# CHUYÊN ĐỀ 9: DÃY PHÂN SỐ THEO QUY LUẬT

## DẠNG 1: MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ PHÂN SỐ

1. **Bài tập minh họa:**

**Bài 1**: Tìm số tự nhiên n để phân số A = có giá trị là một số nguyên.

**Bài 2**: Tìm số tự nhiên n để phân số A =

**Bài 3**: Cho phân số: A = với n thuộc số tự nhiên.

1. Với giá trị nào của n thì A rút gọn được.
2. Với giá trị nào của n thì A là số tự nhiên?
3. **Bài tập tự luyện:**

**Bài 4**: Tìm số tự nhiên n để phân số A = có giá trị là số nguyên.

**Bài 5**: Tìm số tự nhiên n để phân số A = sao cho:

1. Có giá trị là số tự nhiên.
2. Là phân số tối giản
3. Với giá trị nào của n trong khoảng 150 đến 170 thì phân số A rút gọn được?

**Bài 6**: Tìm các giá trị nguyên của n để các phân số sau có giá trị là số nguyên:

1. A =
2. B =
3. **DẠNG 2: TÍNH NHANH**
4. **Bài tập minh họa:**

**Bài 1**: Rút gọn biểu thức sau:

1. S =
2. 
3. 
4. .

**Bài 2**: Tính các tổng sau:

1. A =
2. B =
3. C =
4. D =
5. 
6. 
7. **Bài tập tự luyện:**

* A =
* B = 1! +2.2 ! + 3.3 ! + ...... + n .n!
* C =
* D = 9 + 99 + 999 +...... + 99..... .....9

(50 chữ số 9)

* 
* 
* 

1. **DẠNG 3: CHỨNG MINH BIỂU THỨC**
2. **Bài tập minh họa:**

**Bài 1**: Chứng minh rằng các phân số sau tối giản:

**Bài 2**: Chứng minh rằng: 

**Bài 3**: Cho A =1 +

Chứng minh rằng tổng A không phải là số tự nhiên.

**Bài 4** : Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n khác 0 ta đều có:

a) 

b) 

**Bài 5**: Chứng minh rằng với mọi  ta có:



**Bài 6**: Cho . Chứng minh 

**Bài 7**: Tổng bằng phân số . Chứng minh rằng a chia hết cho 149.

1. **Bài tập tự luyện:**

**Bài 8**: Cho . Chứng minh: 

**Bài 9**: Cho . Chứng minh: 

**Bài 10**: Cho . Chứng minh C > 48

**Bài 11**: Cho . Chứng minh 

**Bài 12**: Cho . Chứng minh 

**Bài 13**: Chứng minh với mọi n N; n > 1 ta có:



**Bài 14**: Cho . Chứng minh: 

**Bài 15**: Cho . Chứng minh: 

**Bài 16**: Cho . Chứng minh: 

**Bài 17**: Cho . Chứng minh: 

* **DẠNG 4: TÌM X**

1. **Bài tập minh họa:**

**Bài 1**: Tìm x, biết rằng:

**Bài 2**: Tìm x, biết rằng: 

**Bài 3**: Tìm x, biết rằng: 

**Bài 4**: 1 + 2 + 3 + 4 +.............+ x = 820

* **Bài tập tự luyện:**

**Bài 5**: 1 + 

**Bài 6**: 

**Bài 7**: 

* **DẠNG 5: SO SÁNH PHÂN SỐ**
* **Bài tập minh họa:**

**Bài 1**: Cho  và 

So sánh A và B?

**Bài 2**: Cho A = 1 + 2 + 3 + … + 1000 và B = 1.2.3…11

So sánh A và B?

**Bài 3**: So sánh  với 

**Bài 4**: So sánh  với 

* **Bài tập tự luyện:**

**Bài 1**: Cho và

So sánh A và B?

**Bài 2**: Cho và

So sánh A và B?

**Bài 3**: So sánh  và 

**Bài 4**: So sánh:

* 637 và 1612
* và
* và
* 5299 và 3501
* 323 và 515
* 12723 và 51318
* 199010 + 19909 và 199110
* 3500 và 7300
* 9920 và 999910
* 202303 và 303202
* **DẠNG 5: TÌM GIÁ TRỊ THỎA MÃN BIỂU THỨC**

**Bài 1**: Tìm các số tự nhiên x và y sao cho:

**Bài 2**: Tìm các số nguyên x và y sao cho:

# HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

1. **DẠNG 1: MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ PHÂN SỐ**
2. **Bài tập minh họa:**

**Bài 1**: Tìm số tự nhiên n để phân số A = có giá trị là một số nguyên.

A = => 2A = = 1 + Để 2A nguyên thì 2n – 8 phải là ước của 28

Ta có bảng đáp số:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2n - 8 | n | 2A | A | Kết luận |
| -28 | -10 | -1 | -1/2 | L |
| -14 | -3 | -2 | -1 | TM |
| -7 | ½ | -4 | -2 | L |
| -4 | 2 | -7 | -7/2 | L |
| -2 | 3 | -14 | -7 | TM |
| -1 | 7/2 | -28 | -14 | L |
| 1 | 9/2 | 28 | 14 | L |
| 2 | 5 | 14 | 7 | TM |
| 4 | 6 | 7 | 7/2 | L |
| 7 | 15/2 | 4 | 2 | L |
| 14 | 11 | 2 | 1 | TM |
| 28 | 18 | 1 | 1/2 | L |

**Bài 3**: Cho phân số: A = với n thuộc số tự nhiên.

1. Với giá trị nào của n thì A rút gọn được.
2. Với giá trị nào của n thì A là số tự nhiên?

**Hướng dẫn:**

1. Ta có: A =

Để A rút gọn được <=> 3n + 1 3 hoặc 3n + 1  7.

TH1: 3n + 1  3 (Vô lý)

TH2: 3n + 1  7. Với n = 7k + 2 (k ∈ N) thì 3n + 1  7.

Kết luận: n = 7k + 2 (k ∈ N) thì phân số A = rút gọn được.

1. Để A là số tự nhiên <=> 63  (3n + 1) <=> 3n + 1 là ước của 63.

Ư(63) = {1; 3; 7; 9; 21; 63}

1. **DẠNG 2: TÍNH NHANH**
2. **Bài tập minh họa:**

**Bài 1**: Rút gọn biểu thức sau:

* S =

3S = 3 + (1 + )

3S = 3 + S -

2S = 3 -

S =

* 

2A = 1 +

2A = 1 +A -

A = 1 -

* 

C = ..….. = = 50

* .

**Bài 2**: Tính các tổng sau:

* A =   
  A = 1 - + - + - + ..+ -

A = 1 - =

* B =   
  B = =

B = =

* C =

Áp dụng phương pháp khử liên tiếp ta viết mỗi số hạng thành hiệu của hai số sao cho số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ ở nhóm sau:

Ta xét:

- = ; - = ; …;

- =

Tổng quát: - =

2C = - + - + …+ - = -

2C = =

C =

* D =

D = = 1

* 
* 

1. **Bài tập tự luyện:**

* A =

A =

A = =

* B = 1! +2.2 ! + 3.3 ! + ...... + n .n!

Ta có : 1! = 2! -1!   
2.2! = 3 ! -2!   
3.3! = 4! -3!   
..... ..... .....   
n.n! = (n + 1) –n!

Vậy

B = 2! - 1! +3! – 2 ! + 4! - 3! +...... + ( n+1) ! – n! = ( n+1) ! - 1! = ( n+ 1) ! - 1

* C =

Áp dụng phương pháp khử liên tiếp ta viết mỗi số hạng thành hiệu của hai số sao cho số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ ở nhóm sau:

Ta xét:

- = ; - = ; …; - =

Tổng quát: - =

C = - + - + …+ - = -

C= =

* D = 9 + 99 + 999 +...... + 99..... .....9

(50 chữ số 9)

D = 10 – 1 + 100 -1 + 1000 – 1 + ….+ - 1

D = – 50.1 =

* 

S = Áp dụng phương pháp khử liên tiếp ta viết mỗi số hạng thành hiệu của hai số sao cho số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ ở nhóm sau:

Ta xét:

- = ; - = ; …; - =

Tổng quát: - =

C = - + - + …+ - = -

C = =

* 
* 

1. **DẠNG 3: CHỨNG MINH BIỂU THỨC**
2. **Bài tập minh họa:**

**Bài 1**: Chứng minh rằng các phân số sau tối giản:

**Bài 2**: Chứng minh rằng: 

**Bài 3**: Cho A =1 +

Chứng minh rằng tổng A không phải là số tự nhiên.

**Bài 4** : Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n khác 0 ta đều có:

a) 

VT =

= = = = VP (đpcm)

b) 

VT =

= = . =

**Bài 5**: Chứng minh rằng với mọi  ta có:



Ta có VT =

= < . = => đpcm

**Bài 6**: Cho . Chứng minh 

A > + + +…+ = - + - +…+ -

= - = = (1)

A < + +…+ = 1 - + - +…+ - = 1 - = (2)

Từ (1) và (2) => đpcm

**Bài 7**: Tổng bằng phân số . Chứng minh rằng a chia hết cho 149.

1. **Bài tập tự luyện:**

**Bài 8**: Cho . Chứng minh: 

Ta có: < = -

Thay n = 1, 2, 3, …, 1003

Ta có: A < - = (đpcm)

**Bài 9**: Cho . Chứng minh: 

Ta có: < ; < ; … ; <

1. B = + + …+ < + + …+

**Bài 10**: Cho . Chứng minh C > 48

C có 49 số hạng

Ta có: C – 49 = -(1 - + 1 - + 1 - + …+ 1 - )

1. C – 49 = -
2. C = 49 - = 49 – D

Xét D = = + + …+

D < + + … + = 1 - + - + …+ - = 1 - < 1

D < 1 => 49 – D > 49 – 1 = 48

1. C > 48 (đpcm)

**Bài 11**: Cho . Chứng minh 

Áp dụng công thức: 1 +2+ 3 + …+ n =

M = + + …+ = 2

= 2 = 2 = 2. = < =

1. M < (đpcm).

**Bài 12**: Cho . Chứng minh 

Áp dụng phương pháp khử liên tiếp ta viết mỗi số hạng thành hiệu của hai số sao cho số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ ở nhóm sau:

Ta xét:

- = ; - = ; …; - =

Tổng quát: - =

Do đó: 2A = + + …+

= + +…+

= - =

1. A = < = (đpcm)

**Bài 13**: Chứng minh với mọi n N; n > 1 ta có:



A < + + + …+

Nhận xét: mỗi số hạng tổng có dạng:

= .

Từ đó suy ra:

A < .

= . < . = (đpcm)

**Bài 14**: Cho . Chứng minh: 

**Hướng dẫn giải:**



4

3C = 5 -

C <

**Bài 15**: Cho . Chứng minh: 

**Hướng dẫn giải:**







(1)

(2)

Từ (1), (2) suy ra:





**Bài 16**: Cho . (1) Chứng minh: 

Biểu thức C là tích của 100 phân số nhỏ hơn 1, trong đó các tử đều lẻ, các mẫu đều chẵn. Ta đưa ra biểu thức trung gian là một tích các phân số mà các tử đều chẵn, các mẫu đều lẻ. Thêm 1 vào tử và mẫu của mỗi phân số của A, giá trị mỗi phân số tăng thêm, do đó:

C < ..….. (2)

Nhân (1) với (2) theo từng vế ta được:

C2 < (..…..).(..…..)

Vế phải của bất đẳng thức trên bằng

Vậy C2 < (đpcm)

* **DẠNG 4: TÌM X**

1. **Bài tập minh họa:**

**Bài 1**: Tìm x, biết rằng:

⬄ .( - + - + - + … + - ) =

⬄ .( - ) =

⬄ - = .3 =

⬄ = - =

⬄ x + 3 = 308

⬄ x = 305

**Bài 2**: Tìm x, biết rằng: 

<=> x - =

⬄ 5x = 90

⬄ x = 18

**Bài 3**: Tìm x, biết rằng: 

**⬄** (x – 5).30 = 200x + 500

⬄(x – 5).3 = 20x + 50

⬄ 3x – 15 = 20x + 50

⬄ 17x = -65

⬄ x = -

**Bài 4**: 1 + 2 + 3 + 4 +.............+ x = 820

⬄ = 820

⬄ x(x+1) = 1640 = 40.41

Vậy x = 40

* **DẠNG 5: SO SÁNH PHÂN SỐ**
* **Bài tập minh họa:**

**Bài 1**: Cho  và 

So sánh A và B?

Ta có:

10A = = 1 +

10B = = 1 +

Vì > nên 10A > 10B, do đó A > B.

**Bài 2**: Cho A = 1 + 2 + 3 + … + 1000 và B = 1.2.3…11

So sánh A và B?

Ta có: A = < 103.103 = 106

B = (2.5).(3.4).(6.7).(8.9).10.11 > 106

Vậy A < B

**Bài 3**: So sánh  với 

Ta có : L = .. … . = >

Vậy L >

**Bài 4**: So sánh  với 

Ta có:

M = . . ….. = = = =

* **Bài tập tự luyện:**

**Bài 1**: Cho và

So sánh A và B?

Ta có:

10A = = 1 +

10B = = 1 +

Vì > nên 10A > 10B, do đó A > B.

**Bài 2**: Cho và

So sánh A và B?

Áp dụng tính chất: nếu > 1 thì < (m > 0)

Vì B > 1 nên

B = > = = = = A

Vậy A < B

**Bài 3**: So sánh  và 

Ta có: U =

U = =

Vì < => U < V

**Bài 4**: So sánh:

1. 637 và 1612

637 < 647 = (82)7 = 814

1612  = (24)12 = 248 = 23.16 = (23)16 = 816

814  < 816  nên 637 < 1612

1. và

= =

= =

Ta có : 235 < 236 nên > => >

1. và

= và < =

> => >

1. 5299 và 3501

5299 < 5300 = (53)100 < (35)100 = 3500 < 3501

Vậy 5299 < 3501

1. 323 và 515

323 = 9.(33)7 > 5.(52)7 = 515

1. 12723 và 51318

12723 < 12823 = (27)23 = 2161  
51318 > 51218 = (29)18 = 2162

Vì 2162 > 2161 nên 51318 > 12723

1. 199010 + 19909 và 199110

19909.(1990+1) = 1991.19909

199110 = 1991.19919

Vì 19919 > 19909 nên 1991.19919 > 1991.19909 => 199110 > 199010 + 19909

1. 3500 và 7300

3500 = 35.100 = (35)100 = 243100  
7300 = 73.100 . (73 )100 = (343)100  
Vì 243100 < 343100 => 3500 < 7300

1. 9920 và 999910

9920 = (992)10 = (99.99)10 = 9910. 9910   
999910 =( 101.99)10 = 10110 . 9910   
Vì 101> 99 nên 10110 > 9910   
=> 10110 . 9910 > 9910. 9910   
Vậy 999910 > 9920

1. 202303 và 303202

Vì 202303 = (2.101)3.101 = (23.1013)101 = (8.101.1012)101 = (808.1012)101

Và 303202 = (3.101)2.101 = (32.1012)101 = (9.1012)101

Mà (808.1012)101  > (9.1012)101 nên 202303 > 303202

* **DẠNG 5: TÌM GIÁ TRỊ THỎA MÃN BIỂU THỨC**

**Bài 1**: Tìm các số tự nhiên x và y sao cho:

Đkxđ : y ≠ 0

⬄ =

⬄ 5xy – 60 = 3y

⬄ y(5x – 3) = 60

⬄ y =

Vì y là số tự nhiên nên 5x – 3 phải là ước của 60

Vì x cũng là số tự nhiên nên giá trị của x thỏa mãn là x = 1; x = 3

Vậy x = 3, y = 5; x = 1, y = 30

Đkxđ: x ≠ 0

⬄ =

⬄ 24 – 2xy= 5x

⬄ x(5 + 2y) = 24

⬄ x =

Vì x là số tự nhiên nên 5 +2y là ước của 24 , vì y cũng là số tự nhiên nên không có giá trị nào của x, y thỏa mãn.

**Bài 2**: Tìm các số nguyên x và y sao cho:

Đkxđ: x≠0  
<=> =   
<=> x+2xy=3  
<=> x =   
x nguyên nên 2y + 1 là ước lẻ của 30. Ta có:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2y+ 1 | 1 | -1 | 3 | -3 | 5 | -5 | 15 | -15 |
| 2y | 0 | -2 | 2 | -4 | 4 | -6 | 14 | -16 |
| y | 0 | -1 | 1 | -2 | 2 | -3 | 7 | -8 |
| x | 30 | -30 | 10 | -10 | 6 | -6 | 2 | -2 |

Đkxđ : y ≠ 0

⬄ =

⬄ =

⬄5xy – 60 = y

⬄5xy – y = 60

⬄y (5x – 1) = 60

⬄ y =

Vì y là số nguyên nên 5x – 1 phải là ước của 60 và chia cho 5 thiếu 1. Ta có:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 5x – 1 | -1 | 4 | -6 |
| 5x | 0 | 5 | -5 |
| x | 0 | 1 | -1 |
| y | -60 | 15 | -10 |