\vec{F_2}$ có độ lớn $25\sqrt{3}N$ và tạo với phương dịch chuyển góc 0° nên công sinh ra là $A_2 = \left|\vec{F_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos 0^0 = 25\sqrt{3} \cdot 200 \cdot 1 = 5000\sqrt{3}\,J$.

Khi đó $S = m - n - k = 5000\sqrt{3} - 0 - 5000\sqrt{3} = 0$

» **Câu 57.** Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AC = 7\,cm$ và $BC = 14\,cm$. Tính côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CB}$.

✍ ***Lời giải***

✓ ***Trả lời: -0,5***

Ta có: $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = 180^\circ - \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = 180^\circ - \widehat{ACB}$.

Mà $\cos(\widehat{ACB}) = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{1}{2}$ nên $\widehat{ACB} = 60^\circ$.

Vậy $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ hay $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = \cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$

» **Câu 58.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN = 1$ và P là trung điểm BC. Tính $\cos\widehat{MNP}$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục*

✍ ***Lời giải***

✓ ***Trả lời: 0,8***

Ta có $\overrightarrow{NM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{NP} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Suy ra $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = \dfrac{2}{9} \cdot 9 + \dfrac{1}{2} \cdot 9 = \dfrac{13}{2}$

Mặt khác $\left|\overrightarrow{NM}\right| = \sqrt{10}, \left|\overrightarrow{NP}\right| = \dfrac{5}{2} \Rightarrow \cos\widehat{MNP} = \dfrac{13}{5\sqrt{10}}$.

» **Câu 59.** Cho tam giác ABC. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tính: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

✍ ***Lời giải***

✓ ***Trả lời: 0***

Vì M là trung điểm BC nên:

$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} \quad (1)$

Tương tự ta có: $2\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} \quad (2)$,

$2\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (3)$

Cộng từng vế (1), (2), (3) được:

$2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ hay $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

» **Câu 60.** Cho tam giác đều ABC cạnh 1 nội tiếp đường tròn (O) bán kính R, M là điểm bất kỳ nằm trên đường tròn (O). Tính $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

✍ ***Lời giải***

✓ ***Trả lời: 2***

Tam giác đều ABC cạnh a nội tiếp đường tròn (O) bán kính R nên O là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ và $R=OA=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Xét: $MA^2+MB^2+MC^2$

$=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2$

$=3\overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$

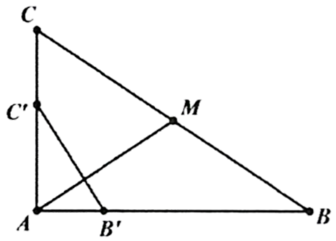
$=6R^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\vec{0}=6\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=2$

Vậy $MA^2+MB^2+MC^2=2$.

» Câu 61. Cho tam giác ABC vuông tại A, trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm B' và C' sao cho $AB\cdot AB'=AC\cdot AC'$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'C'}$

Lời giải

✓Trả lời: 0



Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Do đó, $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'C'}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB'}\right)$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB'}=0-AB\cdot AB'+AC\cdot AC'=0$

» Câu 62. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1$ và $AD=\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Tính $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

✓Trả lời: 0

Ta có: $AC=BD=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Suy ra

$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=-1^2+0+0+\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2=0.$

» Câu 63. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=\sqrt{3}$ và $(\vec{a},\vec{b})=120^\circ$. Tính $|\vec{a}+\vec{b}|$. *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

Lời giải

✓Trả lời: 1,9

Ta có $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\vec{b}}=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}|.|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})}=\sqrt{7-2\sqrt{3}}\approx 1,9$

» Câu 64. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 1. Tập hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=1^2$ là đường tròn bán kính $R=?$

Lời giải

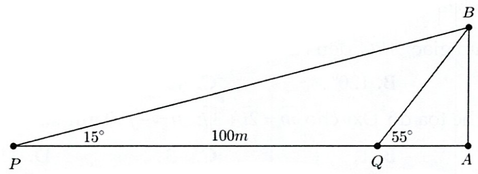
✓Trả lời: 1

Ta có $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=1^2 \Leftrightarrow MO^2-OA^2+MO^2-OB^2=1^2 \Leftrightarrow MO^2=1^2$

$\Leftrightarrow MO=1\left(OA=OB=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm O, bán kính $R=1$.

» Câu 65. Hai chiếc tàu thủy P và Q trên biển cách nhau $100\,m$ và thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển. Từ P và Q người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $\widehat{BPA}=15^\circ$ và $\widehat{BQA}=55^\circ$. Tính chiều cao của tháp (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).*



Lời giải

✓Trả lời: 33

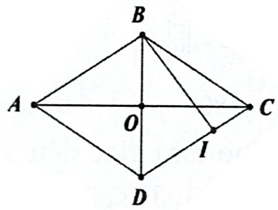
$\frac{BQ}{PQ}=\frac{\sin BPQ}{\sin PBQ}=\frac{\sin 15^\circ}{\sin 40^\circ}\Rightarrow BQ=\frac{PQ\sin 15^\circ}{\sin 40^\circ}$.

$\frac{AB}{BQ}=\sin 55^\circ \Rightarrow AB=BQ\sin 55^\circ=\frac{PQ\sin 15^\circ}{\sin 40^\circ}\cdot\sin 55^\circ\approx 33\,m$

» Câu 66. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có cạnh bằng 1 và $\widehat{ABD}=60^\circ$. Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BI}$.

Lời giải

✓Trả lời: 0,5



Do $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng 1 và $\widehat{ABD}=60^\circ$

Nên ABD và BCD là các tam giác đều cạnh 1.

Ta có:

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AO}\cdot\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DI}\right)=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{AO}\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\cdot\cos 30^\circ=\frac{1}{2}$

» Câu 67. Cho ΔABC đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $MA^2+MB^2=18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Lời giải

✓ ***Trả lời: 2,6***

Gọi I là trung điểm AB. Đưa về vectơ bằng cách chèn điểm I vào tính ra

$2MI^2+IA^2+IB^2=18\Leftrightarrow MI^2=\frac{27}{4}\Leftrightarrow MI=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

» Câu 68. Cho ΔABC đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $MA^2+MB^2+MC^2=18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Lời giải

✓ ***Trả lời: 1,4***

Gọi G là trong tâm tam giác ABC suy ra $GA=GB=GC=\sqrt{3}$

Chèn G vào biến đổi suy ra $3ME^2+GA^2+GB^2+GC^2=18 \Leftrightarrow ME^2=2\Leftrightarrow ME=\sqrt{2}$

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn tâm E bán kính $R=\sqrt{2}$.

» Câu 69. Cho ΔABC đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $2MA^2+MB^2+MC^2=18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? *Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.*

Lời giải

✓ ***Trả lời: 1,7***

Gọi N là điểm thỏa mãn $2\cdot\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ và D là trung điểm BC. Suy ra N là trung điểm $AD.NA=ND=AD:2=\frac{3\sqrt{3}}{4};NB=NC=\frac{\sqrt{39}}{4}$;

Chèn N vào đề ta được $4MN^2+2NA^2+NB^2+NC^2=18$ suy ra $MN=\frac{\sqrt{183}}{8}$

Vậy tập hợp điểm M thỏa đường tròn tâm N bán kính $R=MN=\frac{\sqrt{183}}{8}$

» Câu 70. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm BC và H là trực tâm. Biết $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA}=kBC^2$. Khi đó $k=?$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 0,25***

Ta có M là trung điểm BC

$\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right);\overrightarrow{HM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{HM}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HC}\right)$

$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HC}\right)=\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BC}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}^2=\frac{1}{4}BC^2$$

» Câu 71. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$. Tính $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Lời giải

✓Trả lời: 0

$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2=\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AD}^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{BC}^2=0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\right)=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{BD}\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}\right)=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{DB}\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}\right)=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\right)=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}\cdot2\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

----------------------------------- Hết -----------------------------------

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
https://www.vnteach.com