

**HÀM SỐ BẬC 2**

**16**

❶. Giáo viên Soạn 1: Đoàn Công Hoàng. FB: Đoàn Công Hoàng

❷. Giáo viên Soạn 2: Huỳnh Châu Phú. FB: Huỳnh Châu Phú

|  |  |
| --- | --- |
| THUÂT NGŨ  - Hàm số bậc hai  - Bảng giá trị  - Parabol  - Đinh  - Trục đối xứng | KIỀN THỨC, Kĩ NĂNG  - Nhận biết hàm số bậc hai.  - Thiết lập bảng giá trị của hàm số bậc hai.  - Vẽ parabol (parabola) là đồ thị của hàm số bậc hai.  - Nhận biết các yếu tố cơ bản của đường parabol như đình, trục đối xứng.  - Nhận biết và giải thích các tính chất của hàm số bậc hai thông qua đồ thị.  - Vận dụng kiến thức về hàm số bậc hai và đồ thị vào giải quyết bài toán thực tiển. |

A picture containing text

Description automatically generated

Bác Việt có một tấm lưới hình chữ nhật dài 20 m. Bác muốn dùng tấm lưới này rào chắn ba mặt áp bên bờ tường của khu vườn nhà mình thành một mảnh đất hình chữ nhật để trồng rau.

Hỏi hai cột góc hàng rào cần phải cắm cách bờ tường bao xa để mảnh đất được rào chắn của bác có diện tích lớn nhất?

**1. KHÁl NIỆM HÀM SỐ BẬC HAI**

**HĐ1:** Xét bài toán rào vườn ở tình huống mở đầu. Gọi  mét  là khoảng cách từ điểm cắm cọc đến bờ tường . Hãy tính theo  :

a) Độ dài cạnh của mảnh đất

b) Diện tích  của mảnh đất được rào chắn.

**Lời giải**.

Ở đây ta tính được .

Đây là một hàm số cho bởi công thức và gọi là một hàm số bậc hai của biến số .

Tổng quát, ta có

|  |
| --- |
| Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức    trong đó  là biến số, là các hằng số và .  Tập xác định của hàm số bậc hai là . |

Hàm số nào dưới đây là hàm số bậc hai?

A. 

B. .

C.

D. .

**Nhận xét**.

Hàm số  đã học ở lớp 9 là một trường hợp đặc biệt của hàm số bậc hai với .

**Ví dụ 1.**

Xét hàm số bậc hai . Thay dấu "?" bằng các số thích hợp đề hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 2 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 |
|  | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? |

Bảng giá trị của hàm số  tại một số điểm.

**Giải**

Thay các giá trị của  vào công thức hàm số, ta được:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 2 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 |
|  | 0 | 32 | 48 | 50 | 48 | 32 | 0 |

**Luyện tập 1.**

Cho hàm số .

a) Hàm số đã cho có phải là hàm số bậc hai không? Nếu có, hãy xác định các hệ số 

b) Thay dấu "?" bằng các số thích hợp để hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số đã cho.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -2 | -1 | 0 | 1 |
|  | ? | ? | ? | ? |

**Lời giải**

a) Ta có:

Vậy hàm số đã cho là hàm số bậc hai với hệ số 

b)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -2 | -1 | 0 | 1 |
|  | -24 | -10 | -2 | 0 |

**Vận dụng 1.**

Một viên bi rơi tự do từ độ cao 19,6 m xuống mặt đất. Độ cao  (mét) so với mặt đất của viên bi trong khi rơi phụ thuộc vào thời gian  (giây) theo công thức: ; .

a) Hỏi sau bao nhiêu giây kể từ khi rơi viên bi chạm đất?

b) Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số .

**2. ĐỖ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC HAI**

Ở lớp 9 , ta đã biết dạng đồ thị của hàm số  . Trong mục này ta sẽ tìm hiểu đồ thị của hàm số bậc hai .

Chart, radar chart

Description automatically generated

**Hoạt động 2**. Xét hàm số .

a) Trên mặt phẳng toạ độ, biểu diễn toạ độ các điểm trong bảng giá trị của hàm số lập được ở Vỉ dụ 1. Nối các điểm đã vẽ lại ta được dạng đồ thị hàm số  trên khoảng  như trong Hình 6.10. Dạng đồ thị của hàm số  có giống với đồ thị của hàm số  hay không?

b) Quan sát dạng đồ thị của hàm số  trong Hình 6.10, tìm toạ độ điểm cao nhất của đồ thị.

Chart, line chart

Description automatically generated

c) Thực hiện phép biến đổi



Hãy cho biết giá trị lớn nhất của diện tích mảnh đất được rào chắn. Từ đó suy ra lời giải của bài toán ở phần mở đầu.

Hoạt động 3. Tương tự HĐ2, ta có dạng đồ thị của một số hàm số bậc hai sau.

Chart, line chart

Description automatically generated

Từ các đồ thị hàm số trên, hãy hoàn thành bảng sau đây.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Hàm số | Hệ số a | Tính chất đồ thị | | |
| Bề lõm của đồ thị (quay lên/quay xuống) | Tọa độ điểm cao nhất/điểm thấp nhất | Trục đối xứng |
|  | 1 | Quay lên |  |  |
|  | ? | ? | ? | ? |

Tổng quát, ta có thể viết hàm số bậc hai  dưới dạng

với 

Ta thấy điểm  thuộc đồ thị hàm số bậc hai và là một điểm đặc biệt, nó đóng vai trò như điểm  của đồ thị hàm số . Cụ thể:

- Nếu  thì  với mọi . Như vậy điểm / là điểm thấp nhất trên đồ thị.

- Nếu  thì  với mọi . Như vậy điểm / là điểm cao nhất trên đồ thị.

Gọi  là parabol . Nếu ta "dịch chuyền"  theo vectơ  thì ta sẽ thu được đồ thị  của hàm số  có dạng như Hình 6.11.

Diagram

Description automatically generated

**Nhận xét**. Đồ thị hàm số bậc hai  là một parabol.

- Đồ thị hàm số là một đường parabol có đỉnh là điểm , có trục đối xứng là đường thẳng . Parabol này quay bề lõm lên trên nếu , xuống dưới nếu .

- Để vẽ đường parabol  ta tiến hành theo các bước sau:

1. Xác định toạ độ đỉnh ;

2. Vẽ trục đối xứng ;

3. Xác định toạ độ các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có) và một vài điểm đặc biệt trên parabol;

4. Vẽ parabol.

**Ví dụ 2.**

a) Vẽ parabol 

b) Từ đồ thị, hãy tìm khoảng đồng biến, nghịch biến và giá trị lớn nhất của hàm số .

Giải

Chart, line chart

Description automatically generated

a) Ta có  nên parabol quay bề lõm xuống dưới.

Đỉnh .

Trục đối xứng .

Giao điểm của đồ thị với trục Oy là .

Parabol cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình , tức là  và  (H.6.12).

Để vẽ đồ thị chính xác hơn, ta có thể lấy thêm điểm đối xứng với  qua trục đối xứng  là .

b) Từ đồ thị ta thấy:

- Hàm số  đồng biến trên , nghịch biến trên ;

- Giá trị lớn nhất của hàm số là , khi .

**Luyện tập 2**. Vẽ parabol . Từ đó tìm khoảng đồng biến, nghịch biến và giá trị nhỏ nhất của hàm số .

**Nhận xét**. Từ đồ thị hàm số , ta suy ra tính chất của hàm số 

|  |  |
| --- | --- |
| Với | Với |
| Hàm số nghịch biến trên khoảng ;  Hàm số đồng biến trên khoảng ;  là giá trị nhỏ nhất của hàm số. | Hàm số đồng biến trên khoảng ;  Hàm số nghịch biến trên khoảng :  là giá trị lớn nhất của hàm số. |

**Vận dụng 2**. Bạn Nam đứng dưới chân cầu vượt ba tầng ở nút giao ngã ba Huế, thuộc thành phố Đà Năng để ngắm cầu vượt (H.6.13). Biết rằng trụ tháp cầu có dạng đường parabol, khoảng cách giữa hai chân trụ tháp khoảng , chiều cao của trụ tháp tính từ điểm trên mặt đất cách chân trụ tháp  là . Hãy giúp bạn Nam ước lượng độ cao của đỉnh trụ tháp cầu (so với mặt đất).

A picture containing diagram

Description automatically generated

**Hướng dẫn**

Chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho một chân trụ tháp đặt tại gốc toạ độ, chân còn lại đặt trên tia . Khi đó trụ tháp là một phần của đồ thị hàm số dạng .

**BÀI TẬP**

6.7. Vẽ các đường parabol sau:

a) ;

b) ;

c) ;

d) .

6.8. Từ các parabol đã vẽ ở Bài tập 6.7, hãy cho biết khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của mỗi hàm số bậc hai tương ứng.

6.9. Xác định parabol , trong mỗi trường hợp sau:

a) Đi qua hai điểm  và ;

b) Đi qua điểm  và có trục đối xứng ;

c) Có đỉnh ;

d) Đi qua điểm  và có tung độ đỉnh .

6.10. Xác định parabol , biết rằng parabol đó đi qua điểm  và có đỉnh là .

6.11. Gọi  là đồ thị hàm số bậc hai . Hãy xác định dấu của hệ số a và biệt thức , trong mỗi trường hợp sau:

a)  nằm hoàn toàn phía trên trục hoành;

b)  nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành;

c)  cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và có đỉnh nằm phía dưới trục hoành;

d)  tiếp xúc với trục hoành và nằm phía trên trục hoành.

6.12. Hai bạn An và Bình trao đổi với nhau.

An nói: Tớ đọc ở một tài liệu thấy nói rằng cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội (H.6.14) có dạng một parabol, khoảng cách giữa hai chân cổng là  và chiều cao của cổng tính từ một điểm trên mặt đất cách chân cổng  là 2,93 m. Từ đó tór tính ra được chiểu cao của cổng parabol đó là .

Sau một hồi suy nghĩ, Bình nói: Nếu dữ kiện như bạn nói, thì chiều cao của cổng parabol mà bạn tính ra ở trên là không chính xác.

Dựa vào thông tin mà An đọc được, em hãy tính chiều cao của cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội để xem kết quả bạn An tính được có chính xác không nhé!

A picture containing text, tree, outdoor, arch

Description automatically generated

6.13. Bác Hùng dùng 40 m lưới thép gai rào thành một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau.

a) Tính diện tích mảnh vườn hình chữ nhật rào được theo chiều rộng  (mét) của nó.

b) Tìm kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất mà bác Hùng có thể rào được.

6.14. Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc  (được chọn là điểm ném) trong mặt phẳng toạ độ Oxy là một parabol có phương trình , trong đó  (mét) là khoảng cách theo phương ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc(mét) là độ cao của vật so với mặt đất (H.6.15).

a) Tìm độ cao cực đại của vật trong quá trình bay.

b) Tính khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc . Khoảng cách này gọi là tầm xa của quỹ đạo.

Diagram

Description automatically generated with low confidence

Em có biết: Một số mô hình toán học sử dụng hàm số bậc hai.

Hàm số bậc hai được sử dụng trong nhiều mô hình thực tế. Dưới đây ta xét một số mô hình đơn giản thường gặp.

- Phương trình chuyển động của vật chuyển động thẳng biến đổi đều

trong đó  là toạ độ ban đầu của vật,  là vận tốc ban đầu của vật và a là gia tốc của vật (a cùng dấu với vo nếu vật chuyển động nhanh dần đều và ngược dấu với  nếu vật chuyển động chậm dần đều). Như vậy toạ độ  của vật là một hàm số bậc hai của thời gian .

Nói riêng, khi bỏ qua sức cản của không khí, nếu ném một vật lên trên theo phương thẳng đứng thì chuyển động của vật sẽ chỉ chịu ảnh hưởng của trọng lực và vật sẽ có gia tốc bằng gia tốc trọng trường. Khi đó độ cao (so với mặt đất) của vật tại thời điểm  cho bởi phương trình



trong đó  (mét) là độ cao ban đầu của vật khi ném lên,  là vận tốc ban đầu của vật và  là gia tốc trọng trường .

Đặc biệt, khi bỏ qua sức cản không khí, nếu một vật rơi tự do từ độ cao  (mét) so với mặt đất thì độ cao  (mét) của nó tại thời điểm  (giây) cho bởi công thức

- Phương trình chuyển đông của vật ném xiên .

Một vật được ném từ độ cao  (mét) so với mặt đất, với vận tốc ban đầu  hợp với phương ngang một góc . Khi đó quỹ đạo chuyển động của vật tuân theo phương trình



ở đó  (mét) là khoảng cách vật bay được theo phương ngang tính từ mặt đất tại điểm ném,  (mét) là độ cao so với mặt đất của vật trong quá trình bay,  là gia tốc trọng trường. Như vậy quỹ đạo chuyển động của một vật ném xiên là một parabol.

Tương tự, đường đi của quả bóng khi được cầu thủ đá lên không trung, quỹ đạo của viên đạn pháo khi bắn ra khỏi nòng pháo, tia lửa hàn, hạt nước bắn lên từ đài phun nước, .. đều có dạng đường parabol (H.6.16).

A picture containing text

Description automatically generated

- Doanh thu bán hàng

Trong kinh tế, doanh thu bán hàng là số tiền nhận được khi bán một mặt hàng. Doanh thu  bằng đơn giá  của mặt hàng (tức là giá bán của một sản phẩm) nhân với số lượng  sản phẩm đã bán được, tức là

.

Định luật nhu cầu khẳng định rằng giữa  và n có mối liên hệ với nhau: Khi cái này tăng thì cái kia sẽ giảm. Phương trình liên hệ giữa  và  gọi là phương trình nhu cầu. Nếu phương trình nhu cầu là liên hệ bậc nhất, tức là  là những hằng số dương) thì doanh thu bán hàng sẽ là hàm số bậc hai của đơn giá



Khi đó người ta thường quan tâm đến việc tìm giá bán  để doanh thu đạt cực đại, hoặc tìm giá bán  để doanh thu vưọt một mức nào đó.