SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH QUẢNG NAM **ĐỀ CHÍNH THỨC**	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT NĂM HỌC 2023-2024 ĐỢT 1 **Môn thi: TOÁN** **Thời gian: 180 phút** (không kể thời gian giao đề) **Ngày thi: 29/9/2023**

Câu 1 (3,0 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y+1} + x^2 - y^2 + x - 3y - 2 = 0 \\ 27x^2y + 27x^2 - 54xy - 76x - 20y = 22 + \sqrt[3]{80x + y - 7} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 2 (2,0 điểm). Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n^2}{2u_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3 (5,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$. Đường tròn (O) lần lượt tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA tại ba điểm M, N, K. Gọi S, R lần lượt là giao điểm của đường phân giác ngoài góc A của tam giác ABC với hai đường thẳng KN, MN. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng MS và KR, đường thẳng AN cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là J.

a) Chứng minh I thuộc (O) và $\dfrac{\sin \widehat{MKN}}{\sin \widehat{KMN}} = \dfrac{KI}{KJ}$.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là D, OD cắt MK tại E. Gọi (T) là đường tròn đi qua D và tiếp xúc với BC tại N. Chứng minh (T) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và EN là đường phân giác của góc BEC.

Câu 4 (2,0 điểm). Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3.

a) Xét đa thức $f(x) = (x+1)(x+2)\ldots(x+p-1) = x^{p-1} + a_{p-2}x^{p-2} + \ldots + a_1x + (p-1)!$.
Chứng minh $a_i \vdots p$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, p-2$.

b) Chứng minh $\left(\dfrac{(p-1)!}{1}\right)^p + \left(\dfrac{(p-1)!}{2}\right)^p + \ldots + \left(\dfrac{(p-1)!}{p-1}\right)^p$ chia hết cho p^3.

Câu 5 (3,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + f(x+y)) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 6 (2,0 điểm). Tô màu tất cả các đỉnh của đa giác đều (T) có 12 đỉnh bằng hai màu khác nhau, mỗi đỉnh tô một màu.

a) Hỏi có bao nhiêu cách tô màu sao cho không có tam giác đều nào mà tất cả các đỉnh của nó cùng màu (các đỉnh của nó là đỉnh của (T))?

b) Hỏi có bao nhiêu cách tô màu sao cho có ít nhất một đa giác đều mà tất cả các đỉnh của nó cùng màu (các đỉnh của nó là đỉnh của (T))?

Câu 7 (3,0 điểm). Cho ba số thực x, y, z thuộc khoảng $(0; 1)$ và thỏa mãn $(1-x)(1-y)(1-z) = xyz$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + \dfrac{z^2}{x} + x + y + z$.

—HẾT—

**Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay; cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*
**Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....*