Bài 4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG. GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

|FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt có vectở chỉ phương là u_1, u_2. Khi đó

a) Δ_1 cắt Δ_2 khi và chỉ khi u_1, u_2 không cùng phương.

b) Δ_1 song song với Δ_2 khi và chỉ khi u_1, u_2 cùng phương và có một điểm thuộc một đường thẳng mà không thuộc đường thẳng còn lại.

c) Δ_1 trùng với Δ_2 khi và chỉ khi u_1, u_2 cùng phương và có một điểm thuộc cả hai đường thẳng đó.

Chú ý

- Δ_1 vuông góc với Δ_2 khi và chỉ khi u_1, u_2 vuông góc với nhau.
- Khi xét vị trí tương đối của hai đường thẳng, có thể dựa vào cặp vecto pháp tuyến của hai đường thẳng đó.

Ví dụ 1. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau

a) $\Delta_1: 2x - y + 1 = 0$ và $\Delta_2: -x + 2y + 2 = 0$.

b) $\Delta_3: x - y - 1 = 0$ và $\Delta_4: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$

Giải

a) Đường thẳng Δ_1 có vecto chỉ phương $u_1 = (1; 2)$, đường thẳng Δ_2 có vecto chỉ phương $u_2 = (-2; -1)$. Do $\frac{1}{-2} \neq \frac{2}{-1}$ nên u_1, u_2 không cùng phương, suy ra Δ_1 cắt Δ_2.

b) Đường thẳng Δ_3, Δ_4 lần lượt có vecto chỉ phương $u_3 = (1; 1), u_4 = (2; 2)$. Suy ra $u_4 = 2u_3$. Chọn $t = 0$, ta có điểm $M(1; 3) \in \Delta_4$. Do $1 - 3 - 1 \neq 0$ nên $M(1; 3) \notin \Delta_3$. Vậy Δ_3 song song với Δ_4.

Ta có thể xét vị trí tương đối của hai đường thẳng dựa vào số giao điểm của chúng.

Nhận xét: Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình lần lượt là $a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Khi đó

a) Δ_1 cắt Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) có nghiệm duy nhất.

b) Δ_1 song song với Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) vô nghiệm.

c) Δ_1 trùng với Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) có vô số nghiệm.

Ví dụ 2. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$\Delta_1: x - 2y + 1 = 0$; $\Delta_2: 2x - 4y + 2 = 0$.

Giải

Tọa độ giao điểm của đường thẳng Δ_1 và đường thẳng Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

Hệ trên có vô số nghiệm.

Như vậy, Δ_1 và Δ_2 có vô số điểm chung, tức là Δ_1 trùng với Δ_2.

II. Góc giữa hai đường thẳng

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành bốn góc.

- Nếu hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 không vuông góc với nhau thì góc nhọn trong bốn góc tạo thành được gọi là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

- Nếu hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau thì ta nói góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng 90°.

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được kí hiệu là $(\widehat{\Delta_1,\Delta_2})$ hoặc (Δ_1,Δ_2).

Quy ước: Khi Δ_1 song song hoặc trùng với Δ_2, ta nói góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng 0°.

Nhận xét: Góc giữa hai đường thẳng luôn bé hơn hoặc bằng 90°, tức là $(\Delta_1,\Delta_2) \le 90^\circ$.

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u_1}=(a_1;b_1), \vec{u_2}=(a_2;b_2)$. Ta có: $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

Nhận xét

- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$.

- Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n_1},\vec{n_2}$. Ta cũng có:

$$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\cos(\vec{n_1},\vec{n_2})\right|=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}.$$

Ví dụ 3. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta_1:\begin{cases}x=-1+\sqrt{3}t_1\\ y=1+t_1\end{cases}$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=-1+\sqrt{3}t_2\\ y=4-t_2\end{cases}$

b) $\Delta_1: 3x+y-10=0$ và $\Delta_2: -2x+y-7=0$.

Giải

a) Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u_1}=(\sqrt{3};1)$.

Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u_2}=(\sqrt{3};-1)$.

Do đó, ta có: $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\dfrac{|\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+1\cdot(-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{2}$. Vậy $(\Delta_1,\Delta_2)=60^\circ$.

b) Δ_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n_1}=(3;1)$, Δ_2 có vectơ pháp tuyến $\vec{n_2}=(-2;1)$. Do đó, ta có:

$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\cos(\vec{n_1},\vec{n_2})\right|=\dfrac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}=\dfrac{|3\cdot(-2)+1\cdot1|}{\sqrt{3^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy $(\Delta_1,\Delta_2)=45^\circ$.

III. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $ax+by+c=0$ $(a^2+b^2>0)$ và điểm $M(x_0;y_0)$. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ, kí hiệu là $d(M,\Delta)$, được tính bởi công thức sau:

$$d(M,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Chú ý: Nếu $M\in\Delta$ thì $d(M,\Delta)=0$.

Ví dụ 4. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) $M(-2;1)$ và $\Delta: 2x-3y+5=0$.

b) $M(1;-3)$ và $\Delta:\begin{cases} x=-2+3t \\ y=2-4t \end{cases}$

Giải

a) Ta có:

$$d(M,\Delta)=\frac{|2\cdot(-2)-3\cdot1+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm $N(-2;2)$, có vectơ pháp tuyến $n=(4;3)$. Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là

$4(x+2)+3(y-2)=0$ hay $4x+3y+2=0$.

$$\Rightarrow\ d(M,\Delta)=\frac{|4\cdot1+3\cdot(-3)+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{3}{5}.$$

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ *và* $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ *ta xét số nghiệm của hệ phương trình* $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$.

- *Hệ có một nghiệm:* Δ_1 *cắt* Δ_2.
- *Hệ vô nghiệm:* $\Delta_1 // \Delta_2$.
- *Hệ có vô số nghiệm:* $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

Đặc biệt: Nếu $a_2b_2c_2\neq0$ *thì:*

Δ_1 *cắt* $\Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$, $\Delta_1=\Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

Để tìm giao điểm của 2 đường thẳng ta giải hệ phương trình trên.

Tìm hình chiếu của điểm A lên đường thẳng d.

Cách 1: lập phương trình đường thẳng d' qua A vuông góc với d. Hình chiếu H là giao điểm của d và d'.

Cách 2: điểm H thuộc d có tọa độ theo tham số t (hoặc x, hoặc y), cho điều kiện AH $\perp$ *d* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$ *để tìm t.*

Tìm điểm đối xứng A' của A qua đường thẳng d: tìm hình chiếu H, dùng công thức tọa độ trung điểm để suy ra A'.

Tìm đường thẳng d' đối xứng của đường thẳng d qua điểm I cho trước.

Cách 1: d' song song hoặc trùng với d nên có cùng VTPT. Lấy điểm A thuộc d rồi tìm điểm B đối xứng qua I thì B thuộc d'.

Cách 2: Lấy M(x; y) bất kỳ thuộc d. Gọi M'(x'; y') là điểm đối xứng của M qua I, ta có:

$x+x'=2x_0$, $y+y'=2y_0$ $\Rightarrow x=2x_0-x'$, $y=2y_0-y'$.

Thế vào phương trình d thành phương trình d'.

Câu 1. Xét vị trí tương đối và tìm giao điểm nếu có của hai đường thẳng:

a) $2x-5y+3=0$ và $5x+2y-3=0$.

b) $x - 3y + 4 = 0$ và $0,5x - 1,5y + 4 = 0$.

c) $10x + 2y - 3 = 0$ và $5x + y - 1,5 = 0$.

Lời giải.

a)Ta có $\frac{2}{5} \neq \frac{-5}{2}$ nên hai đường thẳng cắt nhau.

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - 5y + 3 = 0 \\ 5x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{29} \\ y = \frac{21}{29} \end{cases}$.

Vậy hai đường thẳng cắt nhau tại $M\left(\frac{9}{29}; \frac{21}{29}\right)$.

b)Vì $\frac{1}{0,5} = \frac{-3}{-1,5} \neq \frac{4}{4}$ nên hai đường thẳng song song.

c)Vì $\frac{10}{5} = \frac{2}{1} = \frac{-3}{-1,5}$ nên hai đường thẳng trùng nhau.

Câu 2. Xét vị trí tương đối và tìm giao điểm nếu có của cặp đường thẳng:

a) $d: \begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = -6 + 5t' \\ y = 2 - 4t' \end{cases}$.

b) $d: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ và $d': 2x + 4y - 10 = 0$.

c) $d: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ và $d': \frac{x}{1} = \frac{y - 3}{-2}$

Lời giải.

Ta chuyển các đường thẳng về dạng tổng quát:

a) $d: 4x + 5y - 6 = 0$ và $d': 4x + 5y + 14 = 0$.

Ta có $\frac{4}{4} = \frac{5}{5} \neq \frac{-6}{14}$ nên d, d’ song song.

b) $d: x + 2y - 5 = 0$ và $d': 2x + 4y - 10 = 0$.

Ta có $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{-5}{-10}$ nên d, d' trùng nhau.

c) $d: x+y-2=0$ và $d': 2x+y-3=0$.

Ta có $\frac{1}{2}\neq\frac{1}{1}$ nên d, d' cắt nhau.

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ vậy I(1; 1).

Câu 3. Biện luận theo tham số m vị trí tương đối của hai đường thẳng:
$mx+y+2=0$ và $x+my+m-1=0$.

Lời giải.

Xét hệ $\begin{cases} mx+y+2=0 \\ x+my+m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx+y=-2 \\ x+my=-m+1 \end{cases}$.

Ta lập các định thức:

$D=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}=m^2-1=(m-1)(m+1)$.

$D_x=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ m & -m+1 \end{vmatrix}$ = m+1.

$D_y=\begin{vmatrix} m & -2 \\ 1 & -m+1 \end{vmatrix}=-m^2+m+2=-(m+1)(m-2)$.

Vậy nếu $m\neq 1, m\neq -1$ thì $D\neq 0$: hai đường thẳng cắt nhau.

Nếu $m=1$ thì $D=0$, $D_x\neq 0$: hai đường thẳng song song.

Nếu $m=-1$ thì $D=D_x=D_y=0$: hai đường thẳng trùng nhau.

Câu 4. Với giá trị nào của tham số m thì hai đường thẳng sau đây vuông góc $\Delta_1: mx+y+8=0$ và $\Delta_2: x-y+m=0$.

Lời giải.

Δ_1 có VTPT là $\vec{n}_1=(m;1)$.

Δ_2 có VTPT là $\vec{n}_2=(1;-1)$.

Ta có: $\Delta_1\perp\Delta_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2=0 \Leftrightarrow m-1=0 \Leftrightarrow m=1$.

Câu 5. Tìm m để ba đường thẳng sau đây đồng quy:
$d_1: 2x+y-4=0$, $d_2: 5x-2y+3=0$ và $d_3: mx+3y-2=0$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 5x-2y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{9} \\ y=\frac{26}{9} \end{cases}$. Vậy $I\left(\frac{5}{9};\frac{26}{9}\right)$.

Để ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy ta phải có I thuộc d_3

$\Leftrightarrow \frac{5}{9}m+\frac{26}{3}-2=0 \Leftrightarrow m=-12$.

Câu 6. Cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+bt \end{cases}$ và $d_2:\begin{cases} x=x_2+ct' \\ y=y_2+dt' \end{cases}$ (x_1, x_2, y_1, y_2 là các hằng số). Tìm điều kiện của a, b, c, d để hai đường thẳng d_1 và d_2:

a)Cắt nhau.

b)Song song với nhau.

c)Vuông góc với nhau.

Lời giải.

d_1 đi qua $M_1(x_1;y_1)$ và có VTCP $\vec{u}(a;b)$, d_2 đi qua $M_2(x_2,y_2)$ và có VTCP $\vec{v}(c;d)$.

a) d_1 cắt d_2 $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ không cùng phương ⇔ ad – bc ≠ 0.

b) d_1 // d_2 $\Leftrightarrow$ u và v cùng phương và $M_1(x_1;y_1)\notin d_2 \Leftrightarrow ad-bc=0$ và $d(x_1-x_2)\neq c(y_1-y_2)$.

c) $d_1\equiv d_2$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương và $M_1(x_1;y_1)\in d_2 \Leftrightarrow ad-bc=0$ và $d(x_1-x_2)=c(y_1-y_2)$.

d) $d_1\perp d_2 \Leftrightarrow u\perp v \Leftrightarrow ad+bc=0$.

Câu 7. Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt $M_1(x_1;x_2)$ và $M_2(x_2;y_2)$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường thẳng $Ax+By+C=0$ song song với d là $Ax_1+By_1+C=Ax_2+By_2+C\neq 0$.

Lời giải.

VTCP của đường thẳng d là: $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1)$.

VTPT của đường thẳng $Ax+By+C=0$ là $\vec{n}(A;B)$.

Vậy để hai đường thẳng song song trước hết cần có $\overrightarrow{M_1M_2}.\vec{n}=0$ $\Leftrightarrow A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0$.

$\Leftrightarrow Ax_1+By_1=Ax_2+By_2 \Leftrightarrow Ax_1+By_1+C=Ax_2+By_2+C$.

Mặt khác, điểm $M_1(x_1;y_1)$ không nằm trên $Ax+By+C=0$ nên $Ax_1+By_1+C\neq 0$ (đpcm).

Câu 8. Cho hai đường thẳng:

$\Delta_1:(m+1)x-2y-m-1=0$; $\Delta_2:x+(m-1)y-m^2=0$.

a)Tìm tọa độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2.

b)Tìm điều kiện của m để giao điểm đó nằm trên trục Oy.

Lời giải.

a)Ta có:

$D\begin{vmatrix} m+1 & -2 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix}=m^2+1.$

$D_x=3m^2-1$.

$D_y=m^3+m^2-m-1$.

Vì $D=m^2+1\neq 0$ với mọi m nên Δ_1 và Δ_2 luôn cắt nhau và giao điểm I của chúng có tọa độ:

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{3m^2-1}{m^2+1} \\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{m^3+m^2-m-1}{m^2+1} \end{cases}$$

b) $I\in Oy \Leftrightarrow \dfrac{3m^2-1}{m^2+1}=0\Leftrightarrow 3m^2-1=0\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 9. Cho đường thẳng $\Delta: 3x-y+1=0$ và điểm $I(1;2)$. Tìm phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua điểm I.

Lời giải.

Lấy một điểm M nằm trên đường thẳng Δ: $2x-y+1=0$, chẳng hạn M = (0; 1). Điểm M' đối xứng với M qua điểm $I=(1;2)$ có tọa độ $M'=(2;3)$. Đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua I là đường thẳng đi qua điểm M' và song song với Δ, tức là có VTPT $\vec{n}=(2;-1)$. Vậy phương trình của Δ' là: $2(x-2)-(y-3)=0$ hay $2x-y-1=0$.

Câu 10. Cho hai đường thẳng $d_1: x+y-1=0$ và $d_2: x-3y+3=0$. Hãy lập phương trình của đường thẳng d_3 đối xứng với d_1 qua d_2.

Lời giải.

Giao điểm $M(x;y)$ của d_1 và d_2 có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-3y+3=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}\Rightarrow M(0;1).$$

Lấy $A(1;0)$ thuộc d_1, phương trình đường thẳng AH vuông góc với d_2 là $3(x-1)+1(y-0)=0$ $\Leftrightarrow 3x+y-3=0$.

Tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x+y-3=0 \\ x-3y+3=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{6}{5} \end{cases}\Rightarrow H\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{6}{5}\right)\Rightarrow B\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{12}{5}\right)$

Phương trình đường thẳng MB hay đường thẳng d_3 là $(x-0)\left(\dfrac{12}{5}-1\right)-(y-1)\left(\dfrac{1}{5}-0\right)=0\Leftrightarrow 7x-y+1=0$.

Câu 11. Cho đường thẳng Δ: $ax+by+c=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với đường thẳng Δ:

a)Qua trục hoành.

b)Qua trục tung.

c)Qua gốc tọa độ.

Lời giải.

Xét điểm $M\left(x_M; y_M\right)$ tùy ý thuộc Δ.

a)Gọi $N\left(x_N; y_N\right)$ là điểm đối xứng với M qua Ox.

Khi đó: $\begin{cases} x_N = x_M \\ y_N = -y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x_N \\ y_M = -y_N \end{cases}$.

Do đó M ∈ Δ ⇔ $ax_M + by_M + c = 0$ ⇔ $ax_N - by_N + c = 0$ ⇔ N ∈ Δ_1 ⇔ $ax - by + c = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng đối xứng với Δ qua Ox là $ax - by + c = 0$.

b)Gọi $P\left(x_P; y_P\right)$ là điểm đối xứng với M qua Oy.

Khi đó ta có $\begin{cases} x_P = -x_M \\ y_P = y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = -x_P \\ y_M = y_P \end{cases}$. Do đó M ∈ Δ ⇔ $ax_M + by_M + c = 0$ ⇔ $ax_P - by_P - c = 0$ ⇔P∈Δ_2 ⇔ $ax - by - c = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng đối xứng với Δ qua Oy là $ax - by - c = 0$.

c)Gọi $Q\left(x_Q; y_Q\right)$ là điểm đối xứng với M qua O.

Khi đó ta có $\begin{cases} x_Q = -x_M \\ y_Q = -y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = -x_Q \\ y_M = -y_Q \end{cases}$. Do đó M ∈ Δ ⇔ $ax_M + by_M + c = 0$ ⇔ $-ax_Q - by_Q + c = 0$ ⇔Q∈Δ_3 ⇔ $ax + by - c = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng đối xứng với Δ qua O là $ax + by - c = 0$.

Câu 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(-1;2)$ và hai đường thẳng $d_1: x + 2y + 1 = 0$, $d_2: 2x + y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt d_1 tại A, cắt d_2 tại B sao cho $MA = 2MB$.

Lời giải.

Ta có $\Delta \cap d_1 = A$ suy ra $A \in d_1$ nên $A(-1-2a;a)$, $\Delta \cap d_2 = B$ suy ra $B \in d_2$ nên $B(b;-2-2b)$.

Suy ra $\overrightarrow{MA} = (-2a; a-2)$ và $\overrightarrow{MB} = (b+1; -2b-4)$.

Do Δ qua M nên A, B, M thẳng hàng. Hơn nữa $MA = 2MB$, suy ra $\left[\begin{array}{l} \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB} \\ \overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \end{array}\right.$

* Với $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}-2a=2(b+1)\\a-2=2(-2b-4)\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\b=-\dfrac{5}{3}\end{cases}$. Suy ra $A\left(-\dfrac{7}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ và $B\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.

Khi đó đường thẳng Δ qua $M(-1;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)=(1;1)$. Làm véc tơ pháp tuyến nên Δ: $x-y+3=0.$

* Với $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}-2a=-2(b+1)\\a-2=-2(-2b-4)\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}a=-2\\b=-3\end{cases}$. Suy ra $A(3;-2)$ và $B(-3;4)$.

Khi đó đường thẳng Δ qua $M(-1;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(-6;6)$ làm véc tơ pháp tuyến nên Δ: $x+y-1=0$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm Δ: $x-y+3=0$ hoặc Δ: $x+y-1=0$.

Cách 2. Gọi $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ.
Suy ra Δ: $a(x+1)+b(y-2)=0$ hay $ax+by+a-2b=0$.

Do $\Delta\cap d_1=A$ nên tọa độ điểm A thỏa mãn hệ $\begin{cases}ax+by+a-2b=0\\x+2y+1=0\end{cases}$ $\Rightarrow A\left(\dfrac{2a-5b}{b-2a};\dfrac{2b}{b-2a}\right)$.

Do $\Delta\cap d_2=B$ nên tọa độ điểm B thỏa mãn hệ $\begin{cases}ax+b+a-2b=0\\2x+y+2=0\end{cases}$ $\Rightarrow B\left(\dfrac{4b-a}{a-2b};\dfrac{-4b}{a-2b}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=\left(\dfrac{-4b}{b-2a};\dfrac{4a}{b-2a}\right)$ và $\overrightarrow{MB}\left(\dfrac{2b}{a-2b};\dfrac{-2a}{a-2b}\right)$. Theo giả thiết

$$MA=2MB\Leftrightarrow\sqrt{\left(\frac{-4b}{b-2a}\right)^2+\left(\frac{4a}{b-2a}\right)^2}=2\sqrt{\left(\frac{2b}{a-2b}\right)^2+\left(\frac{-2a}{a-2b}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{b^2+a^2}{(b-2a)^2}}=4\sqrt{\frac{b^2+a^2}{(a-2b)^2}}\Leftrightarrow(b-2a)^2=(a-2b)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b-2a=a-2b\\b-2a=-(a-2b)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a-b=0\\a+b=0\end{array}\right..$$

* Với $a-b=0$, ta chọn $a=1$ suy ra $b=1$. Khi đó Δ: $x+y-1=0.$

* Với $a+b=0$, ta chọn $a=1$ suy ra $b=-1$. Khi đó Δ: $x-y+3=0.$

Vậy có hai đường thẳng cần tìm Δ: $x+y-1=0$ hoặc Δ: $x-y+3=0$.

Câu 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;1)$ và tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải.

Gọi $a=2b$, Δ ∩ Oy = $B(b;0)$ với Δ: $2x+y-8=0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

Theo giả thiết, ta có:

$\begin{cases} M\in d \\ S_{\Delta OAB}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1 \\ |ab|=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b+a=8 \\ ab=8\end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2b+a=-8 \\ ab=-8\end{cases}$

Với $\begin{cases} 2b+a=8 \\ ab=8\end{cases}$ suy ra Δ: $x+2y-4=0$.

Với $\begin{cases} 2b+a=-8 \\ ab=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4\mp 4\sqrt{2} \\ b=-2\pm 2\sqrt{2}\end{cases}$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} \Delta:\left(1-\sqrt{2}\right)x+2\left(+\sqrt{2}\right)y-4=0 \\ \Delta:\left(1+\sqrt{2}\right)x+2\left(1-\sqrt{2}\right)y+4=0\end{array}\right.$

Câu 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phuong trình đường Δ thẳng song song với đường thẳng d: $2x-y+2015=0$ và cắt hai trục tọa độ tại M và N sao cho $MN=3\sqrt{5}$.

Lời giải.

Do Δ qua $M(m;0)$ ∈ Ox và $N(0;n)$ ∈ Oy (với m, n ≠ 0) nên

$\Delta:\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1$ hay Δ: $nx+my-mn=0$.

Theo giả thiết, Δ song song với d: $2x-y+2015=0$ nên $\dfrac{n}{2}=\dfrac{m}{-1}\Leftrightarrow n=-2m$ (*)

Hơn nữa, $MN=3\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{m^2+n^2}=3\sqrt{5}$. Kết hợp với (*), ta được $\sqrt{5m^2}=3\sqrt{5}\Leftrightarrow m=\pm 3$.

Với $m=3$ suy ra $n=-6$. Ta được Δ: $2x-y-6=0$.

Với $m=-3$ suy ra $n=6$. Ta được Δ: $6x-3y+18=0$.

Câu 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(3;2)$ và cắt tia Ox tại A, cắt tia Oy tại B sao cho $OA+OB=12$.

Lời giải.

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ. Suy ra Δ: $a(x-3)+b(y-2)=0$ hay $ax+by-3a-2b=0$.

Ta có Δ∩Ox = A nên $A\left(\dfrac{3a+2b}{a};0\right)$ và Δ∩Oy = B nên $B\left(0;\dfrac{3a+2b}{b}\right)$.

Theo giả thiết, ta có:

$OA+OB=12\Leftrightarrow\left|\dfrac{3a+2b}{a}\right|+\left|\dfrac{3a+2b}{b}\right|=12$

$\Leftrightarrow \dfrac{3a+2b}{a}+\dfrac{3a+2b}{b}=12\Leftrightarrow 3a^2-7ba+2b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=2b \\ 3a=b\end{array}\right.$

- Với a = 2b, ta chọn b = 1 suy ra a = 2. Ta được Δ: 2x + y – 8 = 0.
- Với 3a = b, ta chọn a = 1 suy ra b = 3. Ta được Δ: x + 3y – 9 = 0.

Cách 2. Do Δ đi qua A(a; 0) ∈ Ox và B(0; b) ∈ Oy (với a, b > 0)

nên $\Delta:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ hay Δ: bx + ay – ab = 0.

Theo giả thiết, ta có:

OA + OB = 12 ⇔ a + b = 12 ⇔ b = 12 – a. (*)
Hơn nữa Δ đi qua M(3; 2) nên 3b + 2a – ab = 0. Kết hợp với (*), ta được
3(12 – a) + 2a – a(12 – a) = 0 ⇔ $a^2-13a+36=0$ ⇔ a = 9 hoặc a = 4.

- Với a = 4, suy ra b = 12 – a = 8. Ta được Δ: 2x + y – 8 = 0.
- Với a = 9, suy ra b = 12 – a = 3. Ta được Δ: x + 3y – 9 = 0.

Dạng 2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Để tính khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0)$ đến đường thẳng Δ: ax + by + c = 0 ta dùng công thức:

$$d\left(M_0,\Delta\right)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Câu 16. Cho đường thẳng Δ: $5x+3y-5=0$.

a)Tính khoảng cách từ điểm $A(-1;3)$ đến đường thẳng Δ.

b)Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song Δ và Δ’: $5x+3y+8=0$.

Lời giải.

a)Áp dụng công thức tính khoảng cách ta có:

$$d(A,\Delta)=\frac{|5.(-1)+3.3-5|}{\sqrt{5^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{34}}$$

$$d(\Delta,\Delta')=d(M,\Delta')=\frac{|5.1+3.0+8|}{\sqrt{5^2+3^2}}=\frac{13}{\sqrt{34}}$$

b)Do M(1; 0) ∈ Δ nên ta có

Câu 17. Cho ba điểm $A(2;0),B(3;4)$ và $P(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua P đồng thời cách đều A và B.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua P có dạng $a(x-1)+b(y-1)=0$ $\left(a^2+b^2\neq 0\right)$ hay $ax+by-a-b=0$. Δ cách đều A và B khi và chỉ khi:

$$d(A;\Delta)=d(B;\Delta)\Leftrightarrow\frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a-b=2a+3b\\b-a=2a+3b\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-4b\\3a=-2b\end{array}\right..$$

- Nếu a = –4b, chọn a = 4, b = –1 suy ra Δ: 4x – y – 3 = 0.
- Nếu 3a = –2b, chọn a = 2, b = –3 suy ra Δ: 2x – 3y + 1 = 0.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn bài toán là $\Delta_1:4x-y-3=0$ và $\Delta_2:2x-3y+1=0$.

Câu 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng Δ cách điểm $A(1;1)$ một hoảng bằng 2 vá cách điểm $B(2;3)$ một khoảng bằng 4.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm có dạng Δ: $ax+by+c=0$ với $a^2+b^2\neq 0$.
Vì Δ cách điểm $A(1;1)$ một khoảng bằng 2 nên

$d(A,\Delta)=2 \Leftrightarrow \frac{|a+b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow |a+b+c|=2\sqrt{a^2+b^2}$. (1)

Vì Δ cách điểm $B(2;3)$ một khoảng bằng 4 nên

$d(B,\Delta)=4 \Leftrightarrow \frac{|2a+3b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=4 \Leftrightarrow |2a+3b+c|=4\sqrt{a^2+b^2}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $|2a+3b+c|=2|a+b+c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=b \\ 3c=-4a-5b \end{array}\right.$

- Trường hợp $c=b$. Thay vào (1), ta được:

$|a+2b|=2\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 3a^2-4ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ 3a-4b=0 \end{array}\right.$.

+ Với $a=0$, ta chọn $b=1$ suy ra $c=b=1$. Khi đó Δ: $y+1=0$.

+ Với $3a-4b=0$, ta chọn $a=4$ suy ra $b=3$ và $c=b=3$. Khi đó Δ: $4x+3y+3=0$.

- Trường hợp $3c=-4a-5b$. Thay vào (1), ta được $|a+2b|=6\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 35a^2-4ba+32b^2=0$. Ta coi đây như là phương trình bậc hai theo a và có Δ' = $(2b)^2-35.32b^2<0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm là Δ: $y+1=0$ hoặc Δ: $4x+3y+3=0$.

Câu 19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;4), B(3;5)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm $I(0;1)$ sao cho khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ gấp hai lần khoảng cách từ B đến Δ.

Lời giải

Gọi $n=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ là véctơ pháp tuyến của đường thẳng Δ. Suy ra:
$\Delta: a(x-0)+b(y-1)=0$ hay $ax+by-b=0$.

Vì khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ gấp hai lần khoảng cách từ B đến Δ nên:

$d(A;\Delta)=2d(B;\Delta) \Leftrightarrow \frac{|-2a+4b-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2.\frac{|3a+5b-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow |-2a+3b|=2|3a+4b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8a+5b=0 \\ 3a+11b=0 \end{array}\right.$

Với $8a+5b=0$, ta chọn $a=5$ suy ra $b=-8$. Khi đó $\Delta: 5x-8y+8=0.$

Với $3a+11b=0$, ta chọn $a=11$ suy ra $b=-3$. Khi đó $\Delta: 11x-3y+3=0.$

Vậy có hai đường thẳng cần tìm $\Delta: 5x-8y+8=0$ hoặc $\Delta: 11x-3y+3=0.$

Câu 20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: 3x-4y+1=0$ và cách d một khoảng bằng 1.

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm. Do Δ song song với đường thẳng d nên có dạng $\Delta: 3x-4y+c=0.$

Vì Δ cách d một khoảng bằng 1 nên:

$$d(d;\Delta)=1 \Leftrightarrow d(A;\Delta)=1 \Leftrightarrow \frac{|3-4+c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1 \Leftrightarrow |c-1|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=6 \\ c=-4 \end{array}\right.$$

Với $c=6$, ta được $\Delta: 3x-4y+6=0.$

Với $c=-4$, ta được $\Delta: 3x-4y-4=0.$

Vậy có hai đường thẳng cần tìm $\Delta: 3x-4y+6=0$ hoặc $\Delta: 3x-4y-4=0$.

Câu 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-\sqrt{3}y-2=0$ và hai điểm phân biệt $A(1;\sqrt{3})$, B không thuộc d. Viết phương trình đường thẳng AB, biết rằng khoảng cách từ B đến giao điểm của đường thẳng AB với d bằng hai lần khoảng cách từ điểm B đến d.

Lời giải

Gọi α là góc giữa đường thẳng (AB) và đường thẳng d. Đường thẳng d có véctơ pháp tuyến $\vec{n_d}=(1;-\sqrt{3})$.

Gọi C là giao điểm của đường thẳng (AB) với d; H là hình chiếu vuông góc của B trên d.
Theo giả thiết bài toán:

$BC=2BH$ nên $\sin\alpha=\frac{BH}{BC}=\frac{1}{2}$, suy ra $\alpha=60^0 \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ là véctơ pháp tuyến của đường thẳng (AB). Ta có:

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{|\vec{n_d}.\vec{n}|}{|\vec{n_d}|.|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{|a-\sqrt{3}b|}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow |a-\sqrt{3}b|=\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2+\sqrt{3}ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a+\sqrt{3}b=0. \end{array}\right.$$

Với $a=0,$ ta chọn $b=1$. Khi đó AB có phương trình $y-\sqrt{3}=0.$

Với $a+\sqrt{3}b=0$, ta chọn $a=\sqrt{3}$ suy ra $b=-1$. Khi đó AB có phương trình $\sqrt{3}x-y=0.$

Vậy có hai đường thẳng cần tìm: $y-\sqrt{3}=0; \sqrt{3}x-y=0.$

Dạng 3: Góc giữa hai đường thẳng

Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1;\Delta_2$ có phương trình $\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0, (a_1^2+b_1^2\neq 0)$, $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0, (a_2^2+b_2^2\neq 0)$ được xác định bởi công thức

$$\cos(\Delta_1;\Delta_2)=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

Để xác định góc giữa hai đường thẳng ta chỉ cần biết véctơ chỉ phương (hoặc véctơ pháp tuyến) của chúng: $\cos(\Delta_1;\Delta_2)=|\cos(\vec{u_1};\vec{u_2})|=|\cos(\vec{n_1};\vec{n_2})|$.

Câu 22. Xác định góc giữa hai đường thẳng sau: $\Delta_1: 3x-2y+1=0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=t \\ y=7-5t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Ta có $n_1(3;-2), n_2(5;1)$ lần lượt là véctơ pháp tuyến của các đường thẳng Δ_1, Δ_2, suy ra:

$\cos(\Delta_1;\Delta_2)=\frac{|3.5-2.1|}{\sqrt{13}.\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, do đó $(\Delta_1;\Delta_2)=45^0$.

Câu 23. Tìm m để góc hợp bởi hai đường thẳng $\Delta_1: \sqrt{3}x-y+7=0$ và $\Delta_2: mx+y+1=0$ một góc bằng 30^0.

Lời giải

Ta có $\cos(\Delta_1;\Delta_2)=\frac{|m\sqrt{3}-1|}{\sqrt{3+1}.\sqrt{m^2+1}}$.

Theo giải thiết, góc hợp bởi hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng 30^0 nên:

$\cos 30^0=\frac{|m\sqrt{3}-1|}{2\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow \sqrt{3(m^2+1)}=|m\sqrt{3}-1|$

$\Leftrightarrow 3(m^2+1)=(m\sqrt{3}-1)^2 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $m=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ là giá trị cần tìm.

Câu 24. Cho đường thẳng $d: 3x-2y+1=0$ và $M(1;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và tạo với d một góc 45^0.

Lời giải

Đường thẳng Δ đi qua M có dạng $a(x-1)+b(y-2)=0, a^2+b^2\neq 0$ hay $ax+by-a-2b=0$.

Theo bài ra Δ tạo với d một góc 45^0 nên:

$\cos 45^0=\frac{|3x+(-2b)|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}.\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|3a-2b|}{\sqrt{13}.\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sqrt{26(a^2+b^2)}=2|3a-2b|$

$\Leftrightarrow 5a^2-24ab-5b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5b \\ 5a=-b \end{array}\right.$.

Nếu $a=5b$, chọn $a=5; b=1$ ta được $\Delta: 5x+y-7=0$.

Nếu $5a=-b$, chọn $a=1; b=-5$ ta được $\Delta: x-5y+9=0$.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn $x-5y+9=0; 5x+y-7=0$.

Câu 25. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x-y-2=0$ và điểm $I(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ cách điểm I một khoảng bằng $\sqrt{10}$ và tạo với đường thẳng d một góc bằng 45^0.

Lời giải

Giả sử đường thẳng Δ có phương trình: $ax+by+c=0, a^2+b^2\neq 0.$

Đường thẳng Δ có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_\Delta=(a;b)$.

Đường thẳng d có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_d=(2;-1).$

Vì Δ tạo với đường thẳng d một góc 45^0 nên, $\cos(\Delta;d)=\left|\cos(\vec{n}_\Delta;\vec{n}_d)\right| \Leftrightarrow \dfrac{|2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3b \\ b=-3a. \end{array}\right.$

Với $a=3b$, chọn $b=1, a=3$, ta được $\Delta: 3x+y+c=0.$

Mặt khác $d(I;\Delta)=\sqrt{10} \Leftrightarrow \dfrac{|4+c|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=6 \\ c=-14. \end{array}\right.$

Với $b=-3a$, tương tự ta có hai đường thẳng $\Delta: x-3y-8; x-3y+12$.

Vậy các đường thẳng cầm tìm là: $\Delta: 3x+y+6=0; 3x+y-14=0; x-3y-8; x-3y+12$

Câu 26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho điểm $M(0;1)$ và hai đường thẳng $d_1: x-7y+17=0,$ $d_2: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và tạo với d_1, d_2 một tam giác cân tại giao điểm của d_1 và $d_2.$

Lời giải

Phương trình đường phân giác góc tạo bởi d_1 và d_2 là :

$\dfrac{|x-7y+17|}{\sqrt{1^2+(-7)^2}}=\dfrac{|x+y-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_1: x+3y-13=0 \\ \Delta_2: 3x-y-4=0. \end{array}\right.$

Đường thẳng Δ cần tìm đi qua $M(0;1)$ và song song với Δ_1 hoặc Δ_2

-Trường hợp Δ đi qua $M(0;1)$ và song song với Δ_1 thì Δ có phương trình : $x+3y-3=0.$

-Trường hợp Δ đi qua $M(0;1)$ và song song với Δ_2 thì Δ có phương trình : $3x-y+1=0.$

Vậy có hai đường thẳng càn tìm : $x+3y-3=0; 3x-y+1=0.$

Dạng 4. Tìm điểm thỏa mãn điều kiện cho trước.

Để xác định tọa độ điểm thuộc đường thẳng ta dựa vào nhận xét sau :

Điểm A thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ (hoặc $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$) có tọa độ dạng $A(x_0+at; y_0+bt).$

Câu 27. Cho đường thẳng $\Delta: 4x-3y+5=0.$

a. Tìm tọa độ điểm A thuộc đường thẳng Δ và cách gốc tọa độ một khoảng bằng $4.$

b. Tìm điểm B thuộc đường thẳng Δ và cách đều hai điểm $E(5;0), F(3;-2).$

Lời giải

a. Dễ thấy $M(0;-3)$ thuộc đường thẳng Δ và $\vec{u}(4;3)$ là một véctơ chỉ phương của Δ nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x=4t \\ y=-3+4t. \end{cases}$

Điểm A thuộc Δ nên tọa độ của điểm A có dạng $A(4t;-3+3t)$ suy ra :

$OA = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(4t)^2 + (-3+3t)^2} = 4 \Leftrightarrow 25t^2 - 18t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{-7}{25}. \end{array}\right.$

Vậy ta tìm được hai điểm là $A_1(4;0)$ và $A_2\left(\dfrac{-28}{25};\dfrac{-96}{25}\right)$.

b. Vì $B \in \Delta$ nên $B(4t;-3+4t)$. Điểm B cách đều hai điểm $E(5;0), F(3;-2)$ suy ra

$EB^2 = FB^2 \Leftrightarrow (4t-5)^2 + (3t-3)^2 = (4t-3)^2 + (3t-1)^2 \Leftrightarrow t = \dfrac{6}{7}.$

Suy ra $B\left(\dfrac{24}{7};-\dfrac{3}{7}\right)$.

Câu 28. Cho đường thẳng $d: x - 2y + 4 = 0$ và điểm $A(4;1)$.

a. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên d.

b. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng của A qua d.

Lời giải

a. Phương trình d' đi qua A, vuông góc với d có dạng $2x + y + C = 0$.

d' qua $A(4;1)$ nên $8 + 1 + C = 0 \Rightarrow C = -9.$

Do đó $d': 2x + y - 9 = 0.$

Hình chiếu H là giao điểm của d và d' nên có tọa độ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{14}{5} \\ y = \dfrac{17}{5}. \end{cases}$

Vậy $H\left(\dfrac{14}{5};\dfrac{17}{5}\right)$.

b. A' đối xứng với A qua d khi H là trung điểm của AA' $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_{A'} = 2x_H \\ y_A + y_{A'} = 2y_H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = \dfrac{8}{5} \\ y_{A'} = \dfrac{29}{5}. \end{cases}$

Vậy $A'\left(\dfrac{8}{5};\dfrac{29}{5}\right)$.

Câu 29. Với điều kiện nào thì các điểm $M(x_1, y_1)$ và $N(x_2; y_2)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$?

Lời giải

Hai điểm M và N đối xứng với nhau qua Δ khi và chỉ khi có hai điều kiện :

- Trung điểm I của MN nằm trên Δ.
- Véctơ $\overrightarrow{MN}$ là véctơ pháp tuyến của Δ.

Từ đó ta được các điều kiện sau : $\begin{cases} a\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) + b\left(\dfrac{y_1 + y_2}{2}\right) + c = 0 \\ b(x_2 - x_1) - a(y_2 - y_1) = 0. \end{cases}$

Câu 30. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho điểm $A(0;2)$ và đường thẳng $d: x-2y+2=0.$ Tìm trên đường thẳng d hai điểm B,C sao cho tam giác ABC vuông ở B và thỏa mãn $AB=2BC.$

Lời giải

Do $B,C\in d$ nên có tọa độ dạng $B(-2+2b;b),C(-2+2c;c)$ với $b\neq c.$

Suy ra $\overrightarrow{AB}(-2+2b;b-2),\overrightarrow{BC}(2c-2b;c-b).$

Tam giác ABC vuông ở B nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow (c-b)(5b-6)=0\Leftrightarrow b=\dfrac{6}{5}$ (do $b\neq c$). Suy ra $B\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{6}{5}\right).$

Tam giác ABC thỏa mãn

$$AB=2BC\Leftrightarrow \sqrt{\frac{4}{25}+\frac{16}{25}}=2\sqrt{\left(2c-\frac{12}{5}\right)^2+\left(c-\frac{6}{5}\right)^2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=\dfrac{7}{5}. \end{array}\right.$$

Câu 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;1),B(4;-3)$ và dr $d: x-2y-1=0.$ Tìm tọa độ điểm C thuộc d sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng $6.$

Lời giải

Gọi $C(1+2c;c)\in(d).$

Phương trình đường thẳng (AB) là : $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-4}\Leftrightarrow 4x+3y-7=0.$

Theo giả thiết $d(C;AB)=6\Leftrightarrow \dfrac{|4(1+c)+3c-7|}{\sqrt{4^2+3^2}}=6\Leftrightarrow |11c-3|=30\Leftrightarrow c=3$ hoặc $c=-\dfrac{27}{11}.$

Với $c=3$ ta được $C(7;3)$

Với $c=\dfrac{-27}{11}$ ta được $C\left(\dfrac{-43}{11};\dfrac{-27}{11}\right).$

Câu 32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-3y-6=0$ và điểm $N(3;4).$ Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho tam giác OMN có diện tích vằng $\dfrac{15}{2}$ (với O là gốc tọa độ)

Lời giải

$\overrightarrow{ON}=(3;4)\Rightarrow ON=5.$

Đường thẳng ON có phương trình : $4x-3y=0.$

Gọi $M(3m+6;m)\in(d).$

Theo giả thiết ta có : $S_{OMN}=\dfrac{1}{2}ON.d(M;ON)\Leftrightarrow d(M;ON)=\dfrac{2S_{OMN}}{ON}=3$

Hay $\dfrac{|4(3m+6)-3m|}{5}=3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=\dfrac{-13}{3}. \end{array}\right.$

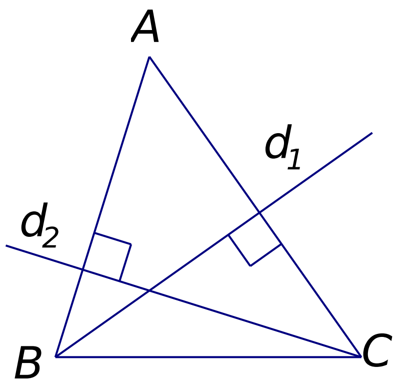
Với $m=-1$ suy ra $M(3;-1).$

Với $m=-\dfrac{13}{3}$ suy ra $M\left(-7;-\dfrac{13}{3}\right)$.

Dạng 5. Các yếu tố về tam giác.

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ đỉnh $A(1;0)$ và hai đường thẳng chứa các đường cao kẻ từ B,C có phương trình lần lượt là : $d_1: x-2y+1=0, d_2: 3x+y-1=0.$ Tìm tọa độ đỉnh B và C.

Lời giải



Đường thẳng AC đi qua $A(1;0)$ và vuông góc với d_1 nên AC có phương trình $2x+y-2=0.$

Tương tự, AB có phương trình $x-3y-1=0.$

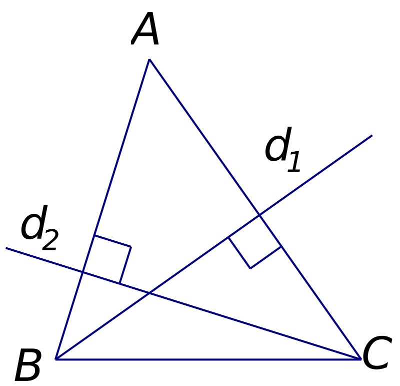
Do $B=d_1\cap AB$ nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ x-3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-2 \end{cases}$, ta được $B(-5;-2)$

Tương tự $C=d_2\cap AC$, ta được $C(-1;4).$

Vậy $B(-5;-2), C(-1;4).$

Câu 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC có phương trình cạnh $BC: x+y-9=0,$ đường cao qua đỉnh B và C lần lượt có phương trình $d_1: x+2y-13=0; d_2: 7x+5y-49=0.$ Tìm tọa độ đỉnh $A.$

Lời giải



Do $B = d_1 \cap BC$ nên tọa độ của B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + 2y - 13 = 0 \\ x + y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$, ta được $B(5;4)$.

Do $C = d_2 \cap BC$ nên $C(2;7)$.

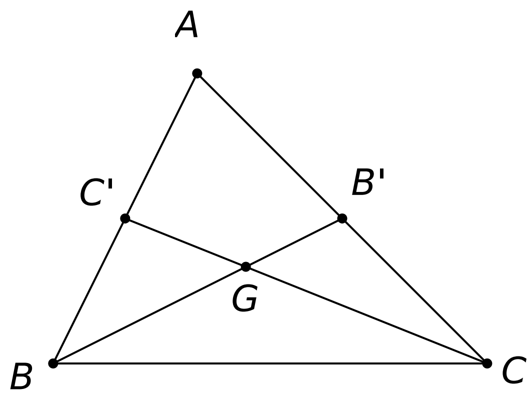
Cạnh AC đi qua C và vuông góc với d_1 nên AC có phương trình $2x - y + 3 = 0.$

Cạnh AB đi qua B và vuông góc với d_2 nên AB có phương trình $5x - 7y + 3 = 0.$

Do $A = AB \cap AC$ nên $A(-2;-1)$.

Câu 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC có $A(1;3)$ và hai đường trung tuyến là $BB': x - 2y + 1 = 0, CC': y - 1 = 0.$ Xác định tọa độ đỉnh B và C.

Lời giải



Do $B \in BB'$ nên tọa độ của B có dạng $(2b - 1; b).$

Vì C' là trung điểm của AB nên $C'\left(b; \dfrac{b+3}{2}\right).$

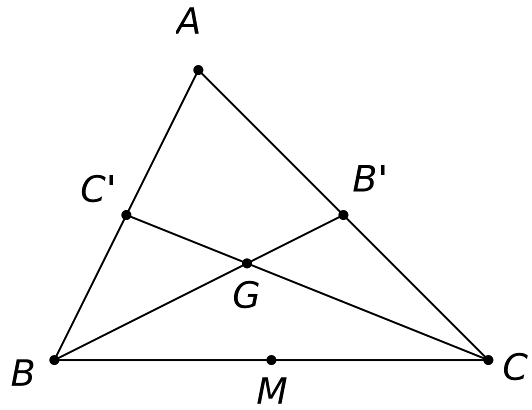
Mặt khác, $C' \in CC'$ nên ta được: $\dfrac{b+3}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow b = -1$ hay $B(-3;-1).$

Tương tự, B' là trung điểm của AC $B'\left(\dfrac{c+1}{2};2\right)$

Mặt khác $B' \in BB'$ nên $\dfrac{c+1}{2} - 2.2 + 1 = 0 \Leftrightarrow c = 5$ hay $C(5;1).$

Câu 36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ với $Oxy,$ cho tam giác ABC biết phương trình cạnh $BC: x - 2y = 5 = 0,$ phương trình đường trung tuyến $BB': y - 2 = 0$ và phương trình đường trung tuyến $CC': 2x - y - 2 = 0.$ Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Lời giải



Do $B = BB' \cap BC$ nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y-2=0 \\ x-2y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$, ta được $B(-1;2)$.

Tượng tự, $C = CC' \cap BC$, ta được $C(3;4)$.

Gọi G là giao điểm của BB' và CC', khi đó $G(2;2)$.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $M(3;1)$ và $\overrightarrow{GM} = (-1;1)$.

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên $A(x;y)$ thỏa mãn:

$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=3.(-1) \\ 3-y=3.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$, ta được $A(4;0)$.

Câu 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC có $A(1;5), B(-4;-5)$ và $C(4;-1).$ Viết phương trình đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc $A.$

Lời giải

Đường thẳng AC đi qua hai điểm A, C nên AC có phương trình $2x+y-7=0.$

Tương tự $AB: 2x-y+3=0$

Phương trình đường phân giác góc A là: $\dfrac{|2x+y-7|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{|2x-y+3|}{\sqrt{4+1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-5=0 \\ x-1=0 \end{array} \right.$.

Xét phân giác $d_1: y-5=0$. Ta có

$P(B;d_1) = -10, P(C;d_1) = -6$ nên suy ra B và C nằm cùng phía đối với d_1, suy ra d_1 là phân giác ngoài.

Từ đó suy ra $d_2: x-1=0$ là phân giác trong góc $A.$

Câu 38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC có $A(2;-4)$ và hai đường phân giác trong của góc B và C có phương trình lần lượt là $d_1: x+y-2=0, d_2: x-3y-6=0.$ Tìm tọa độ điểm B và $C.$

Lời giải

Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua phân giác $d_1.$

Suy ra tọa độ điểm $A_1(x;y)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{2}-3.\frac{y-4}{2}-6=0 \\ 3(x-2)+1.(y+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases}.$$ Ta được $A_1\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$.

Gọi A_2 là điểm đối xứng của A qua phân giác d_2, tương tự $A_2(6;0)$.

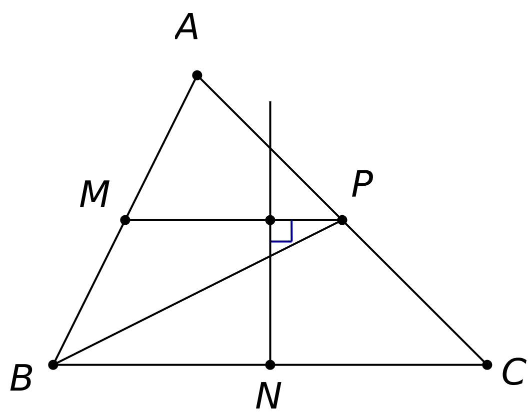
Đường thẳng BC đi qua hai điểm A_1, A_2 nên BC có phương trình $x+7y-6=0$.

$B=d_1\cap BC$ nên tọa độ của B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x+7y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$, ta được $B\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Tương tự $C=d_2\cap BC$ nên ta được $C(6;0)$.

Câu 39. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC biết trung điểm các cạnh AB, BC và CA lần lượt là : $M(-1;1), N(0;-3)$ và $P(3;-1)$. Viết phương trình đường trung trực của đoạn BC.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{MP}=(4;-2)$.

Vì M, P là trung điểm của AB, AC nên MP là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $MP//BC$

Do đó trung trực đoạn BC qua $N(0;-3)$ và nhận $\overrightarrow{MP}$ làm véctơ pháp tuyến nên có phương trình: $4(x-0)-3(y+3)=0 \Leftrightarrow 2x-y-3=0$

Câu 40. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC có $A(-2;4), B(4;1)$ và $C(-2;-1)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác.

Lời giải

Gọi $H(x;y)$ là trực tâm của tam giác ABC.

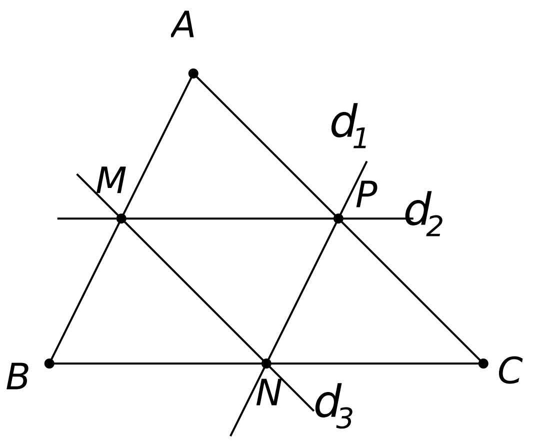
Ta có $\overrightarrow{AH}=(x+2;y-4),\overrightarrow{BC}=(-6;-2),\overrightarrow{BH}=(x-4;y-1),\overrightarrow{AC}=(0;-5).$

Do H là trực tâm nên ta được $\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2).(-6)+(y-4).(-2)=0\\ (x-4).0+(y-1).(-5)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}.$

Vậy $H(-1;1).$

Câu 41. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC có các đường trung bình nằm trên các đường thẳng có phương trình $d_1:2x-y+1=0,d_2:x+4y-13=0,d_3:x-3y-1=0.$ Viết phương trình cạnh $AB.$

Lời giải



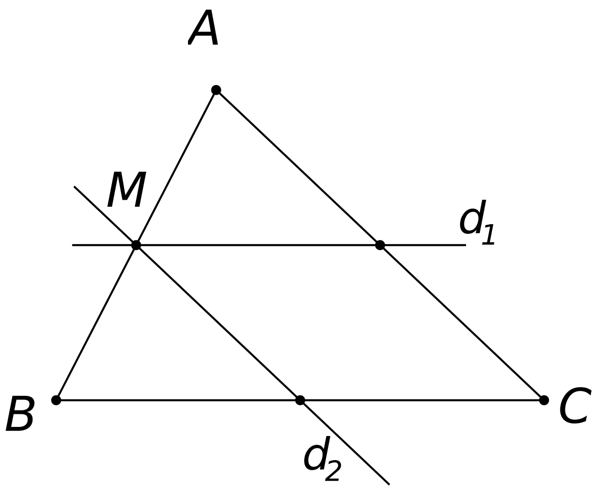
Giả sử d_1 song song với $AB,$ d_2 song song với $BC,$ d_3 song song với $CA.$

Gọi M là trung điểm của $AB.$ Khi đó $M=d_2\cap d_3$ nên tọa độ $M(x;y)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases}x+4y-13=0\\ x-2y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\ y=2\end{cases}$, ta được $M(5;2).$

Đường thẳng AB đi qua M và song song với d_1 nên có phương trình $2x-y-8=0.$

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC có hai đường trung bình kẻ từ trung điểm M của AB nằm trên các đường thẳng có phương trình $d_1:x-4y+7=0,d_2:3x-2y-9=0$ và tọa độ điểm $B(7;1).$ Tìm tọa độ điểm $C.$

Lời giải



TH1: Giả sử d_1 song song với BC, d_2 song song với AC.

Tọa độ $M(x;y)$ thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x-4y+7=0 \\ 3x-2y-9=0 \end{cases}$, ta được $M(5;3)$.

Đường thẳng AC đi qua A và song song với d_2 nên có phương trình: $3x-2y+1=0$.

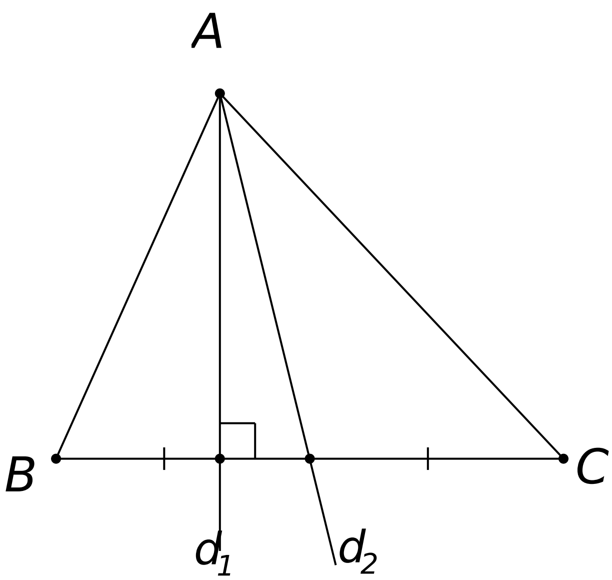
Đường thẳng BC đi qua B và song song với d_1 nên có phương trình: $x-4y-3=0$.

Ta có $C=AC\cap BC$ nên tọa độ điểm $C(x;y)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} 3x-2y+1=0 \\ x-4y-3=0 \end{cases}$, ta được $C(-1;-1)$

TH2: Giả sử d_1 song song với AC, d_2 song song với BC. Tương tự TH1 ta được $C(11;7)$.

Câu 43. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $C(4;-1)$, đường cao và trung tuyến kẻ từ đỉnh A có phương trình lần lượt là $d_1: 2x-3y+12=0, d_2: 2x+3y=0$. Tìm tọa độ điểm B.

Lời giải



Ta có $A = d_1 \cap d_2$ nên tọa độ điểm $A(x;y)$ thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 2x - 3y + 12 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$, ta được $A(-3;2)$

Đường thẳng BC đi qua C và vuông góc với d_1 nên có phương trình $3x + 2y - 10 = 0.$

Gọi M là trung điểm BC, suy ra $M = BC \cap d_2$ nên tọa độ điểm M là $(6;-4).$

Suy ra $B(8;-7).$

Câu 44. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC có $A(2;1),$ đường cao qua đỉnh B và đường trung tuyến qua đỉnh C lần lượt có phương trình $d_1 : x - 3y - 7 = 0, d_2 : x + y + 1 = 0.$ Tìm tọa độ các đỉnh B và $C.$

Lời giải

Điểm $B \in d_1$ nên tọa độ của B có dạng $(3b + 7; b).$

Gọi M là trung điểm AB, suy ra $M\left(\dfrac{3b+9}{2};\dfrac{b+1}{2}\right).$

Mặt khác, $M \in d_2$ nên $\dfrac{3b+9}{2} + \dfrac{b+1}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -3.$

Suy ra $B(-2;-3).$

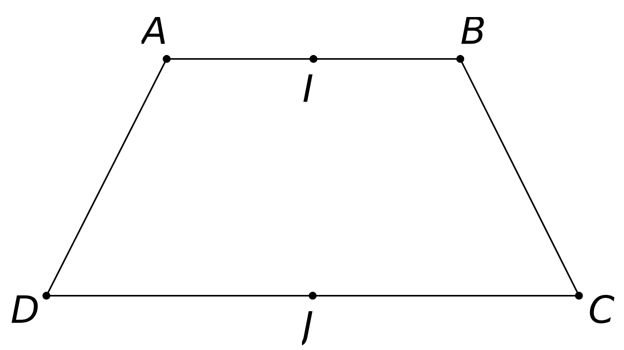
Đường thẳng AC đi qua A và vuông góc d_1 nên có phương trình $3x + y - 7 = 0.$

Ta có $C = AC \cap d_2$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + y - 7 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$, ta được $C(4;-5).$

Dạng 6. Các yếu tố về tứ giác.

Câu 45. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho ba điểm $A(10;5)$, $B(15;-5), D(-20;0)$ là các đỉnh của hình thang cân $ABCD$ trong đó AB song song với CD. Tìm tọa độ điểm $C.$

Lời giải



Đường thẳng CD đi qua $D(-20;0)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (5;-10)$ làm véctơ chỉ phương nên có phương trình $2x + y + 40 = 0.$

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD

Ta có $I\left(\dfrac{25}{2};0\right)$ và $IJ\perp CD.$

Phương trình đường thẳng IJ là $2x-4y-25=0.$

Mà $J=IJ\cap CD$ nên tọa độ điểm J là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x+y+40=0\\2x-4y-25=0\end{cases}$, ta được $J\left(\dfrac{-27}{2};-13\right).$

Theo tính chất hình thang cân thì J là trung điểm của CD, suy ra $C(-7;-26).$

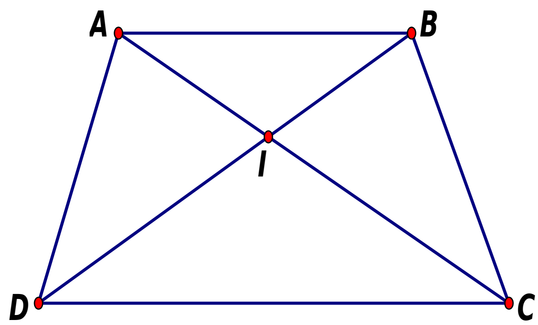
Câu 46. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy,$ cho hình thang cân $ABCD$ với AB song song CD và $AB<CD.$ Biết các đỉnh $A(0;2), D(-2;2),$ giao điểm I của hai đường chéo AC và BD nằm trên các đường thẳng $d: x+y-4=0$ sao cho $\widehat{AID}=45^0.$ Tìm tọa độ điểm B và $C.$

Lời giải

Do $I\in d$ nên $I(t;4-t)$ Ta có $AD=2\sqrt{5}, IA=\sqrt{2t^2-4t+4}$, $ID=\sqrt{2t^2-8t+40}$.

Áp dụng định lý hàm số cô-sin cho tam giác AID ta được

$$\cos\widehat{AID}=\frac{IA^2+ID^2-AD^2}{2IA.ID}$$



$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{t^2-3t+6}{\sqrt{t^2-4t+20}.\sqrt{t^2-2t+2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2\\t=4\end{array}\right..$$

Với $t=2$ ta được $I(2;2)$ và $IA=2.ID=4\sqrt{2}$.

Do đó $\overrightarrow{ID}=-\dfrac{ID}{IB}.\overrightarrow{IB}=-2\sqrt{2}.\overrightarrow{IB}$ suy ra $B\left(2+\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right)$ và $C\left(2+4\sqrt{2};2+4\sqrt{2}\right)$.

Tương tự với $t=4$ ta tìm được $B\left(4+3\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ và $C\left(4+4\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right)$.

Câu 47. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$, biết hai đường chéo AC và CD lần lượt nằm trên hai đường thẳng $d_1: x-3y+9=0,\ d_2: x+3y-3=0$ và phương trình đường thẳng

$AB: x-y+9=0$. Tìm tọa độ điểm C.

Lời giải.

Gọi I là tâm của hình bình hành. Ta có $I=AC\cap BD$ nên tọa độ điểm $I(x;y)$ thỏa mãn hệ

$\begin{cases} x-3y+9=0 \\ x+3y-3=0 \end{cases} \Rightarrow I(-3;2)$.

Do $A=AB\cap AC$ nên tọa độ điểm $A(x;y)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x-y+9=0 \\ x-3y+9=0 \end{cases} \Rightarrow A(-9;0)$

Hình bình hành có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên I là trung điểm AC suy ra $C(3;4)$

Câu 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: x-y-4=0,\ d_2: 2x+y-2=0$, và hai điểm $A(7;5),\ B(2;3)$. Tìm điểm trên đường thẳng d_1 và điểm trên đường thẳng d_2 sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

Do $C\in d_1$ nên $C(c;c-4)$ và $D\in d_2$ nên $D(d;2-2d)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-5;-2),\ \overrightarrow{DC}=(c-d;c+2d-6)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow \begin{cases} c-d=-5 \\ c+2d-6=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2 \\ d=3 \end{cases}$

Vậy $C(-2;-6), D(3;-4)$

Câu 49. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có $A(0;-1), B(2;1)$ và tâm I thuộc đường thẳng $d: x+y-1=0$. Tìm tọa độ điểm C.

Lời giải.

Do $I\in d$ nên $I(t;1-t)$. Ta có $\overrightarrow{AI}=(t;2-t),\ \overrightarrow{BI}=(t-2;-t)$.

Vì $ABCD$ là hình thoi, suy ra $AI\perp BI$ nên $\overrightarrow{AI}\perp\overrightarrow{BI}=0 \Leftrightarrow t(t-2)+(2-t)(-t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=o \\ t=2 \end{array}\right.$.

Với $t=0$ thì $I(0;1)$. Do là trung điểm của AC nên suy ra $C(0;3)$.

Với $t=2$ thì $I(2;-1)$. Do là trung điểm của AC nên suy ra $C(4;-1)$.

Câu 50. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có phương trình cạnh $AB: x-2y+4=0$, phương trình cạnh $AD: 2x-y+2=0$. Điểm $M(2;2)$ thuộc đường thẳng BD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow A(0;2)$.

Phương trình các đường phân giác góc A là $\dfrac{x-2y+4}{\sqrt{5}}=\pm\dfrac{2x-y+2}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d_1: x+y-2=0\\ d_2: x-y+2=0\end{array}\right.$.

Trường hợp $d_1: x+y-2=0$.

Đường thẳng BD đi qua M và vuông góc với d_1 nên có phương trình $x-y=0$.

Do $B=BD\cap AD$ nên tọa độ điểm $B(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-y=0\\ x-2y+4=0\end{cases}\Rightarrow B(4;4)$.

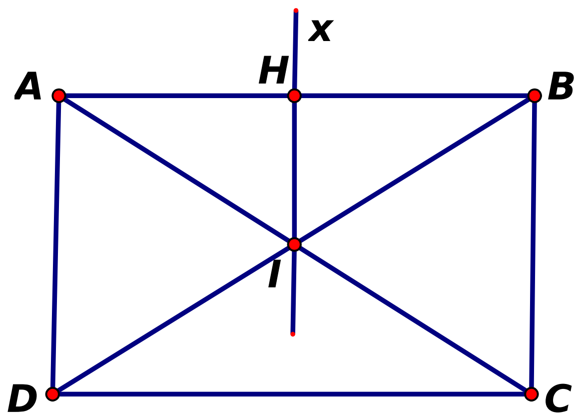
Do $I=BD\cap d_1$ nên tọa độ điểm $I(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-y=0\\ x+y-2=0\end{cases}\Rightarrow I(1;1)$.

Vì C đối xứng với A qua I nên $C(2;0)$.

Trường hợp $d_2: x-y+2=0$. Tương tự như trường hợp 1.

Câu 51. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\dfrac{1}{2};0\right)$. Phương trình đường thẳng $AB: x-2y+2=0$ và $AB=2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật, biết đỉnh A có hoành độ âm.

Lời giải.



Khoảng cách từ I đến đường thẳng AB bằng

$$d(I,AB)=\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}-2.0+2\right|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}.$$

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với AB

nên $d: 2x+y-1=0$.

Gọi B là hình chiếu vuông góc của I trên AB. Khi đó

tọa độ điểm B thỏa mãn hệ

$$\begin{cases}x-2y+2=0\\ 2x+y-1=0\end{cases}\Rightarrow H(0;1).$$

Do $A\in AB$ nên $A(2a-2;a)$ với $a<1$. Từ giả thiết $AB=2AD$, suy ra

$AH=2d(I,AB)\Leftrightarrow\sqrt{(2-2a)^2+(1-a)^2}=\sqrt{5}\Leftrightarrow|1-a|=1\Leftrightarrow a=0$ hoặc $a=2$ (loại).

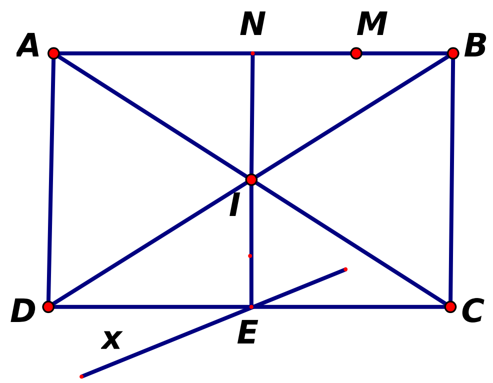
Suy ra $A(-2;0)$, do H là trung điểm AB nên $B(2;2)$.

Hơn nữa I là trung điểm AC và BD nên $C(3;0)$, $D(-1;-2)$.

Vậy $A(-2;0), B(2;2), C(3;0), D(-1;-2)$.

Câu 52. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I(6;2)$ là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $d: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Lời giải.



Do $E \in d$ nên $E(t;5-t)$. Gọi N là trung điểm AB, suy ra I là trung điểm NE nên $N(12-t;t-1)$. Ta có $\overrightarrow{MN}=(11-t;t-6), \overrightarrow{IE}=(t-6;3-t)$. Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{IE}=0 \Leftrightarrow (11-t)(t-6)(t-6)(3-t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6 \\ t=7 \end{array}\right.$.

* Với $t=6$ suy ra $N(6;5)$. Đường thẳng AB đi qua hai điểm M và N nên có phương trình $AB: y=5$.

* Với $t=7$ suy ra $N(5;6)$. Đường thẳng AB đi qua hai điểm M và N nên có phương trình $AB: x-4y+19=0$.

Câu 53. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(1;1)$ và $M(4;2)$ là trung điểm cạnh BC. Tìm tọa độ điểm B.

Lời giải.

Giả sử $\overrightarrow{n_{AB}}=(a;b)$ với $a^2+b^2 \neq 0$ là véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng AB. Suy ra đường thẳng BC có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BC}}=(b;-a)$.

Đường thẳng AB đi qua $A(1;1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{AB}}=(a;b)$ nên $AB: a(x-1)+b(y-1)=0$ hay $ax+by-a-b=0$.

Đường thẳng BC đi qua $M(4;2)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BC}}=(b;-a)$ nên $BC: b(x-4)-a(y-2)=0$ hay $bx-ay+2a-4b=0$.

Ta có $AB=d(A,BC)=\dfrac{|a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $BC=2d(M,AB)=2\dfrac{|3a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Vì là hình vuông nên $AB=BC \Leftrightarrow |a-3b|=2|3a+b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-a \\ b=7a \end{array}\right.$.

Với $b=-a$ chọn $a=1$ suy ra $b=-1$. Ta được $AB: x-y=0$ và $BC: x+y-6=0$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow B(3;3)$.

Với $b=7a$ chọn $a=1$ suy ra $b=7$. Ta được $AB: x+7y-8=0$ và $BC: 7x-y-26=0$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+7y-8=0 \\ 7x-y-26=0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{19}{5};\frac{3}{5}\right)$.

Câu 54. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ trong đó thuộc đường thẳng $d_1: x+y-1=0$ và C,D nằm trên đường thẳng $d_2: 2x-y+3=0$. Tìm tọa độ điểm C, biết hình vuông có diện tích bằng 5 và có hoành độ dương.

Lời giải.

Do $A\in d_1$ nên $A(a;1-a)$ với $a>0$. Theo giả thiết bài toán, ta có

$S_{ABCD}=5 \Leftrightarrow d(A,d_2)=\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{|2a-(1-a)+3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow a=1$ hoặc $a=-\dfrac{7}{3}$ (loại).

Với $a=1$, suy ra $A(1;0)$.

Đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với CD nên có phương trình $AD: x+2y-1=0$.

Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+2y-1=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases} \Rightarrow D(-1;1)$.

Do $C\in d_2$ nên $C(c;2c+3)$. Suy ra $\overrightarrow{CD}=(-1-c;-2-2c)$. Ta có

$CD=\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(-1-c)^2+(-2-2c)^2}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |-1-c|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=2 \end{array}\right.$

Vậy $C(0;3)$ hoặc $C(-2;-1)$.

Dạng 7: Câu toán cực trị

Câu 55. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và điểm $A(1;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho MA nhỏ nhất.

Lời giải:

Điểm $M\in d$ nên có tọa độ dạng $M(4-2m;m)$.

Khi đó $\overrightarrow{AM}=(3-2m;m-4)$, suy ra $AM=\sqrt{(3-2m)^2+(m-4)^2}=\sqrt{5m^2-20m+25}$

Ta có $\sqrt{5m^2-20m+25}=\sqrt{5(m-2)^2+5}\ge\sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=2$

Vậy $M(0;2)$ và giá trị nhỏ nhất của AM bằng $\sqrt{5}$

Câu 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;4)$ và $B(3;5)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.

Lời giải:

Phương pháp đại số: Đường thẳng d đi qua $A(1;4)$ và có véc tơ pháp tuyến $n=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ nên có phương trình

$d:a(x-1)+b(y-4)=0$ hoặc $ax+by-a-4b=0$

Khoảng cách từ B đến đường thẳng d được xác định $d(B,d)=\dfrac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

- Nếu $a=0$ thì $d(B,d)=1$
- Nếu $b=0$ thì $d(B,d)=2$
- Khi $a\neq 0$ và $b\neq 0$ ta chọn $b=1$

Suy ra $d(B,d)=\dfrac{|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}}=|f(a)|$, với $f(a)=\dfrac{2a+1}{\sqrt{a^2+1}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Shwarz, ta có $(2a+1)^2\le(2^2+1^2)(a^2+1^2)\Rightarrow\dfrac{|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}}\le\sqrt{5}$

Vậy $\max\limits_{\mathbb{R}} f(a)=\sqrt{5}$, xảy ra khi $a=2$.

So sánh các trường hợp, ta được $d(B,d)$ lớn nhất khi $a=2$, $b=1$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm $d:2x+y-6=0$

Cách 2: Phương pháp hình học:

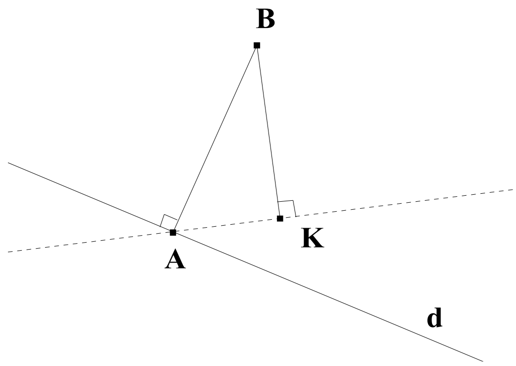
Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng d.

Khi đó $d(B,d)=BK$.

Xét tam giác ABK vuông tại K, ta có

$d(B,d)=BK\le AB=\sqrt{5}$ (BĐT tam giác mở rộng).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $K\equiv A$.



Khi đó d được xác định là đi qua $A(1;4)$ và vuông góc với AB nên nhận $\overrightarrow{AB}=(2;1)$ làm vecto pháp tuyến.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm $d:2x+y-6=0$

Câu 57. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:x+2y-4=0$ và $A(1;4)$, $B(8;3)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

Lời giải:

Ta có: $P(A,d).P(B,d)=(x_A+2y_A-4)(x_B+2y_B-4)=5.10>0$

Suy ra hai điểm A và B cùng phía so với đường thẳng d.

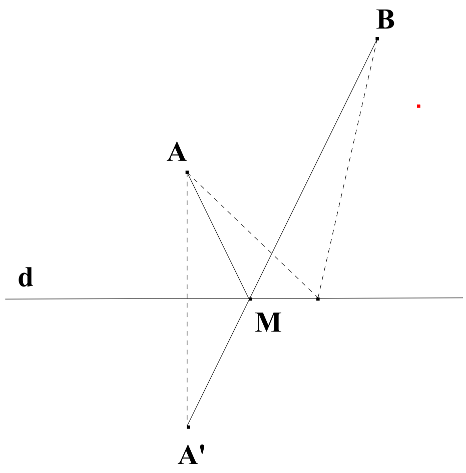
Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d.

Khi đó tọa độ điểm $A'(x;y)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 2(x-1)-1(y-4)=0 \\ \dfrac{x+1}{2}+2.\dfrac{y+4}{2}-4=0 \end{cases} \Rightarrow A'(-1;0)$$

Khi đó $MA+MB=MA'+MB\geq A'B=3\sqrt{10}$ (BĐT tam giác mở rộng).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: A', M, B thẳng hàng hay M thuộc đường thẳng $A'B$.



Đường thẳng $A'B$ đi qua $A'(-1;0)$ và $B(8;3)$ neen có phương trình $A'B: x-3y+1=0$.

Mặt khác, theo giả thiết M thuộc d nên tọa độ điểm M thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+2y-4=0 \\ x-3y+1=9 \end{cases} \Rightarrow M(2;1)$

! *Câu toán này dùng cho hai điểm khác phía so với d. Nếu đề bài đã cho A và B khác phía với d thì ta không làm bước lấy đối xứng.*

Câu 58. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(8;3)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất.

Lời giải:

Ta có $\overrightarrow{AB}=(7;-1)$; suy ra $AB=\sqrt{50}$. Chu vi tam giác ABM là:

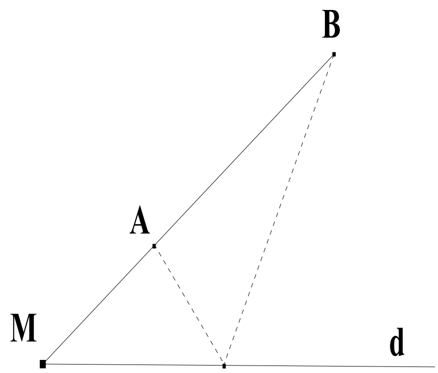
$C_{\Delta ABM}=MA+MB+AB=MA+MB+\sqrt{50}$

Để $C_{\Delta ABM}$ nhỏ nhất khi $MA+MB$ nhỏ nhất. Bạn đọc làm tương tự như bài trên.

Câu 59. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(3;2)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $|MA-MB|$ lớn nhất.

Lời giải:

Ta có



$P(A,d).P(B,d)=(x_A+2y_A-4)(x_B+2y_B-4)=5.3>0$

Suy ra hai điểm A và B cùng phía so với đường thẳng d.

Theo bất đẳng thức tam giác mở rộng, ta có

$|MA-MB|\leq AB=2\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A, M, B thẳng hàng hay M thuộc đường thẳng AB.

Đường thẳng AB đi qua $A(1;4)$ và $B(3;2)$ nên có phương trình $AB: x+y-5=0$.

Mặt khác, theo giả thiết M thuộc d nên tọa độ điểm M thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow M(6;-1)$$.

! *Câu toán này dùng cho hai điểm cùng phía so với d. Nếu đề bài đã cho A và B khác phía với d thì ta lấy đối xứng một trong hai điểm A hoặc B qua d.*

Câu 60. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B(9;0)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Lời giải:

Điểm $M\in d$ nên có tọa độ dạng $M(4-2m;m)$

Ta có $\overrightarrow{MA}=(2m-3;4-m)$; $\overrightarrow{MB}=(2m+5;-m)$, suy ra $3.\overrightarrow{MB}=(6m+15;-3m)$

Do đó $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=(8m+12;4-4m)$. Ta có

$$\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{(8m+12)^2+(4-4m)^2}=\sqrt{80m^2+160m+160}=4\sqrt{5}\sqrt{m^2+2m+2}$$

$$=4\sqrt{5}.\sqrt{(m+1)^2+1}\geq 4\sqrt{5}.\sqrt{1}=4\sqrt{5}$$.

Câu 61. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y-4=0$ và hai điểm $A(1;4)$, $B\left(8;\frac{1}{2}\right)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho $5MA^2+2MB^2$ nhỏ nhất.

Lời giải

Điểm $M\in d$ nên có tọa độ dạng $M(4-2m;m)$

Ta có $\overrightarrow{MA}=(2m-3;4-m)$, suy ra $5MA^2=5\left[(2m-3)^2+(4-m)^2\right]$;

$\overrightarrow{MB}=\left(2m+4;\frac{1}{2}-m\right)$, suy ra $2MB^2=2\left[(2m+4)^2+\left(\frac{1}{2}-m\right)^2\right]$.

Do đó $5MA^2+2MB^2=35m^2-70m+\frac{315}{2}=35(m-1)^2+\frac{245}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=1$.

Vậy $M(2;1)$ và $5MA^2+2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{245}{2}$.

Câu 62. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-2y-2=0$ và hai điểm $A(3;4)$, $B(-1;2)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho MA^2-2MB^2 lớn nhất.

Lời giải:

Điểm $M\in d$ nên có tọa độ dạng $M(2m+2;m)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=(1-2m;4-m)$, suy ra $MA^2=(1-2m)^2+(4-m)^2$;

$\overrightarrow{MB}=(-3-2m;2-m)$, suy ra $2MB^2=2\left[(-3-2m)^2+(2-m)^2\right]$.

Do đó: $MA^2-2MB^2=-5m^2-28m-9=-5\left(m+\frac{14}{5}\right)^2+\frac{151}{5}\leq\frac{151}{5}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=-\frac{14}{5}$.

Vậy $M\left(-\frac{18}{5};-\frac{14}{5}\right)$ và MA^2-2MB^2 đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{151}{5}$.

Câu 63. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;1)$. Lấy điểm B thuộc Ox có hoành độ không âm và điểm C thuộc Oy có tung độ không âm sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm tọa
độ điểm B và C sao cho diện tích tam giác ABC.

a)Lớn nhất

b) Nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi $B(b;0)$, $C(0;c)$ với điều kiện $b^2+c^2\neq 0$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=(b-2;1)$, $\overrightarrow{AC}=(2;c-1)$. Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow (b-2).2+1.(c-1)=0 \Leftrightarrow 2b+c-5=0\ (*)$. Từ $(*)$ suy ra $b=\frac{5-c}{2}$, do $c\geq 0$ nên $b\leq\frac{5}{2}$. Vậy $0\leq b\leq\frac{5}{2}$. Ta có:

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}.\sqrt{(b-2)^2+1}.\sqrt{4+(c-1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(b-2)^2+1}.\sqrt{4+4(b-2)^2}=(b-2)^2+1$.

a) Khảo sát hàm số bậc hai $f(b)=(b-2)^2+1$ trên $\left[0;\frac{5}{2}\right]$, ta tìm được $\max\limits_{\left[0;\frac{5}{2}\right]} f(b)=f(0)=5$.

Với $b=0$, suy ra $c=5$. Vậy $B(0;0)$, $C(0;5)$ và diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất bằng 5.

b) Ta có $S_{\Delta ABC}=(b-2)^2+1\geq 1$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $b=2$, suy ra $c=1$. Vậy $B(2;0)$, $C(0;1)$ và diện tích tam giác ABC đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Câu 64. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng đi qua $M(3;2)$ cắt tia Ox tại A và tia Oy tại B sao cho diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua $M(3;2)$ và cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A và B khác O, nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a>0$, $b>0$. Do đó phương trình của d có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Đường thẳng d đi qua $M(3;2)$ nên $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1$. Ta có $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}|a|.|b|=\frac{1}{2}ab$.

Áp dụng BĐT Cauchy, ta được $1=\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{6}{ab}}=2\sqrt{\frac{3}{S_{\Delta OAB}}}$, suy ra $S_{\Delta OAB}\geq 12$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{3}{a}=\frac{2}{b}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=4 \end{cases}$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d: \frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$.

Câu 65. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(4;1)$ và cắt chiều dương các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho $OA+OB$ nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1. Giả sử đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến $n=(a;b)$ với $a^2+b^2 \neq 0$ nên có phương trình d: $a(x-4)+b(y-1)=0$ hay $ax+by-4a-b=0$. Khi đó $d \cap Ox = A\left(\frac{4a+b}{a};0\right)$ và $d \cap Oy = B\left(0;\frac{4a+b}{b}\right)$.

Điều kiện: $\frac{4a+b}{a}>0$; $\frac{4a+b}{b}>0$.

Ta có

$$OA+OB=\left|\frac{4a+b}{a}\right|+\left|\frac{4a+b}{b}\right|=\frac{4a+b}{a}+\frac{4a+b}{b}=5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b} \geq 5+2\sqrt{\frac{b}{a}.\frac{4a}{b}}=9.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b} \Leftrightarrow b^2=4a^2$. Ta chọn $a=1$, suy ra $b=2$. Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d: x+2y-6=0$.

Cách 2. Đường thẳng d đi qua $M(4;1)$ và cắt các chiều dương Ox, Oy lần lượt tại A và B nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a>0$, $b>0$. Do đó phương trình của d có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Đường thẳng d đi qua $M(4;1)$ nên $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1$. Ta có $OA+OB=|a|+|b|=a+b$.

Áp dụng BDT Bunhiacopxki, ta được

$$\left(\sqrt{\frac{4}{a}}.\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1}{b}}.\sqrt{b}\right)^2 \leq \left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=a+b$$ (do $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1$).

Suy ra $a+b \geq 9$ hay $OA+OB \geq 9$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{\frac{4}{a}}:\sqrt{a}=\sqrt{\frac{1}{b}}:\sqrt{b} \\ \frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=6 \\ b=3 \end{cases}$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $d: \frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$.

Câu 66. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(3;1)$ và cắt chiều dương các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho $12OA+9OB$ nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1. Giả sử đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến $n=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ nên có phương trình d : $a(x-3)+b(y-1)=0$ hay $ax+by-3a-b=0$.

Khi đó $d\cap Ox=A\left(\dfrac{3a+b}{a};0\right)$ và $d\cap Oy=B\left(0;\dfrac{3a+b}{b}\right)$.

Điều kiện $\dfrac{3a+b}{a}>0$; $\dfrac{3a+b}{b}>0$.

Ta có

$$12OA+9OB=12\left|\frac{3a+b}{a}\right|+9\left|\frac{3a+b}{b}\right|=12.\frac{3a+b}{a}+9.\frac{3a+b}{b}=45+\frac{12b}{a}+\frac{27a}{b}$$

$$\geq 45+2\sqrt{\frac{12b}{a}.\frac{27a}{b}}=81$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{12b}{a}=\dfrac{27a}{b}\Leftrightarrow 4b^2=9a^2$. Ta chọn $a=2$, suy ra $b=3$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình d : $2x+3y-9=0$.

Cách 2. Đường thẳng d đi qua $M(3;1)$ và cắt chiều dương các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a>0$, $b>0$. Do đó phương trình của d có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

Đường thẳng d đi qua $M(3;1)$ nên $\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{b}=1$.

Ta có: $12OA+9OB=12|a|+9|b|=12a+9b$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta được

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}.\sqrt{12a}+\frac{1}{\sqrt{b}}.3\sqrt{b}\right)^2\leq\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)(12a+9b)=12a+9b.$$

Suy ra: $12a+9b\geq 81$ hay $12OA+9OB\geq 81$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}:\sqrt{12a}=\dfrac{1}{\sqrt{b}}:3\sqrt{b}\\ \dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{9}{2}\\ b=3\end{cases}.$$

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình d : $\dfrac{2x}{9}+\dfrac{y}{3}=1$.

Câu 67. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(-4;3)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B khác O sao cho $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng d. Tam giác OAB vuông tại nên

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{OH^2}\geq\frac{1}{OM^2}=\frac{1}{25}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv M$. Khi đó đường thẳng d đi qua $M(-4;3)$ và vuông góc với OM nên nhận $\overrightarrow{OM}=(-4;3)$ làm véc-tơ pháp tuyến. Vậy phương trình đường thẳng d: $4x-3y+25=0$.

Cách 2. Đường thẳng d đi qua $M(-4;3)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B khác O nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a\neq 0$, $b\neq 0$. Do đó phương trình của d có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Đường thẳng d đi qua $M(-4;3)$ nên $\frac{-4}{a}+\frac{3}{b}=1$. Ta có $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta được

$$\left(\frac{-4}{a}+\frac{3}{b}\right)^2\leq\left[(-4)^2+3^2\right]\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

Suy ra $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{1}{25}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}-4:\frac{1}{a}=3:\frac{1}{b}\\ \frac{-4}{a}+\frac{3}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{25}{4}\\ b=\frac{25}{3}\end{cases}$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình d: $\frac{-4x}{25}+\frac{3y}{25}=1$.

Cách 3. Giả sử đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến $n=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ nên có phương trình d: $a(x+4)+b(y-3)=0$ hay $ax+by+4a-3b=0$.

Khi đó $d\cap Ox=A\left(\frac{3b-4a}{a};0\right)$ và $d\cap Oy=B\left(0;\frac{3b-4a}{b}\right)$. Ta có:

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{a^2}{(3b-4a)^2}+\frac{b^2}{(3b-4a)^2}=\frac{a^2+b^2}{(3b-4a)^2}\geq\frac{a^2+b^2}{(3^2+4^2)(b^2+a^2)}=\frac{1}{25}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{3}{b}=\frac{-4}{a}\Leftrightarrow 3a=-4b$. Chọn $a=4$, suy ra $b=-3$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình d: $4x-3y+25=0$.

Câu 68. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(2;-1)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B khác O sao cho $\frac{9}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1. Đường thẳng d đi qua $M(2;-1)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B khác O nên $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a\neq 0$, $b\neq 0$. Do đó phương trình của d có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Đường thẳng d đi qua $M(2;-1)$ nên $\frac{2}{a}-\frac{1}{b}=1$. Ta có $\frac{9}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}=\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta được

$$\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{b}\right)^2=\left(\frac{2}{3}.\frac{3}{a}-\frac{1}{2}.\frac{2}{b}\right)^2\leq\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}\right).$$

Suy ra $\frac{9}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}=\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}\geq\frac{36}{25}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{2}{3}:\frac{3}{a}=-\frac{1}{2}:\frac{2}{b}\\ \frac{2}{a}-\frac{1}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{25}{8}\\ b=-\frac{25}{9}\end{cases}$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình d: $\frac{8x}{25}-\frac{9y}{25}=1$.

Cách 2. Giả sử đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến $n=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ nên có phương trình d: $a(x-4)+b(y+1)=0$ hay $ax+by-2a+b=0$.

Khi đó $d\cap Ox=A\left(\frac{2a-b}{a};0\right)$ và $d\cap Oy=B\left(0;\frac{2a-b}{b}\right)$. Ta có:

$$\frac{9}{OA^2}+\frac{4}{OB^2}=\frac{9a^2}{(2a-b)^2}+\frac{4b^2}{(2a-b)^2}=\frac{9a^2+4b^2}{(2a-b)^2}=\frac{9a^2+4b^2}{\left(\frac{2}{3}.3a-\frac{1}{2}.2b\right)^2}\geq\frac{9a^2+4b^2}{\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\right)(9a^2+4b^2)}=\frac{36}{25}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{2}{3}:3a=-\frac{1}{2}:2b$. Chọn $a=8$, suy ra $b=-9$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình d: $8x-9y-25=0$.

Câu 69. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(0;2)$ và hai đường d_1: $3x+y+2=0$, d_2: $x-3y+4=0$. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại B, C (B và C khác A) sao cho $\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Tọa độ giao điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x+y+2=0 \\ x-3y+4=0 \end{cases} \Rightarrow A(-1;1)$.

Đường thẳng d_1 có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n_1}=(3;1)$; Đường thẳng d_2 có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n_2}=(1;-3)$.

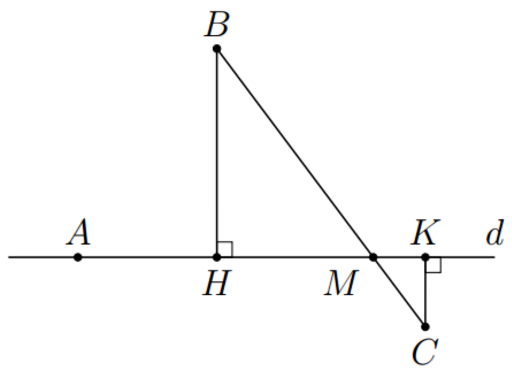
Ta có $\vec{n_1}.\vec{n_2}=0$. Suy ra $d_1 \perp d_2$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng d. Tam giác ABC vuông tại A nên $\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{AH^2}\geq\frac{1}{AM^2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv M$. Khi đó đường thẳng d đi qua $M(0;2)$ và vuông góc với $\overrightarrow{AM}$ nên nhận $\overrightarrow{AM}=(1;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến. Vậy phương trình đường thẳng d: $x+y-2=0$.

Câu 70. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;2)$ và $C(7;10)$. Viết phương trình đường thẳng d qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến d là lớn nhất.

Lời giải

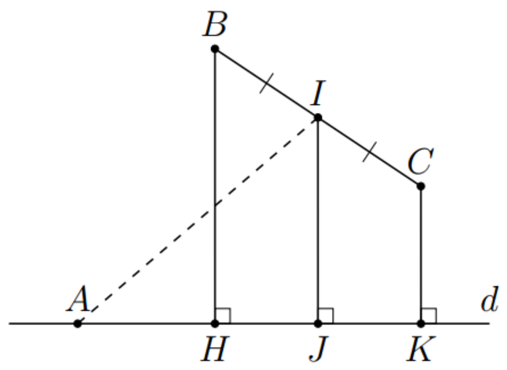
Trường hợp 1.



Giả sử d cắt BC tại M. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và C trên d. Ta có $d(B,d)+d(C,d)=BH+CK\leq BM+CM=BC$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi d vuông góc với BC.

Trường hợp 2.



Giả sử d không cắt BC. Gọi I là trung điểm BC. Gọi H, I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C và I trên d. Ta có $d(B,d)+d(C,d)=BH+CK=2IJ\le 2AI$.

Dấu "=" xảy ra khi d vuông góc với AI. Bây giờ ta so sánh BC và $2AI$. Vì I là trung điểm BC nên $I(5;6)$. Ta có $2AI=2\sqrt{41}>BC=4\sqrt{5}$. Vậy đường thẳng d cần tìm qua $A(1;1)$ và nhận $\overrightarrow{AI}=(4;5)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên d: $4x+5y-9=0$.

Chú ý: Nếu $BC>2AI$ thì đường thẳng d cần tìm qua A, có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{BC}$.

Câu 71. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có phương trình cạnh AB: $x+2y-2=0$, phương trình cạnh AC: $2x+y+1=0$, điểm $M(1;2)$ thuộc đoạn BC. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Đường thẳng AB có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}=(1;2)$; Đường thẳng AC có véc-tơ pháp tuyến $n_{AC}=(2;1)$. Giả sử đường thẳng BC có véc-tơ pháp tuyến $n_{BC}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$. Do đó BC: $a(x-1)+b(y-2)=0$ hay $ax+by-a-2b=0$.

Tam giác ABC cân tại A nên

$\cos\widehat{ABC}=\cos\widehat{ACB}$ $\Leftrightarrow$ $\left|\cos(n_{AB},n_{BC})\right|=\left|\cos(n_{AC},n_{BC})\right|$

$$\Leftrightarrow \frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}}=\frac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b\\ a=b\end{array}\right.$$

• Với $a=-b$, chọn $b=-1$ suy ra $a=1$. Ta được BC: $x-y+1=0$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+2y-2=0\\ x-y+1=0\end{cases}\Rightarrow B(0;1)$.

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x+y+1=0\\ x-y+1=0\end{cases}\Rightarrow C\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MB}=(-1;-1)$, $\overrightarrow{MC}=\left(-\dfrac{5}{3};-\dfrac{5}{3}\right)$. Suy ra M không thuộc đoạn BC.

• Với $a=b$, chọn $a=1$ suy ra $b=1$. Ta được BC: $x+y-3=0$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+2y-2=0\\ x+y-3=0\end{cases}\Rightarrow B(4;-1)$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x+y+1=0\\ x+y-3=0\end{cases}\Rightarrow C(-4;7)$.

Ta có $\overrightarrow{MB}=(3;-3)$, $\overrightarrow{MC}=(-5;5)$. Suy ra M thuộc đoạn BC.

Gọi trung điểm của BC là $I(0;3)$. Ta có

$$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IC})=DI^2-\frac{BC^2}{4}\geq-\frac{BC^2}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $D\equiv I$. Vậy $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ nhỏ nhất khi $D(0;3)$.

Câu 72. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(0;1)$, $B(2;-1)$ và hai đường thẳng có phương trình d_1: $(m-1)x+(m-2)y+2-m=0$, d_2: $(2-m)x+(m-1)y+3m-5=0$. Chứng minh d_1 và d_2 luôn cắt nhau tại P. Tìm m sao cho $PA+PB$ lớn nhất.

Lời giải

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}(m-1)x+(m-2)y=m-2\\(2-m)x+(m-1)y=-3m+5\end{cases}$.

Ta có $D=\begin{vmatrix}m-1 & m-2\\2-m & m-1\end{vmatrix}=2\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$, $\forall m\in\mathbb{R}$.

Vậy d_1 và d_2 luôn cắt nhau.

Ta có $A(0;1)\in d_1$, $B(2;-1)\in d_2$ và $d_1\perp d_2$. Suy ra tam giác APB vuông tại P nên P nằm trên đường tròn đường kính AB.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có $(PA+PB)^2\leq(1^2+1^2)(PA^2+PB^2)=2AB^2=16$. Suy ra $PA+PB\leq4$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $PA=PB$.

Với $PA=PB$ suy ra P là trung điểm của cung AB trong đường tròn đường kính AB. Đường tròn đường kính AB có phương trình (C): $(x-1)^2+y^2=2$. Gọi Δ là trung trực của đoạn AB, suy ra Δ qua tâm $I(1;0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}=(2;-2)$ nên có phương trình Δ: $x-y-1=0$.

Khi đó tọa độ điểm P thỏa mãn hệ $\begin{cases}x-y-1=0\\(x-1)^2+y^2=2\end{cases}\Rightarrow P(2;1)$ hoặc $P(0;-1)$.

Với $P(2;1)$, thay vào d_1 ta được $m=1$; Với $P(0;-1)$, thay vào d_1 ta được $m=2$.

Vậy $PA+PB$ lớn nhất khi $m=1$ hoặc $m=2$.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Câu 1. Có bao nhiêu cặp đường thẳng song song trong các đường thẳng sau?

$(d_1): y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x-2;\ (d_2): y=-\frac{1}{2}x+3;\ (d_3): y=\frac{1}{2}x+3;\ (d_4): y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-2$

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Hai đường thẳng $y=a_1x+b_1$ và $y=a_2x+b_2$ song song với nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} a_1=a_2 \\ b_1\neq b_2 \end{cases}$.

Trong các đường thẳng trên không có đường nào thỏa mãn. Vậy không có cặp đường thẳng nào song song.

Câu 2. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng **không** song song với đường thẳng $d: y=3x-2$

A. $-3x+y=0$. **B.** $3x-y-6=0$.

C. $3x-y+6=0$. **D.** $3x+y-6=0$.

Lời giải

Chọn D

$d: y=3x-2 \Leftrightarrow 3x-y-2=0$. (d) có VTPT $\vec{n}=(3;-1)$.

Đường thẳng $3x+y-6=0$ có VTPT $\vec{n_1}=(3;1)\neq k\vec{n}$ nên $\vec{n}$ và $\vec{n_1}$ không cùng phương. Do đó đường thẳng $3x+y-6=0$ không song song với đường thẳng (d).

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng $d: x-2y-1=0$ song song với đường thẳng có phương trình nào sau đây?

A. $x+2y+1=0$. **B.** $2x-y=0$. **C.** $-x+2y+1=0$. **D.** $-2x+4y-1=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta kiểm tra lần lượt các đường thẳng

.+) Với $d_1: x+2y+1=0$ có $\frac{1}{1}\neq\frac{2}{-2}\Rightarrow d$ cắt d_1.

.+) Với $d_2: 2x-y=0$ có $\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{-2}\Rightarrow d$ cắt d_2.

.+) Với $d_3: -x+2y+1=0$ có $\frac{-1}{1}=\frac{2}{-2}\neq\frac{1}{-1}\Rightarrow d$ trùng d_3.

.+) Với $d_4: -2x+4y-1=0$ có $\frac{1}{-2}=\frac{-2}{4}\neq\frac{-1}{-1}\Rightarrow d$ song song d_4.

Câu 4. Cho các đường thẳng sau.

$d_1: y=\frac{3}{\sqrt{3}}x-2$ $d_2: y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+1$ $d_3: y=-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)x+2$ $d_4: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$

Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. d_2, d_3, d_4 song song với nhau. **B.** d_2 và d_4 song song với nhau.

C. d_1 và d_4 vuông góc với nhau. **D.** d_2 và d_3 song song với nhau.

Lời giải

Chọn B

Vì $d_3: y=-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)x+2=\frac{1}{\sqrt{3}}x+1\Rightarrow d_3\equiv d_2$. Đường thẳng d_2 và d_4 có hệ số góc bằng nhau;hệ số tự do khác nhau nên chúng song song.

Câu 5. Tìm các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=(m^2-3)x+3m+1$ song song với đường thẳng $y=x-5$.

A. $m=\pm 2$. **B.** $m=\pm\sqrt{2}$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn D

Để đường thẳng $y=(m^2-3)x+3m+1$ song song với đường thẳng $y=x-5$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m^2-3=1 \\ 3m+1\neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\pm 2 \\ m\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

Câu 6. Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $x-3y-6=0$ và $3x+4y-1=0$ là

A. $\left(\frac{27}{13};-\frac{17}{13}\right)$. **B.** $(-27;17)$. **C.** $\left(-\frac{27}{13};\frac{17}{13}\right)$. **D.** $(27;-17)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $x-3y-6=0$ và $3x+4y-1=0$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-3y-6=0 \\ 3x+4y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{27}{13} \\ y=-\dfrac{17}{3} \end{cases}$.

Câu 7. Cho đường thẳng $d_1: 2x+3y+15=0$ và $d_2: x-2y-3=0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. d_1 và d_2 cắt nhau và không vuông góc với nhau.

B. d_1 và d_2 song song với nhau.

C. d_1 và d_2 trùng nhau.

D. d_1 và d_2 vuông góc với nhau.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $d_1: 2x+3y+15=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n_1}=(2;3)$ và đường thẳng $d_2: x-2y-3=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n_2}=(1;-2)$.

Ta thấy $\frac{2}{1}\neq\frac{3}{-2}$ và $\vec{n_1}.\vec{n_2}=2.1+3.(-2)=-4\neq 0$.

Vậy d_1 và d_2 cắt nhau và không vuông góc với nhau.

Câu 8. Hai đường thẳng $d_1: mx+y=m-5, d_2: x+my=9$ cắt nhau khi và chỉ khi

A. $m\neq -1$. **B.** $m\neq 1$. **C.** $m\neq \pm 1$. **D.** $m\neq 2$.

Lời giải

Chọn C

CÁCH 1

-Xét $m = 0$ thì $d_1: y = -5,\ d_2: x = 9$. Rõ ràng hai đường thẳng này cắt nhau nên $m = 0$ thỏa mãn (1).

-Xét $m \neq 0$ thì $d_1: y = -mx + m - 5$ và $d_2: y = -\frac{x}{m} + 9$

Hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhaut $\Leftrightarrow -m \neq -\frac{1}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \pm 1 \end{cases}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $m \neq \pm 1$.

CÁCH 2

d_1 và d_2 theo thứ tự nhận các vectơ $n_1 = (m;1),\ n_2 = (1;m)$ làm vec tơ pháp tuyến.

d_1 và d_2 cắt nhau $\Leftrightarrow n_1$ và n_2 không cùng phương $\Leftrightarrow m.m \neq 1.1 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

(Áp dụng tính chất: $n_1 = (a;b)$ và $n_2 = (c;d)$ cùng phương $\Leftrightarrow a.d = b.c$)

Câu 9. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1: 3x + 4y + 10 = 0$ và $d_2: (2m-1)x + m^2y + 10 = 0$ trùng nhau?

A. $m \pm 2$. **B.** $m = \pm 1$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -2$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_2: (2m-1)x + m^2y + 10 = 0 \\ d_1: 3x + 4y + 10 = 0 \end{cases} \xrightarrow{d_1 \equiv d_2} \frac{2m-1}{3} = \frac{m^2}{4} = \frac{10}{10}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = 3 \\ m^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng có phương trình $d_1: mx + (m-1)y + 2m = 0$ và $d_2: 2x + y - 1 = 0$. Nếu d_1 song song d_2 thì:

A. $m = 2$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: mx + (m-1)y + 2m = 0 \\ d_2: 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{d_1 \parallel d_2} \frac{m}{2} = \frac{m-1}{1} \neq \frac{2m}{-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \neq 2 \\ m = 2m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 11. Tìm m để hai đường thẳng $d_1: 2x - 3y + 4 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 4mt \end{cases}$ cắt nhau.

A. $m \neq -\frac{1}{2}$. **B.** $m \neq 2$. **C.** $m \neq \frac{1}{2}$. **D.** $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 2x - 3y + 4 = 0 \\ d_2: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 4mt \end{cases} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec{n_1} = (2;-3) \\ \vec{n_2} = (4m;-3) \end{cases} \xrightarrow{d_1 \cap d_2 = M} \frac{4m}{2} \neq \frac{-3}{-3} \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}.$$

Chọn C.

Câu 12. Với giá trị nào của a thì hai đường thẳng

$d_1: 2x - 4y + 1 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = -1 + at \\ y = 3 - (a+1)t \end{cases}$ vuông góc với nhau?

A. $a=-2$. **B.** $a=2$. **C.** $a=-1$. **D.** $a=1$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 2x-4y+1=0 \\ d_2: \begin{cases} x=-1+at \\ y=3-(a+1)t \end{cases} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec{n_1}=(1;-2) \\ \vec{n_2}=(a+1;a) \end{cases} \xrightarrow{d_1\perp d_2} \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0 \Leftrightarrow a+1-2a=0 \Leftrightarrow a=1.$$

Chọn D.

Câu 13. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1: \begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=2+mt \\ y=-6+(1-2m)t \end{cases}$ trùng nhau?

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=2$. **D.** $m\neq\pm 2$.

Lời giải

$$\left.\begin{matrix} d_1: \begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \end{cases} \to \vec{u_1}=(2;-3) \\ d_2: \begin{cases} x=2+mt \\ y=-6+(1-2m)t \end{cases} \to A(2;-6)\in d_2, \vec{u_2}=(m;1-2m) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{d_1\equiv d_2} \begin{cases} A\in d_1 \\ \frac{m}{2}=\frac{1-2m}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

Chọn C.

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng

$d_1: \begin{cases} x=2+2t \\ y=1+mt \end{cases}$ và $d_2: 4x-3y+m=0$ trùng nhau.

A. $m=-3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\frac{4}{3}$. **D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải

$$\left.\begin{matrix} d_1: \begin{cases} x=2+2t \\ y=1+mt \end{cases} \to A(2;1)\in d_1, \vec{u_1}=(2;m) \\ d_2: 4x-3y+m=0 \to \vec{u_2}=(3;4) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{d_1\equiv d_2} \begin{cases} A\in d_2 \\ \frac{2}{3}=\frac{m}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+m=0 \\ m=\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing.$$

Chọn D.

Câu 15. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1: 2x+y+4-m=0$ và $d_2: (m+3)x+y+2m-1=0$ song song?

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Với $m=4 \longrightarrow \begin{cases} d_1: 2x+y=0 \\ d_2: 7x+y+7=0 \end{cases} \longrightarrow d_1\cap d_2\neq\varnothing \longrightarrow$ loại $m=4$.

Với $m\neq 4$ thì

$$\begin{cases} d_1: 2x+y+4-m=0 \\ d_2: (m+3)x+y-2m-1=0 \end{cases} \xrightarrow{d_1\parallel d_2} \frac{m+3}{2}=\frac{1}{1}\neq\frac{-2m-1}{4-m} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m\neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1.$$

Chọn B.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng

$\Delta_1: 2x - 3my + 10 = 0$ và $\Delta_2: mx + 4y + 1 = 0$ cắt nhau.

A. $1 < m < 10$. **B.** $m = 1$. **C.** Không có m. **D.** Với mọi m.

Lời giải

$$\begin{cases} \Delta_1: 2x - 3my + 10 = 0 \\ \Delta_2: mx + 4y + 1 = 0 \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} m = 0 \to \begin{cases} \Delta_1: x + 5 = 0 \\ \Delta_2: 4y + 1 = 0 \end{cases} \to m = 0 \text{ (thoa man)} \\ m \neq 0 \xrightarrow{\Delta_1 \cap \Delta_2 = M} \dfrac{2}{m} \neq \dfrac{-3m}{4} \Leftrightarrow \forall m \neq 0 \end{array} \right..$$

ChọnD.

Câu 17. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $\Delta_1: mx + y - 19 = 0$ và $\Delta_2: (m-1)x + (m+1)y - 20 = 0$ vuông góc?

A. Với mọi m. **B.** $m = 2$. **C.** Không có m. **D.** $m = \pm 1$.

Lời giải

$$\begin{cases} \Delta_1: mx + y - 19 = 0 \to n_1 = (m; 1) \\ \Delta_2: (m-1)x + (m+1)y - 20 = 0 \to \vec{n_2} = (m - 1; m + 1) \end{cases}$$

Ta có : $\xrightarrow{\Delta_1 \perp \Delta_2} m(m-1) + 1(m+1) = 0 \Leftrightarrow m \in \varnothing$.

Câu 18. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $d_1: 3mx + 2y + 6 = 0$ và $d_2: (m^2 + 2)x + 2my + 6 = 0$ cắt nhau?

A. $m \neq -1$. **B.** $m \neq 1$. **C.** $m \in \mathbb{R}$. **D.** $m \neq 1$ và $m \neq -1$.

Ta có: $\begin{cases} d_1: 3mx + 2y + 6 = 0 \to n_1 = (3m; 2) \\ d_2: (m^2 + 2)x + 2my + 6 = 0 \to \vec{n_2} = (m^2 + 2; 2m) \end{cases}$

$$\to \left[\begin{array}{l} m = 0 \to \begin{cases} d_1: y + 3 = 0 \\ d_2: x + y + 3 = 0 \end{cases} \to m = 0 \text{ (thoa man)} \\ m \neq 0 \xrightarrow{d_1 \cap d_2 = M} \dfrac{m^2 + 2}{3m} \neq \dfrac{2m}{2} \Leftrightarrow m \neq \pm 1 \end{array} \right..$$

Chọn D.

Câu 19. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $d_1: 2x - 3y - 10 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 4mt \end{cases}$ vuông góc?

A. $m = \dfrac{1}{2}$. **B.** $m = \dfrac{9}{8}$. **C.** $m = -\dfrac{9}{8}$. **D.** $m = -\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 2x - 3y - 10 = 0 \to n_1 = (2; -3) \\ d_2: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 4mt \end{cases} \to \vec{n_2} = (4m; -3) \end{cases}$$

$\xrightarrow{d_1 \perp d_2} 2.4m + (-3).(-3) = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{9}{8}$. **Chọn C.**

Câu 20. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $d_1: 4x - 3y + 3m = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 + mt \end{cases}$ trùng nhau?

A. $m=-\frac{8}{3}$. **B.** $m=\frac{8}{3}$. **C.** $m=-\frac{4}{3}$. **D.** $m=\frac{4}{3}$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 4x-3y+3m=0 \to \vec{n_1}=(4;-3) \\ d_2: \begin{cases} x=1+2t \\ y=4+mt \end{cases} \to A(1;4)\in d_2,\ \vec{n_2}=(m;-2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{d_1\equiv d_2} \begin{cases} A\in d_1 \\ \frac{m}{4}=\frac{-2}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-8=0 \\ m=\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{8}{3}.$$

Chọn B.

Câu 21. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $d_1: 3mx+2y-6=0$ và $d_2: (m^2+2)x+2my-3=0$ song song?

A. $m=1;\ m=-1$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 3mx+2y-6=0 \to \vec{n_1}=(3m;2) \\ d_2: (m^2+2)x+2my-3=0 \to \vec{n_2}=(m^2+2;2m) \end{cases}$$

Ta có $\to \left[\begin{array}{l} m=0 \to \begin{cases} d_1: y-3=0 \\ d_2: 2x+2y-3=0 \end{cases} \to m=0 \text{ (khong thoa man)} \\ m\neq 0 \xrightarrow{d_1\parallel d_2} \frac{m^2+2}{3m}=\frac{2m}{2}\neq\frac{-3}{-6} \Leftrightarrow m=\pm 1 \end{array}\right.$. **Chọn A.**

Câu 22. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=8-(m+1)t \\ y=10+t \end{cases}$ và $d_2: mx+2y-14=0$ song song?

A. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} d_1: \begin{cases} x=8-(m+1)t \\ y=10+t \end{cases} \to A(8;10)\in d_1,\ \vec{n_1}=(1;m+1) \\ d_2: mx+2y-14=0 \to \vec{n_2}=(m;2) \end{cases}$

$$\xrightarrow{d_1\parallel d_2} \begin{cases} A\notin d_2 \\ \left[\begin{array}{l} m=0 \to \begin{cases} \vec{n_1}=(1;1) \\ \vec{n_2}=(0;2) \end{cases} \to \text{khong thoa man} \\ m\neq 0 \to \frac{1}{m}=\frac{m+1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m+6\neq 0 \\ m\neq 0 \\ m=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right..$$

Chọn A.

Câu 23. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $d_1: (m-3)x+2y+m^2-1=0$ và $d_2: -x+my+m^2-2m+1=0$ cắt nhau?

A. $m\neq 1$. **B.** $\begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq 2 \end{cases}$. **C.** $m\neq 2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\neq 1 \\ m\neq 2 \end{array}\right.$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1:(m-3)x+2y+m^2-1=0 \\ d_2:-x+my+m^2-2m+1=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{d_1\cap d_2=M} \left[\begin{array}{l} m=0 \to \begin{cases} d_1:-3x+2y-1=0 \\ d_2:-x+1=0 \end{cases} \to \text{thoa man} \\ m\neq 0 \to \dfrac{m-3}{-1}\neq\dfrac{2}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Chọn B.

Câu 24. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$\Delta_1:\begin{cases} x=m+2t \\ y=1+(m^2+1)t \end{cases}$ và $\Delta_2:\begin{cases} x=1+mt \\ y=m+t \end{cases}$ trùng nhau?

A. Không có m. **B.** $m=\dfrac{4}{3}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

$$\begin{cases} \Delta_1:\begin{cases} x=m+2t \\ y=1+(m^2+1)t \end{cases} \to A(m;1)\in d_1,\ \vec{u_1}=(2;m^2+1) \\ \Delta_2:\begin{cases} x=1+mt \\ y=m+t \end{cases} \to \vec{u_2}=(m;1) \end{cases} \xrightarrow{d_1\equiv d_2} \begin{cases} A\in d_2 \\ \dfrac{m}{2}=\dfrac{1}{m^2+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=1+mt \\ 1=m+t \\ m^3+m-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1+m(1-m) \\ (m-1)(m^2+m+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1=0 \\ m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$$

. **Chọn C.**

Câu 25. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $7x-3y+16=0$ và $x+10=0$.

A. $(-10;-18)$. **B.** $(10;18)$. **C.** $(-10;18)$. **D.** $(10;-18)$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1:7x-3y+16=0 \\ d_2:x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-10 \\ y=-18 \end{cases}.$$ **Chọn A.**

Câu 26. Tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng

$d_1:\begin{cases} x=-3+4t \\ y=2+5t \end{cases}$ và $d_2:\begin{cases} x=1+4t' \\ y=7-5t' \end{cases}$.

A. $(1;7)$. **B.** $(-3;2)$. **C.** $(2;-3)$. **D.** $(5;1)$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1:\begin{cases} x=-3+4t \\ y=2+5t \end{cases} \\ d_2:\begin{cases} x=1+4t' \\ y=7-5t' \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3+4t=1+4t' \\ 2+5t=7-5t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-t'=1 \\ t+t'=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \xrightarrow{d_1} \begin{cases} x=1 \\ y=7. \end{cases} \\ t'=0 \end{cases}$$

Chọn A.

Câu 27. Cho hai đường thẳng $d_1:2x+3y-19=0$ và $d_2:\begin{cases} x=22+2t \\ y=55+5t \end{cases}$. Tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng đã cho.

A. $(2;5)$. **B.** $(10;25)$. **C.** $(-1;7)$. **D.** $(5;2)$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 2x+3y-19=0 \\ d_2: \begin{cases} x=22+2t \\ y=55+5t \end{cases} \end{cases} \xrightarrow{d_1\cap d_2} 2(22+2t)+3(55+5t)-19=0 \Leftrightarrow t=-10 \to \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}.$$

Chọn A.

Câu 28. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;0)$, $B(1;4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=-t \\ y=2-t \end{cases}$. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB và d.

A. $(2;0)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;-2)$.

Lời giải

$$\begin{cases} A(-2;0),\ B(1;4) \to AB: 4x-3y+8=0 \\ d: \begin{cases} x=-t \\ y=2-t \end{cases} \to d: x-y+2=0 \end{cases} \xrightarrow{AB\cap d} \begin{cases} 4x-3y+8=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}.$$

Chọn B.

Câu 29. Xác định a để hai đường thẳng $d_1: ax+3y-4=0$ và $d_2: \begin{cases} x=-1+t \\ y=3+3t \end{cases}$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành.

A. $a=1$. **B.** $a=-1$. **C.** $a=2$. **D.** $a=-2$.

Lời giải

$$Ox\cap d_2 \leftrightarrow \begin{cases} x=-1+t \\ y=3+3t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \to Ox\cap d_2 = A(-2;0)\in d_1$$

$\to -2a-4=0 \Leftrightarrow a=-2$. **Chọn D.**

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hai đường thẳng $d_1: 4x+3my-m^2=0$ và $d_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=6+2t \end{cases}$ cắt nhau tại một điểm thuộc trục tung.

A. $m=0$ hoặc $m=-6$. **B.** $m=0$ hoặc $m=2$.

C. $m=0$ hoặc $m=-2$. **D.** $m=0$ hoặc $m=6$.

Lời giải

$$Oy\cap d_2 \leftrightarrow \begin{cases} x=2+t=0 \\ y=6+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \to Oy\cap d_2 = A(0;2)\in d_1$$

$\Leftrightarrow 6m-m^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=6 \end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 31. Cho ba đường thẳng $d_1: 3x-2y+5=0$, $d_2: 2x+4y-7=0$, $d_3: 3x+4y-1=0$. Phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của d_1 và d_2, và song song với d_3 là:

A. $24x+32y-53=0$. **B.** $24x+32y+53=0$.

C. $24x-32y+53=0$. **D.** $24x-32y-53=0$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 3x-2y+5=0 \\ d_2: 2x+4y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{8} \\ y=\dfrac{31}{16} \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A\left(-\dfrac{3}{8};\dfrac{31}{16}\right).$$

Ta có

$$\begin{cases} A\in d \\ d \parallel d_3: 3x+4y-1=0 \end{cases} \to \begin{cases} A\in d \\ d: 3x+4y+c=0\ (c\neq -1) \end{cases} \to -\dfrac{9}{8}+\dfrac{31}{4}+c=0 \Leftrightarrow c=-\dfrac{53}{8}.$$

Vậy $d: 3x+4y-\dfrac{53}{8}=0 \Leftrightarrow d_3: 24x+32y-53=0.$ **Chọn A.**

Câu 32. Lập phương trình của đường thẳng Δ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1: x+3y-1=0$, $d_2: x-3y-5=0$ và vuông góc với đường thẳng $d_3: 2x-y+7=0$.

A. $3x+6y-5=0$. **B.** $6x+12y-5=0$.

C. $6x+12y+10=0$. **D.** $x+2y+10=0$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: x+3y-1=0 \\ d_2: x-3y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A\left(3;-\dfrac{2}{3}\right).$$

Ta có

$$\begin{cases} A\in d \\ d \perp d_3: 2x-y+7=0 \end{cases} \to \begin{cases} A\in d \\ d: x+2y+c=0 \end{cases} \to 3+2.\left(-\dfrac{2}{3}\right)+c=0 \Leftrightarrow c=-\dfrac{5}{3}.$$

Vậy $d: x+2y-\dfrac{5}{3}=0 \Leftrightarrow d: 3x+6y-5=0.$ **Chọn A.**

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba đường thẳng lần lượt có phương trình $d_1: 3x-4y+15=0$, $d_2: 5x+2y-1=0$ và $d_3: mx-(2m-1)y+9m-13=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để ba đường thẳng đã cho cùng đi qua một điểm.

A. $m=\dfrac{1}{5}.$ **B.** $m=-5.$ **C.** $m=-\dfrac{1}{5}.$ **D.** $m=5.$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} d_1: 3x-4y+15=0 \\ d_2: 5x+2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A(-1;3) \in d_3$

$\to -m-6m+3+9m-13=0 \Leftrightarrow m=5.$ **Chọn D.**

Câu 34. Nếu ba đường thẳng

$d_1:\ 2x+y-4=0$, $d_2: 5x-2y+3=0$ và $d_3: mx+3y-2=0$

đồng quy thì m nhận giá trị nào sau đây?

A. $\dfrac{12}{5}.$ **B.** $-\dfrac{12}{5}.$ **C.** $12.$ **D.** $-12.$

Lời giải

$$\begin{cases} d_1:\ 2x+y-4=0 \\ d_2: 5x-2y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{9} \\ y=\dfrac{26}{9} \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A\left(\dfrac{5}{9};\dfrac{26}{9}\right) \in d_3$$

$\rightarrow \dfrac{5m}{9}+\dfrac{26}{3}-2=0 \Leftrightarrow m=-12.$ **Chọn D.**

Câu 35. Với giá trị nào của m thì ba đường thẳng $d_1: 3x-4y+15=0$, $d_2: 5x+2y-1=0$ và $d_3: mx-4y+15=0$ đồng quy?

A. $m=-5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

$\begin{cases} d_1: 3x-4y+15=0 \\ d_2: 5x+2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \rightarrow d_1 \cap d_2 = A(-1;3) \in d$

$\rightarrow -m-12+15=0 \Leftrightarrow m=3.$ **Chọn C.**

Câu 36. Với giá trị nào của m thì ba đường thẳng $d_1: 2x+y-1=0$, $d_2: x+2y+1=0$ và $d_3: mx-y-7=0$ đồng quy?

A. $m=-6$. **B.** $m=6$. **C.** $m=-5$. **D.** $m=5$.

Lời giải

$\begin{cases} d_1: 2x+y-1=0 \\ d_2: x+2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \rightarrow d_1 \cap d_2 = A(1;-1) \in d_3 \Leftrightarrow m+1-7=0 \Leftrightarrow m=6.$

Chọn B.

Câu 37. Đường thẳng $d: 51x-30y+11=0$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $M\left(-1;-\dfrac{4}{3}\right)$. **B.** $N\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)$. **C.** $P\left(1;\dfrac{3}{4}\right)$. **D.** $Q\left(-1;-\dfrac{3}{4}\right)$.

Lời giải

Đặt $f(x;y)=51x-30y+11 \longrightarrow \begin{cases} f(M)=f\left(-1;-\dfrac{4}{3}\right)=0 \rightarrow M \in d \\ f(N)=f\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)=-80 \neq 0 \rightarrow N \notin d \\ f(P) \neq 0 \\ f(Q) \neq 0 \end{cases}.$

Chọn A.

Dạng 2. Góc của hai đường thẳng

Câu 38. Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta: x-\sqrt{3}y+2=0$ và $\Delta': x+\sqrt{3}y-1=0$.

A. 90°. **B.** 120°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-\sqrt{3})$, đường thẳng Δ' có vectơ pháp tuyến $\vec{n}'=(1;\sqrt{3})$.

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng Δ, Δ'. $\cos\alpha = \left|\cos\left(\vec{n},\vec{n}'\right)\right| = \dfrac{|1-3|}{\sqrt{1+3}.\sqrt{1+3}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

Câu 39. Góc giữa hai đường thẳng $a: \sqrt{3}x-y+7=0$ và $b: x-\sqrt{3}y-1=0$ là:

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Lời giải

Chọn A.

Đường thẳng a có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n_1}=(\sqrt{3};-1)$;

Đường thẳng b có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n_2}=(1;-\sqrt{3})$.

Áp dụng công thức tính góc giữa hai đường thẳng có:

$$\cos(a,b)=\frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|}=\frac{1.\sqrt{3}+(-1)(-\sqrt{3})}{2.2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

. Suy ra góc giữa hai đường thẳng bằng 30°.

Câu 40. Cho hai đường thẳng $d_1: 2x+5y-2=0$ và $d_2: 3x-7y+3=0$. Góc tạo bởi đường thẳng d_1 và d_2 bằng

A. 30^0. **B.** 135^0. **C.** 45^0. **D.** 60^0.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $d_1: 2x+5y-2=0$ có vectơ pháp tuyến $n_1=(2;5)$.

Đường thẳng $d_2: 3x-7y+3=0$ có vectơ pháp tuyến $n_2=(3;-7)$.

Góc giữa hai đường thẳng được tính bằng công thức

$$\cos(d_1,d_2)=|\cos(\vec{n_1},\vec{n_2})|=\frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|}=\frac{|2.3+5.(-7)|}{\sqrt{2^2+5^2}.\sqrt{3^2+(-7)^2}}=\frac{29}{29\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow (d_1;d_2)=45^0$$

Vậy góc tạo bởi đường thẳng d_1 và d_2 bằng 45^0.

Câu 41. Tìm côsin góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1: 2x+y-1=0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \end{cases}$

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{3}{10}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải

Chọn D

Véctơ pháp tuyến của đường thẳng Δ_1 là $n=(2;1)$ nên véctơ chỉ phương $u=(1;-2)$

Véctơ chỉ phương của đường thẳng Δ_2 là $\vec{u'}=(1;-1)$

Khi đó

$$\cos(\Delta_1;\Delta_2)=|\cos(\vec{u};\vec{u'})|=\frac{|\vec{u}.\vec{u'}|}{|\vec{u}|.|\vec{u'}|}=\frac{3}{\sqrt{5}.\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Câu 42. Tìm góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1: x-2y+15=0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=2-t \\ y=4+2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

A. 5°. **B.** 60°. **C.** 0°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng Δ_1 có VTPT là $\vec{n_1}(1;-2) \Rightarrow 1VTCP(2;1)$

Đường thẳng Δ_2 có $1VTCP(-1;2)$.

Nhận xét: $\vec{u_1}.\vec{u_2}=0 \Rightarrow \vec{u_1} \perp \vec{u_2} \Rightarrow \Delta_1 \perp \Delta_2 \Rightarrow (\Delta_1,\Delta_2)=90^\circ$.

Câu 43. Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $d_1: x+2y-7=0, d_2: 2x-4y+9=0$.

A. $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $vtpt\, n_{d_1}=(1;2); vtpt\, n_{d_2}=(2;-4)$

$$cos(d;d')=\frac{\left|\vec{n}_{d_1}.\vec{n}_{d_2}\right|}{\left|\vec{n}_{d_1}\right|.\left|\vec{n}_{d_2}\right|}=\frac{|1.2-2.4|}{\sqrt{5}.2\sqrt{5}}=\frac{3}{5}.$$

Câu 44. Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta: x-\sqrt{3}y+2=0$ và $\Delta': x+\sqrt{3}y-1=0$?

A. 90^o. **B.** 120^o. **C.** 60^o. **D.** 30^o.

Lời giải

Chọn C

Δ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n_1}=(1;-\sqrt{3})$. Δ' có vectơ pháp tuyến là $\vec{n_2}=(1;\sqrt{3})$.

Khi đó:

$$\cos(\Delta;\Delta')=\left|\cos(\vec{n_1};\vec{n_2})\right|=\frac{\left|\vec{n_1}.\vec{n_2}\right|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|}=\frac{\left|1.1+(-\sqrt{3})\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}.\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{4}.\sqrt{4}}=\frac{1}{2}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng Δ, Δ' là 60^0.

Câu 45. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng

$d_1: 2x-y-10=0$ và $d_2: x-3y+9=0.$

A. 30^o. **B.** 45^o. **C.** 60^o. **D.** 135^o.

Lời giải

Ta có

$$\begin{cases} d_1: 2x-y-10=0 \rightarrow \vec{n_1}=(2;-1) \\ d_2: x-3y+9=0 \rightarrow \vec{n_2}=(1;-3) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi=\frac{|2.1+(-1).(-3)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\rightarrow \varphi=45^\circ$. **Chọn B.**

Câu 46. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng

$d_1: 7x-3y+6=0$ và $d_2: 2x-5y-4=0.$

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{cases} d_1: 7x-3y+6=0 \to \vec{n_1}=(7;-3) \\ d_2: 2x-5y-4=0 \to \vec{n_2}=(2;-5) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi=\frac{|14+15|}{\sqrt{49+9}.\sqrt{4+25}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \to \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Chọn#A.

Câu 47. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng $d_1: 2x+2\sqrt{3}y+5=0$ và $d_2: y-6=0.$

A. $30^{\circ}.$ **B.** $45^{\circ}.$ **C.** $60^{\circ}.$ **D.** $90^{\circ}.$

Lời giải

Ta có

$$\begin{cases} d_1: 2x+2\sqrt{3}y+5=0 \to \vec{n_1}=(1;\sqrt{3}) \\ d_2: y-6=0. \to \vec{n_2}=(0;1) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi=\frac{|\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3}.\sqrt{0+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \to \varphi=30^{\circ}.$$

Chọn A.

Câu 48. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng $d_1: x+\sqrt{3}y=0$ và $d_2: x+10=0.$

A. $30^{\circ}.$ **B.** $45^{\circ}.$ **C.** $60^{\circ}.$ **D.** $90^{\circ}.$

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: x+\sqrt{3}y=0 \to \vec{n_1}=(1;\sqrt{3}) \\ d_2: x+10=0 \to \vec{n_2}=(1;0) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi=\frac{|1+0|}{\sqrt{1+3}.\sqrt{1+0}}=\frac{1}{2}$$

$\to \varphi=60^{\circ}$. **Chọn C.**

Câu 49. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng

$d_1: 6x-5y+15=0$ và $d_2: \begin{cases} x=10-6t \\ y=1+5t \end{cases}.$

A. $30^{\circ}.$ **B.** $45^{\circ}.$ **C.** $60^{\circ}.$ **D.** $90^{\circ}.$

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 6x-5y+15=0 \to \vec{n_1}=(6;-5) \\ d_2: \begin{cases} x=10-6t \\ y=1+5t \end{cases} \to \vec{n_2}=(5;6) \end{cases} \to \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0 \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \varphi=90^{\circ}.$$

Chọn D.

Câu 50. Cho đường thẳng $d_1: x+2y-7=0$ và $d_2: 2x-4y+9=0$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $-\frac{3}{5}.$ **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}.$ **C.** $\frac{3}{5}.$ **D.** $\frac{3}{\sqrt{5}}.$

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: x+2y-7=0 \to \vec{n_1}=(1;2) \\ d_2: 2x-4y+9=0 \to \vec{n_2}=(1;-2) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi=\frac{|1-4|}{\sqrt{1+4}.\sqrt{1+4}}=\frac{3}{5}.$$

Chọn C.

Câu 51. Cho đường thẳng $d_1: x+2y-2=0$ và $d_2: x-y=0$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}.$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}.$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}.$ **D.** $\sqrt{3}.$

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: x+2y-2=0 \to \vec{n_1}=(1;2) \\ d_2: x-y=0 \to \vec{n_2}=(1;-1) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \frac{|1-2|}{\sqrt{1+4}.\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Chọn A.

Câu 52. Cho đường thẳng $d_1: 10x+5y-1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \end{cases}$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\frac{3}{10}$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 10x+5y-1=0 \to \vec{n_1}=(2;1) \\ d_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \end{cases} \to \vec{n_2}=(1;1) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \frac{|2+1|}{\sqrt{4+1}.\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Chọn A.

Câu 53. Cho đường thẳng $d_1: 3x+4y+1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=15+12t \\ y=1+5t \end{cases}$.

Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $\frac{56}{65}$. **B.** $-\frac{33}{65}$. **C.** $\frac{6}{65}$. **D.** $\frac{33}{65}$.

Lời giải

$$\begin{cases} d_1: 3x+4y+1=0 \to \vec{n_1}=(3;4) \\ d_2: \begin{cases} x=15+12t \\ y=1+5t \end{cases} \to \vec{n_2}=(5;-12) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \frac{|15-48|}{\sqrt{9+16}.\sqrt{25+144}} = \frac{33}{65}.$$

Chọn D.

Câu 54. Xác định tất cả các giá trị của a để góc tạo bởi đường thẳng $\begin{cases} x=9+at \\ y=7-2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$ và đường thẳng $3x+4y-2=0$ bằng 45°.

A. $a=1$, $a=-14$. **B.** $a=\frac{2}{7}$, $a=-14$. **C.** $a=-2$, $a=-14$. **D.** $a=\frac{2}{7}$, $a=14$.

Lời giải

Chọn B

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng đã cho.

Đường thẳng $\begin{cases} x=9+at \\ y=7-2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;-2)$.

Đường thẳng $3x+4y-2=0$ có vectơ chỉ phương là $\vec{v}=(4;-3)$.

Ta có $\cos\varphi = |\cos(\vec{u},\vec{v})| \Leftrightarrow \cos 45^\circ = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|4a+6|}{5\sqrt{a^2+4}}$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{a^2+4} = \sqrt{2}|4a+6| \Leftrightarrow 25a^2+100 = 32a^2+96a+72$

$\Leftrightarrow 7a^2+96a-28=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{2}{7} \\ a=-14 \end{array}\right.$.

Câu 55. Đường thẳng Δ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1: 2x+y-3=0$ và $d_2: x-2y+1=0$ đồng thời tạo với đường thẳng $d_3: y-1=0$ một góc 45^0 có phương trình:

A. $x+(1-\sqrt{2})y=0$ hoặc $\Delta: x-y-1=0$. **B.** $\Delta: x+2y=0$ hoặc $\Delta: x-4y=0$.

C. $\Delta: x-y=0$ hoặc $\Delta: x+y-2=0$. **D.** $\Delta: 2x+1=0$ hoặc $y+5=0$.

Lời giải

$\begin{cases} d_1: 2x+y-3=0 \\ d_2: x-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A(1;1) \in \Delta.$

Ta có $d_3: y-1=0 \to n_3=(0;1)$, gọi $n_\Delta=(a;b)$, $\varphi=(\Delta; d_3)$. Khi đó

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\varphi = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{0+1}} \Leftrightarrow a^2+b^2=2b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \to a=b=1 \to \Delta: x+y-2=0 \\ a=-b \to a=1, b=-1 \to \Delta: x-y=0 \end{array}\right.$.

Chọn C.

Câu 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm $A(2;0)$ và tạo với trục hoành một góc 45°?

A. Có duy nhất. **B.** 2.

C. Vô số. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B.

Cho đường thẳng d và một điểm A. Khi đó.

(i) Có duy nhất một đường thẳng đi qua A song song hoặc trùng hoặc vuông góc với d.

(ii) Có đúng hai đường thẳng đi qua A và tạo với d một góc $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Câu 57. Đường thẳng Δ tạo với đường thẳng $d: x+2y-6=0$ một góc 45^0. Tìm hệ số góc k của đường thẳng Δ.

A. $k=\frac{1}{3}$ hoặc $k=-3$. **B.** $k=\frac{1}{3}$ hoặc $k=3$.

C. $k=-\frac{1}{3}$ hoặc $k=-3$. **D.** $k=-\frac{1}{3}$ hoặc $k=3$.

Lời giải

$d: x+2y-6=0 \to n_d=(1;2)$, gọi $\vec{n_\Delta}=(a;b) \to k_\Delta=-\frac{a}{b}$. Ta có

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ = \frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}} \Leftrightarrow 5(a^2+b^2)=2a^2+8ab+8b^2$

$\Leftrightarrow 3a^2-8ab-3b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\frac{1}{3}b \to k_\Delta=\frac{1}{3}. \\ a=3b \to k_\Delta=-3 \end{array}\right.$ **Chọn A.**

Câu 58. Biết rằng có đúng hai giá trị của tham số k để đường thẳng $d: y=kx$ tạo với đường thẳng $\Delta: y=x$ một góc 60^0. Tổng hai giá trị của k bằng:

A. -8. **B.** -4. **C.** -1. **D.** -1.

Lời giải

$$\begin{cases} d: y = kx \to \vec{n_d} = (k;-1) \\ \Delta: y = x \to \vec{n_\Delta} = (1;-1) \end{cases} \longrightarrow \frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \frac{|k+1|}{\sqrt{k^2+1}.\sqrt{2}} \Leftrightarrow k^2 + 1 = 2k^2 + 4k + 2$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 4k + 1 = 0 \xrightarrow{\text{sol}: k = k_1,\ k = k_2} k_1 + k_2 = -4.$$

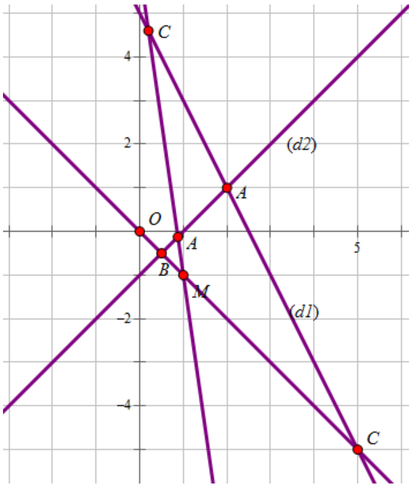
Chọn B.

Câu 59. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(1;-1)$ và hai đường thẳng có phương trình $(d_1): x - y - 1 = 0, (d_2): 2x + y - 5 = 0$. Gọi A là giao điểm của hai đường thẳng trên. Biết rằng có hai đường thẳng (d) đi qua M cắt hai đường thẳng trên lần lượt tại hai điểm B, C sao cho ABC là tam giác có $BC = 3AB$ có dạng: $ax + y + b = 0$ và $cx + y + d = 0$, giá trị của $T = a + b + c + d$ là

A. $T = 5$. **B.** $T = 6$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = 0$.

Lời giải

Chọn C



Tọa độ $A(2;1)$

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2), $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Xét tam giác ABC ta có: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \sin C = \frac{1}{\sqrt{10}}$

Gọi β là góc giữa hai đường thẳng (d) và (d_1), suy ra: $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (1)

Giả sử (d) có vec tơ pháp tuyến là $n(a;b)$

Từ (1) ta có: $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \frac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow a^2 - 8ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = 7b \end{array}\right.$

Với $a = b$ một vec tơ pháp tuyến $n = (1;1) \Rightarrow d: x + y = 0$

Với $a = 7b$ một vec tơ pháp tuyến $n(7;1) \Rightarrow d: 7x + y - 6 = 0$

Vậy: $T = 1 + 0 + 7 - 6 = 2$

Dạng 3. Khoảng cách

Câu 60. Khoảng cách từ điểm $A(1;1)$ đến đường thẳng $5x - 12y - 6 = 0$ là

A. 13. **B.** -13. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Khoảng cách từ điểm $A(1;1)$ đến đường thẳng $\Delta: 5x-12y-6=0$ là

$$d(A,\Delta)=\frac{|5.1-12.1-6|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=1.$$

Câu 61. Khoảng cách từ điểm $M(5;-1)$ đến đường thẳng $3x+2y+13=0$ là:

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $\frac{28}{\sqrt{13}}$. **C.** 26. **D.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Khoảng cách $d=\frac{|3.5+2.(-1)+13|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{26}{\sqrt{13}}=2\sqrt{13}$.

Câu 62. Khoảng cách từ điểm $M(1;-1)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x+y+4=0$ là

A. 1. **B.** $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B

Khoảng cách từ điểm $M(1;-1)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x+y+4=0$ là

$$d(M;\Delta)=\frac{|3.1-1+4|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

Câu 63. Trong mặt phẳng Oxy, khoảng cách từ điểm $M(3;-4)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x-4y-1=0$.

A. $\frac{8}{5}$. **B.** $\frac{24}{5}$. **C.** $\frac{12}{5}$. **D.** $-\frac{24}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $d(M,\Delta)=\frac{|3.3-4.(-4)-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{24}{5}$.

Câu 64. Khoảng cách từ điểm $A(-3;2)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x-y+1=0$ bằng:

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\frac{11\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{10\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{11}{\sqrt{10}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $d(A;\Delta)=\frac{|3.(-3)-2+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}.$

Câu 65. Trong mặt phẳng Oxy, khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng $d: 4x-3y+1=0$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $d\left(O,d\right)=\dfrac{\left|4.0-3.0+1\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{1}{5}$.

Câu 66. Một đường tròn có tâm $I\left(3;-2\right)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-5y+1=0.$ Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{14}{\sqrt{26}}$. **B.** $\dfrac{7}{13}$. **C.** $\sqrt{26}.$ **D.** $6.$

Lời giải

Chọn A

Gọi bán kính của đường tròn là $R.$ Khi đó: $R=d\left(I,\Delta\right)=\dfrac{\left|3-5.(-2)+1\right|}{\sqrt{1^2+(-5)^2}}=\dfrac{14}{\sqrt{26}}.$

Câu 67. Trong mặt phẳng Oxy, khoảng cách từđiểm $M\left(0;4\right)$ đến đường thẳng $\Delta: x\cos\alpha+y\sin\alpha+4\left(2-\sin\alpha\right)=0$ bằng

A. $\sqrt{8}$. **B.** $4\sin\alpha$. **C.** $\dfrac{4}{\cos\alpha+\sin\alpha}$. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $d\left(M,\Delta\right)=\dfrac{\left|0.\cos\alpha+4.\sin\alpha+4\left(2-\sin\alpha\right)\right|}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}=8$.

Câu 68. Khoảng cách từ $I(1;-2)$ đến đường thẳng $D: 3x-4y-26=0$ bằng

A. 3. **B.** 12. **C.** 5. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0)$ đến đường thẳng $D: ax+by+c=0$ là: $d(M,D)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Vậy khoảng cách từ $I(1;-2)$ đến đường thẳng $D: 3x-4y-26=0$ bằng $d(I,D)=\dfrac{\left|3.1-4.(-2)-26\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$

Câu 69. Khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $x-3y+4=0$ và $2x+3y-1=0$ đến đường thẳng $\Delta: 3x+y+4=0$ bằng:

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **D.** 2.

Lời giải

$\begin{cases} x-3y+4=0 \\ 2x+3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \to A\left(-1;1\right) \to d\left(A;\Delta\right)=\dfrac{\left|-3+1+4\right|}{\sqrt{9+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}.$ **Chọn C.**

Câu 70. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;2),\ B(0;3)$ và $C(4;0)$. Chiều cao của tam giác kẻ từ đỉnh A bằng:

A. $\frac{1}{5}$. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{25}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

$$\begin{cases} A(1;2) \\ B(0;3),\ C(4;0) \to BC: 3x+4y-12=0 \end{cases} \to h_A = d(A;BC) = \frac{|3+8-12|}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5}.$$

Chọn A.

Câu 71. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(3;-4),\ B(1;5)$ và $C(3;1)$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $10.$ **B.** $5.$ **C.** $\sqrt{26}.$ **D.** $2\sqrt{5}.$

Lời giải

Cách 1: $$\begin{cases} A(3;-4) \\ B(1;5), C(3;1) \end{cases} \to \begin{cases} A(3;-4) \\ BC = 2\sqrt{5} \\ BC: 2x+y-7=0 \end{cases} \to \begin{cases} BC = 2\sqrt{5} \\ h_A = d(A;BC) = \sqrt{5} \end{cases}$$

$\to S_{ABC} = \frac{1}{2}.2\sqrt{5}.\sqrt{5} = 5.$ **Chọn B.**

Cách 2: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}.$

Câu 72. Khoảng cách từ điểm $M(0;3)$ đến đường thẳng $\Delta: x\cos\alpha + y\sin\alpha + 3(2-\sin\alpha) = 0$ bằng:

A. $\sqrt{6}.$ **B.** $6.$ **C.** $3\sin\alpha.$ **D.** $\frac{3}{\cos\alpha+\sin\alpha}.$

Lời giải

$d(M;\Delta) = \frac{|3\sin\alpha + 3(2-\sin\alpha)|}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}} = 6.$ **Chọn B.**

Câu 73. Khoảng cách từ điểm $M(2;0)$ đến đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+4t \end{cases}$ bằng:

A. $2.$ **B.** $\frac{2}{5}.$ **C.** $\frac{10}{\sqrt{5}}.$ **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}.$

Lời giải

$\Delta: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+4t \end{cases} \to \Delta: 4x-3y+2=0 \to d(M;\Delta) = \frac{|8+0+2|}{\sqrt{16+9}} = 2.$ **Chọn A.**

Câu 74. Khoảng cách nhỏ nhất từ điểm $M(15;1)$ đến một điểm bất kì thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2+3t \\ y = t \end{cases}$ bằng:

A. $\sqrt{10}.$ **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}.$ **C.** $\dfrac{16}{\sqrt{5}}.$ **D.** $\sqrt{5}.$

Lời giải

$$\Delta:\begin{cases}x=2+3t\\ y=t\end{cases}\to \Delta: x-3y-2=0 \xrightarrow{\forall N\in\Delta} MN_{\min}=d(M;\Delta)=\frac{|15-3-2|}{\sqrt{1+9}}=\sqrt{10}.$$

Chọn A.

Câu 75. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để khoảng cách từ điểm $A(-1;2)$ đến đường thẳng $\Delta: mx+y-m+4=0$ bằng $2\sqrt{5}$.

A. $m=2.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-2\\ m=\frac{1}{2}\end{array}\right.$. **C.** $m=-\frac{1}{2}$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

$$d(A;\Delta)=\frac{|-m+2-m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow |m-3|=\sqrt{5}.\sqrt{m^2+1}\Leftrightarrow 4m^2+6m-4=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\ m=\frac{1}{2}\end{array}\right..$$ **Chọn B.**

Câu 76. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t\\ y=2-t\end{cases}$ và $d_2: x-2y+m=0$ đến gốc toạ độ bằng 2.

A. $\left[\begin{array}{l}m=-4\\ m=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-4\\ m=-2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=-2\end{array}\right.$.

Lời giải

$$\begin{cases}d_1:\begin{cases}x=t\\ y=2-t\end{cases}\\ d_2: x-2y+m=0\end{cases}\to\begin{cases}d_1: x+y-2=0\\ d_2: x-2y+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-m\\ y=m-2\end{cases}$$

$$\to M(4-m;m-2)=d_1\cap d_2.$$

Khi đó: $OM=2\Leftrightarrow (4-m)^2+(m-2)^2=4\Leftrightarrow m^2-6m+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=4\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 77. Đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ $O(0;0)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 8x+6y+100=0$. Bán kính R của đường tròn (C) bằng:

A. $R=4$. **B.** $R=6$. **C.** $R=8$. **D.** $R=10$.

Lời giải

$$R=d(O;\Delta)=\frac{|100|}{\sqrt{64+36}}=10.$$ **Chọn D.**

Câu 78. Đường tròn (C) có tâm $I(-2;-2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 5x+12y-10=0$. Bán kính R của đường tròn (C) bằng:

A. $R=\frac{44}{13}$. **B.** $R=\frac{24}{13}$. **C.** $R=44$. **D.** $R=\frac{7}{13}$.

Lời giải

$R=d(I;\Delta)=\frac{|-10-24-10|}{\sqrt{25+144}}=\frac{44}{13}$. **Chọn A.**

Câu 79. Cho đường thẳng $d:21x-11y-10=0.$ Trong các điểm $M(21;-3)$, $N(0;4)$, $P(-19;5)$ và $Q(1;5)$ điểm nào gần đường thẳng d nhất?

A. M. **B.** N. **C.** P. **D.** Q.

Lời giải

$$f(x;y)=|21x-11y-10|\rightarrow\begin{cases}f(M(21;-3))=464\\ f(N(0;4))=54\\ f(P(-19;5))=464\\ f(Q(1;5))=44\end{cases}.$$

Chọn D.

Câu 80. Cho đường thẳng $d:7x+10y-15=0.$ Trong các điểm $M(1;-3)$, $N(0;4)$, $P(-19;5)$ và $Q(1;5)$ điểm nào cách xa đường thẳng d nhất?

A. M. **B.** N. **C.** P. **D.** Q.

Lời giải

$$f(x;y)=|7x+10y-15|\rightarrow\begin{cases}f(M(1;-3))=38\\ f(N(0;4))=25\\ f(P(-19;5))=98\\ f(Q(1;5))=42\end{cases}.$$

Chọn C.

Câu 81. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song $\Delta_1:6x-8y+3=0$ và $\Delta_2:3x-4y-6=0$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

$$\begin{cases}A(2;0)\in\Delta_2\\ \Delta_2\parallel\Delta_1:6x-8y+3=0\end{cases}\rightarrow d(\Delta_1;\Delta_2)=d(A;\Delta_1)=\frac{|12+3|}{\sqrt{100}}=\frac{3}{2}.$$

Chọn B.

Câu 82. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d:7x+y-3=0$ và $\Delta:\begin{cases}x=-2+t\\ y=2-7t\end{cases}$.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** 15. **C.** 9. **D.** $\frac{9}{\sqrt{50}}$.

Lời giải

$$\begin{cases}A(-2;2)\in\Delta,\ \vec{n}_\Delta=(7;1)\\ d:7x+y-3=0\rightarrow \vec{n}_d=(7;1)\end{cases}$$

$\rightarrow \Delta \uparrow\uparrow d \rightarrow d(d;\Delta)=d(A;d)=\dfrac{|-14+2-3|}{\sqrt{50}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. **Chọn A.**

Câu 83. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song $d_1: 6x-8y-101=0$ và $d_2: 3x-4y=0$ bằng:

A. $10,1$. **B.** $1,01$. **C.** 101. **D.** $\sqrt{101}$.

Lời giải

$\begin{cases} A(4;3)\in d_2 \\ d_2 \,||\, d_1: 6x-8y-101=0 \end{cases} \rightarrow d(d_1;d_2)=\dfrac{|24-24-101|}{\sqrt{100}}=\dfrac{101}{10}=10,1.$ **Chọn A.**

Câu 84. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;3)$ và $B(1;4)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều hai điểm A và B?

A. $x-y+2=0.$ **B.** $x+2y=0.$ **C.** $2x-2y+10=0.$ **D.** $x-y+100=0.$

Lời giải

Đường thẳng cách đều hai điểm $A,\ B$ thì đường thẳng đó hoặc song song (hoặc trùng) với AB, hoặc đi qua trung điểm I của đoạn AB.

Ta có: $\begin{cases} A(2;3) \\ B(1;4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2}\right) \\ \overrightarrow{AB}=(-1;1)\rightarrow \vec{n}_{AB}=(1;1) \end{cases} \rightarrow AB \,||\, d: x-y-2=0.$ **Chọn A.**

Câu 85. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(0;1),\ B(12;5)$ và $C(-3;0)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều ba điểm $A,\ B$ và C.

A. $x-3y+4=0$. **B.** $-x+y+10=0$. **C.** $x+y=0$. **D.** $5x-y+1=0$.

Lời giải

Dễ thấy ba điểm A, B, C thẳng hàng nên đường thẳng cách điều A, B, C khi và chỉ khi chúng song song hoặc trùng với AB.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(12;4)\rightarrow n_{AB}=(1;-3)\rightarrow AB \,||\, d: x-3y+4=0.$ **Chọn A.**

Câu 86. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;1),\ B(-2;4)$ và đường thẳng $\Delta: mx-y+3=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để Δ cách đều hai điểm $A,\ B$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm đoạn $AB \rightarrow \begin{cases} I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right) \\ \overrightarrow{AB}=(-3;3)\rightarrow \vec{n}_{AB}=(1;1) \end{cases}$.

Khi đó: $\Delta: mx-y+3=0\ (n_\Delta=(m;-1))$ cách đều A,B

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I\in\Delta \\ \dfrac{m}{1}=\dfrac{-1}{1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{2}-\dfrac{5}{2}+3=0 \\ m=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 87. Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d:3x-4y+1=0$ và cách d một khoảng bằng 1 có phương trình:

A. $3x-4y+6=0$ hoặc $3x-4y-4=0$.

B. $3x-4y-6=0$ hoặc $3x-4y+4=0$.

C. $3x-4y+6=0$ hoặc $3x-4y+4=0$.

D. $3x-4y-6=0$ hoặc $3x-4y-4=0$.

Lời giải

$$\begin{cases} d:3x-4y+1=0 \to M(1;1)\in d \\ \Delta \parallel d \to \Delta:3x-4y+c=0 \end{cases} \to 1=d(d;\Delta)=d(M;\Delta)=\frac{|c-1|}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=-4 \\ c=6 \end{array}\right..$$

Chọn A.

Câu 88. Tập hợp các điểm cách đường thẳng $\Delta:3x-4y+2=0$ một khoảng bằng 2 là hai đường thẳng có phương trình nào sau đây?

A. $3x-4y+8=0$ hoặc $3x-4y+12=0$.

B. $3x-4y-8=0$ hoặc $3x-4y+12=0$.

C. $3x-4y-8=0$ hoặc $3x-4y-12=0$.

D. $3x-4y+8=0$ hoặc $3x-4y-12=0$.

Lời giải

$$d(M(x;y);\Delta)=2 \Leftrightarrow \frac{|3x-4y+2|}{5}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-4y+12=0 \\ 3x-4y-8=0 \end{array}\right..$$ **Chọn B.**

Câu 89. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1:5x+3y-3=0$ và $d_2:5x+3y+7=0$ song song nhau. Đường thẳng vừa song song và cách đều với d_1, d_2 là:

A. $5x+3y-2=0.$ **B.** $5x+3y+4=0.$

C. $5x+3y+2=0.$ **D.** $5x+3y-4=0.$

Lời giải

$$d(M(x;y);d_1)=d(M(x;y);d_2) \Leftrightarrow \frac{|5x+3y-3|}{\sqrt{34}}=\frac{|5x+3y+7|}{\sqrt{34}} \Leftrightarrow 5x+3y+2=0.$$

Chọn C.

Câu 90. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi d là đường thẳng đi qua $M(4;2)$ và cách điểm $A(1;0)$ khoảng cách $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. Biết rằng phương trình đường thẳng d có dạng $x+by+c=0$ với b,c là hai số nguyên. Tính $b+c$.

A. 4. **B.** 5. **C.** -1. **D.** -5.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $M(4;2)\in d \Leftrightarrow 4+2b+c=0 \Rightarrow c=-4-2b.$ (1)

$$d(A,d)=\frac{|1+c|}{\sqrt{1+b^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10} \Leftrightarrow 10(1+c)^2=9(1+b^2).$$ (2)

Thay $c=-4-2b$ vào PT (2) ta được PT: $31b^2+120b+81=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-3(tmdk) \\ b=-\dfrac{27}{31}(ktmdk) \end{array}\right.$

$\Rightarrow b=-3, c=2 \Rightarrow b+c=-1$.

Câu 91. Đường thẳng $12x+5y=60$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác. Tổng độ dài các đường cao của tam giác đó là

A. $\dfrac{60}{13}$. **B.** $\dfrac{281}{13}$. **C.** $\dfrac{360}{17}$. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng đã cho với Ox, Oy.

Ta có $12x+5y=60 \Leftrightarrow \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{12}=0$. Do đó $A(5;0)$, $B(0;12)$.

Gọi H là hình chiếu của O lên AB. Khi đó: $OH=d(O;AB)=\dfrac{|12.0+5.0-60|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\dfrac{60}{13}$.

Tam giác OAB là tam giác vuông tại O nên tổng độ dài các đường cao là

$OA+OB+OH=5+12+\dfrac{60}{13}=\dfrac{281}{13}$.

Dạng 4. Một số bài toán liên quan đến diện tích

Câu 92. Đường thẳng $\Delta: 5x+3y=15$ tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng bao nhiêu?

A. $7,5$. **B.** 5. **C.** 15. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $\Delta: 5x+3y=15$ cắt các trục tọa độ tại các điểm $A(3;0)$, $B(0;5)$.

Ta có $OA=3$, $OB=5$. Khi đó $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{15}{2}=7,5$.

Câu 93. Cho hai đường thẳng $d_1: y=mx-4; d_2: -mx-4$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để tam giác tạo thành bởi d_1, d_2 và trục hoành có diện tích lớn hơn 8. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$d_1: y=mx-4$, $d_2: y=-mx-4$.

d_1, d_2 cắt nhau cùng cắt trục hoành khi $m\neq 0$.

Gọi $A\left(\dfrac{4}{m};0\right)$, $B\left(-\dfrac{4}{m};0\right)$ lần lượt là giao điểm của d_1, d_2 và trục hoành.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1, d_2: $mx-4=-mx-4 \Leftrightarrow x=0$.

Gọi C là giao điểm của d_1 và d_2 thì $C(0;-4)$.

$S_{ABC}=\frac{1}{2}d\left(C,Ox\right).AB$, có $d\left(C,Ox\right)=\left|y_C\right|=4$, $AB=\left|x_A-x_B\right|=\frac{8}{|m|}$.

$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}.4.\frac{8}{|m|}=\frac{16}{|m|}$.

Có $S_{ABC}>8\Leftrightarrow\frac{16}{|m|}>8\Leftrightarrow|m|<2$, $m\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow m=1$. Vậy $S=\{1\}$.

Câu 94. Tìm phương trình đường thẳng $d:y=ax+b.$ Biết đường thẳng d đi qua điểm $I(1;3)$ và tạo với hai tia Ox,Oy một tam giác có diện tích bằng 6?

A. $y=\left(9+\sqrt{72}\right)x-\sqrt{72}-6$. **B.** $y=\left(9-\sqrt{72}\right)x+\sqrt{72}-6$.

C. $y=3x+6$. **D.** $y=-3x+6.$

Lời giải.

Chọn D

Vì đường thẳng d đi qua điểm $I(1;3)$ nên ta có: $3=a+b\quad(1).$

Đường thẳng $d:y=ax+b$ cắt trục Ox,Oy lần lượt là $A\left(-\frac{b}{a};0\right),B(0;b),(a\neq0).$

Theo giả thiết $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}\left|\frac{b}{a}\right|.|b|=\frac{1}{2}\frac{b^2}{|a|}=6\quad(2).$

Từ phương trình $(1)\Leftrightarrow a=3-b$ thay vào phương trình (2):

$\frac{b^2}{|3-b|}=12\Leftrightarrow b^2=12|3-b|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b^2=12(3-b),\ (b<3)\\ b^2=-12(3-b),\ (b>3)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b^2+12b-36=0,\ (b<3)\\ b^2-12b+36=0,\ (b>3)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}b=-6+6\sqrt{2}\\ b=-6-6\sqrt{2}\end{array}\right.\quad(b<3)\\ b=6\qquad\qquad(b>3)\end{array}\right.$

Với $b=6$ ta được $a=-3$.

Vậy phương trình $d:y=-3x+6.$

Ghi chú: Với $\left[\begin{array}{l}b=-6+6\sqrt{2}\\ b=-6-6\sqrt{2}\end{array}\right.$ thì nhìn vào 4 đáp án không có nên ta không cần tìm nữa.

Câu 95. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(2;1)$. Đường thẳng d đi qua M, cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A và B (A,B khác O) sao cho tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là.

A. $2x-y-3=0$. **B.** $x-2y=0$. **C.** $x+2y-4=0$. **D.** $x-y-1=0$.

Lời giải

Chọn C

Gọi đường thẳng d cắt tia Ox, Oy lần lượt tại $A(a;0)$ và $B(0;b);a,b>0$

$\Rightarrow(d):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Vì (d) qua $M(2;1)\Rightarrow\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$

$\Rightarrow 1 \geq 2\sqrt{\dfrac{2}{ab}} \Rightarrow ab \geq 8$

Ta có diện tích tam giác vuông OAB tại O là $S = \dfrac{1}{2}.OA.OB = \dfrac{1}{2}.a.b \geq 4$

Diện tích tam giác vuông OAB đạt giá trị nhỏ nhất $S = 4 \Leftrightarrow \dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{b} \Leftrightarrow a = 2b$

$\Rightarrow \dfrac{2}{2b} + \dfrac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = 2, a = 4$

$\Rightarrow (d): \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow x + 2y - 4 = 0$.

Câu 96. Đường thẳng $d: \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, $(a \neq 0; b \neq 0)$ đi qua $M(-1;6)$ tạo với tia Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng 4. Tính $S = a + 2b.$

A. $S = \dfrac{-5 + 7\sqrt{5}}{3}$. **B.** $S = -\dfrac{38}{3}$. **C.** $S = 10$. **D.** $S = 6$.

Lời giải

Chọn C

d đi qua $M(-1;6) \Leftrightarrow \dfrac{-1}{a} + \dfrac{6}{b} = 1 \ (1).$

Đường thẳng cắt tia Ox tại $A(a;0),\ a > 0 \Rightarrow OA = a.$

Đường thẳng cắt tia Oy tại $B(0;b),\ b > 0 \Rightarrow OB = b.$

ΔOAB vuông tại O nên có diện tích là $\dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{1}{2}ab.$

Theo đề $\dfrac{1}{2}ab = 4 \Leftrightarrow ab = 8 \ (2).$

Từ $(1),(2)$ suy ra: $a = 2; b = 4 \Rightarrow S = a + 2b = 10$.