

CHUYÊN ĐỀ 1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ tìm hiểu về hệ phương trình bậc nhất ba ẩn và ứng dụng của nó vào giải các bài toán ở Vật lí, Hoá học, Sinh học, Kinh tế, 2...

BÀI 1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA

1. Phương trình bậc nhất ba ẩn

Nhận xét

- Phương trình bậc nhất ba ẩn là phương trình có dạng: $ax + by + cz = d$, trong đó x, y, z là ba ẩn; các hệ số a, b, c không đồng thời bằng 0.

- Nếu phương trình bậc nhất ba ẩn $ax + by + cz = d$ trở thành mệnh đề đúng khi $x = x_0; y = y_0; z = z_0$ thì bộ số $(x_0; y_0; z_0)$ gọi là một nghiệm của phương trình đó.

2. Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

- Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn là hệ phương trình mà mỗi phương trình trong hệ là một phương trình bậc nhất đối với ba ẩn đó.

- Bộ số $(x_0; y_0; z_0)$ đồng thời nghiệm đúng tất cả các phương trình của một hệ phương trình bậc nhất ba ẩn được gọi là nghiệm của hệ phương trình đó.

Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Trong đó x, y, z là ba ẩn; các chữ còn lại là các hệ số; các hệ số của ba ẩn x, y, z trong mỗi phương trình không đồng thời bằng 0.

Cho hai hệ phương trình bậc nhất ba ẩn:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \text{ (I)} ; \begin{cases} m_1x + n_1y + p_1z = q_1 \\ m_2x + n_2y + p_2z = q_2 \\ m_3x + n_3y + p_3z = q_3 \end{cases} \text{ (II)}$$

Nhận xét

- Nếu tập nghiệm của hệ phương trình (I) bằng tập nghiệm của hệ phương trình (II) thì hệ phương trình (I) được gọi là tương đương với hệ phương trình (II).

- Phép biến đổi hệ phương trình bậc nhất ba ẩn về hệ phương trình tương đương với nó được gọi là phép biến đổi tương đương hệ phương trình bậc nhất ba ẩn.

Chú ý: Để giải hệ phương trình (I), ta thường thực hiện một số phép biến đổi tương đương nhằm dẫn đến một hệ phương trình có thể tìm được nghiệm một cách dễ dàng.

II. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN BẰNG PHƯƠNG PHÁP GAUSS

$$\begin{cases} 5x + y - 2z = 3 \\ 2y + z = 6 \\ 3z = -12 \end{cases}$$

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình:

Giải. Ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 5x + y - 2z = 3 \\ 2y + z = 6 \\ 3z = -12 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - 2z = 3 \\ 2y + z = 6 \\ z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - 2z = 3 \\ 2y + (-4) = 6 \\ z = -4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - 2z = 3 \\ y = 5 \\ z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 5 - 2(-4) = 3 \\ y = 5 \\ z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \\ z = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Nhận xét: Phương pháp giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn bằng cách biến đổi hệ đó về hệ có dạng tam giác gọi là phương pháp khử dần ẩn số hay phương pháp Gauss.

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 5x - y + 3z = 10 \\ -3x + 7y - 4z = 7 \end{cases}$$

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình:

Giải. Ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 5x - y + 3z = 10 \\ -3x + 7y - 4z = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 16y + 7z = -5 \\ -3x + 7y - 4z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 16y + 7z = -5 \\ 16y + 2z = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 16y + 7z = -5 \\ 5z = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 16y + 7(-3) = -5 \\ z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = 1 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 11 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + y + z = -3 \end{cases}$$

Luyện tập 1. Giải hệ phương trình

Lời giải:

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 11 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + y + z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y - 3z = 11 \\ 7y - 7z = -7 \\ x + y + z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y - 3z = 11 \\ y - z = -1 \\ -3y - 7z = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 11 \\ y - z = -1 \\ -10z = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y - 3z = 11 \\ y - (-2) = -1 \\ z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + (-3) - 3 \cdot (-2) = 11 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y; z) = (2; -3; -2)$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x - y - 2z = 2 \\ x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x - y - 2z = 2 \\ x + 2y - 3z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ -5y + 4z = 0 \\ x + 2y - 3z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ -5y + 4z = 0 \\ -5y + 4z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ -5y + 4z = 0 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

Phương trình thứ ba của hệ vô nghiệm. Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Luyện tập 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y + 6z = 5 \\ -x + y - 2z = 3 \\ x - 4y - 2z = 13 \end{cases}$$

Lời giải:

$$\begin{cases} x + 2y + 6z = 5 \\ -x + y - 2z = 3 \\ x - 4y - 2z = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 6z = 5 \\ 3y + 4z = 8 \\ x - 4y - 2z = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 6z = 5 \\ 3y + 4z = 8 \\ 6y + 8z = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 6z = 5 \\ 3y + 4z = 8 \\ 3y + 4z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 6z = 5 \\ 3y + 4z = 8 \\ 0 = 12 \end{cases}$$

Phương trình thứ ba của hệ vô nghiệm. Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - y - 3z = 3 \\ x + y - 5z = 1 \\ -3x + 2y = -3 \end{cases}$$

Giải

$$\begin{cases} 3x - y - 3z = 3 \\ x + y - 5z = 1 \\ -3x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 3z = 3 \\ -4y + 12z = 0 \\ -3x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 3z = 3(1) \\ -4y + 12z = 0(2) \\ y - 3z = 0(3) \end{cases}$$

Hai phương trình (2) và (3) tương đương. Khi đó, hệ phương trình đưa về:

$$\begin{cases} 3x - y - 3z = 3 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6z = 3 \\ y = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = 3z \end{cases}$$

Đặt $z = t$ với t là số thực bất kì, ta có: $x = 2t + 1, y = 3t$.

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm

$$(x, y, z) = (2t + 1, 3t, t) \text{ với } t \text{ là số thực bất kì.}$$

$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ y - z = 0 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

Luyện tập 3. Giải hệ phương trình

Lời giải:

$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ y - z = 0 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z = -1(1) \\ y - z = 0(2) \\ 3y - 3z = 0(3) \end{cases}$$

Hai phương trình (2) và (3) tương đương. Khi đó, hệ phương trình đưa về:

$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 + 3z \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2z \\ y = z \end{cases}$$

Đặt $z = t$ với t là số thực bất kì, ta có: $x = -1 + 2t, y = t$.

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm $(x, y, z) = (-1 + 2t, t, t)$ với t là số thực bất kì.

III. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÌM NGHIỆM CỦA HỆ BA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

Ta có thể tìm nghiệm của hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn bằng cách sử dụng máy tính cầm tay. Mỗi máy tính khác nhau có thể có các phím khác nhau. Tuy nhiên, đều có quy tắc chung là phải mở chương trình giải hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn rồi mới nhập dữ liệu.

Ví dụ 5. Sử dụng máy tính cầm tay để tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ -x + 2y + 5z = 6 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

Giải. Sử dụng loại máy tính phù hợp, ấn liên tiếp các phím:

MODE 5 2 3 = - 1 = 1 = 2 = - 1 = 2 = 5 = 6 =
1 = 3 = - 1 = 1 = =

Ta thấy trên màn hình hiện ra $x = \frac{29}{60}$.

Ấn tiếp phím $\boxed{=}$ ta thấy trên màn hình hiện ra $y = \frac{8}{15}$.

Ấn tiếp phím $\boxed{=}$ ta thấy trên màn hình hiện ra $z = \frac{13}{12}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y; z) = \left(\frac{29}{60}; \frac{8}{15}; \frac{13}{12} \right)$.

Chú ý: $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{2}$ để vào chế độ giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -5 \\ -4x + 5y - z = 6 \\ 3x + 4y - 3z = 7 \end{cases}$$

Luyện tập 4. Sử dụng máy tính cầm tay để tìm nghiệm của hệ phương trình:

Lời giải:

Sử dụng loại máy tính phù hợp, ấn liên tiếp các phím:

MODE 5 2 2 = - 3 = 4 = - 5 = - 4 = 5 = - 1 = 6 = 3 = 4 = - 3 = 7 = =

Ta thấy trên màn hình hiện ra $x = \frac{22}{101}$.

Ấn tiếp phím $\boxed{=}$ ta thấy trên màn hình hiện ra $y = \frac{131}{101}$.

Ấn tiếp phím $\boxed{=}$ ta thấy trên màn hình hiện ra $z = -\frac{39}{101}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y; z) = \left(\frac{22}{101}; \frac{131}{101}; -\frac{39}{101} \right)$.

BÀI TẬP

1. Kiểm tra xem mỗi bộ số $(x; y; z)$ đã cho có là nghiệm của hệ phương trình tương ứng hay không.

a)
$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 5x - y + 3z = 16 \\ -3x + 7y + z = -14 \end{cases} \quad (0; 3; -2), (12; 5; -13), (1; -2; 3)$$

$$\begin{array}{l}
 \text{b) } \begin{cases} 3x - y + 4z = -10 \\ -x + y + 2z = 6 \\ 2x - y + z = -8 \end{cases} \quad (-2; 4; 0), (0; -3; 10), (1; -1; 5) \\
 \text{c) } \begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 \end{cases} \quad (4; 18; 78), (8; 11; 81), (12; 4; 84).
 \end{array}$$

Lời giải:

a)

+) Thay bộ số $(0; 3; -2)$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$0 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) = 1 \Leftrightarrow 5 = 1$ (sai). Vậy bộ số $(0; 3; -2)$ không phải nghiệm của phương trình thứ nhất, do đó không phải nghiệm của hệ đã cho.

+) Thay bộ số $(12; 5; -13)$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$12 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-13) = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ (đúng). Vậy bộ số $(12; 5; -13)$ nghiệm đúng với phương trình thứ nhất của hệ đã cho.

Thay bộ số $(12; 5; -13)$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$5 \cdot 12 - 5 + 3 \cdot (-13) = 16 \Leftrightarrow 16 = 16$ (đúng). Vậy bộ số $(12; 5; -13)$ nghiệm đúng với phương trình thứ hai của hệ đã cho.

Thay bộ số $(12; 5; -13)$ vào phương trình thứ ba của hệ ta được:

$-3 \cdot 12 + 7 \cdot 5 + (-13) = -14 \Leftrightarrow -14 = -14$ (đúng). Vậy bộ số $(12; 5; -13)$ nghiệm đúng với phương trình thứ ba của hệ đã cho.

Vì bộ số $(12; 5; -13)$ nghiệm đúng với cả ba phương trình nên nó là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

+) Thay bộ số $(1; -2; 3)$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$1 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ (đúng). Vậy bộ số $(1; -2; 3)$ nghiệm đúng với phương trình thứ nhất của hệ đã cho.

Thay bộ số $(1; -2; 3)$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$5 \cdot 1 - (-2) + 3 \cdot 3 = 16 \Leftrightarrow 16 = 16$ (đúng). Vậy bộ số $(1; -2; 3)$ nghiệm đúng với phương trình thứ hai của hệ đã cho.

Thay bộ số $(1; -2; 3)$ vào phương trình thứ ba của hệ ta được:

$-3 \cdot 1 + 7 \cdot (-2) + 3 = -14 \Leftrightarrow -14 = -14$ (đúng). Vậy bộ số $(1; -2; 3)$ nghiệm đúng với phương trình thứ ba của hệ đã cho.

Vì bộ số $(1; -2; 3)$ nghiệm đúng với cả ba phương trình nên nó là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

b)

+) Thay bộ số $(-2; 4; 0)$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

3. $(-2) - 4 + 4 \cdot 0 = -10 \Leftrightarrow -10 = -10$ (đúng). Vậy bộ số $(-2; 4; 0)$ nghiệm đúng với phương trình thứ nhất của hệ đã cho.

Thay bộ số $(-2; 4; 0)$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$-(-2) + 4 + 2 \cdot 0 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6$ (đúng). Vậy bộ số $(-2; 4; 0)$ nghiệm đúng với phương trình thứ hai của hệ đã cho.

Thay bộ số $(-2; 4; 0)$ vào phương trình thứ ba của hệ ta được:

2. $(-2) - 4 + 0 = -8 \Leftrightarrow -8 = -8$ (đúng). Vậy bộ số $(-2; 4; 0)$ nghiệm đúng với phương trình thứ ba của hệ đã cho.

Vì bộ số $(-2; 4; 0)$ nghiệm đúng với cả ba phương trình nên nó là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

+) Thay bộ số $(0; -3; 10)$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

3. $0 - (-3) + 4 \cdot 10 = -10 \Leftrightarrow 43 = -10$ (sai). Vậy bộ số $(0; -3; 10)$ không phải nghiệm của phương trình thứ nhất, do đó không phải nghiệm của hệ đã cho.

+) Thay bộ số $(1; -1; 5)$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

3. $1 - (-1) + 4 \cdot 5 = -10 \Leftrightarrow 24 = -10$ (sai). Vậy bộ số $(1; -1; 5)$ không phải nghiệm của phương trình thứ nhất, do đó không phải nghiệm của hệ đã cho.

c)

+) Thay bộ số $(4; 18; 78)$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$4 + 18 + 78 = 100 \Leftrightarrow 100 = 100$ (đúng). Vậy bộ số $(4; 18; 78)$ nghiệm đúng với phương trình thứ nhất của hệ đã cho.

Thay bộ số $(4; 18; 78)$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

5. $4 + 3 \cdot 18 + 78 = 100 \Leftrightarrow 100 = 100$ (đúng). Vậy bộ số $(4; 18; 78)$ nghiệm đúng với phương trình thứ hai của hệ đã cho.

Vì bộ số $(4; 18; 78)$ nghiệm đúng với cả hai phương trình nên nó là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

+) Thay bộ số $(8; 11; 81)$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$8 + 11 + 81 = 100 \Leftrightarrow 100 = 100$ (đúng). Vậy bộ số $(8; 11; 81)$ nghiệm đúng với phương trình thứ nhất của hệ đã cho.

Thay bộ số $(8;11;81)$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

5. $8 + 3 \cdot 11 + 81 = 100 \Leftrightarrow 100 = 100$ (đúng). Vậy bộ số $(8;11;81)$ nghiệm đúng với phương trình thứ hai của hệ đã cho.

Vì bộ số $(8;11;81)$ nghiệm đúng với cả hai phương trình nên nó là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

+) Thay bộ số $(12;4;84)$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$12 + 4 + 84 = 100 \Leftrightarrow 100 = 100$ (đúng). Vậy bộ số $(12;4;84)$ nghiệm đúng với phương trình thứ nhất của hệ đã cho.

Thay bộ số $(12;4;84)$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

5. $12 + 3 \cdot 4 + 84 = 100 \Leftrightarrow 100 = 100$ (đúng). Vậy bộ số $(12;4;84)$ nghiệm đúng với phương trình thứ hai của hệ đã cho.

Vì bộ số $(12;4;84)$ nghiệm đúng với cả hai phương trình nên nó là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 4 \\ 3y - z = 2 \\ 2z = -10 \end{cases} \quad \text{a) } \begin{cases} 4x + 3y - 5z = -7 \\ 2y = 4 \\ y + z = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x + 2y = 2 \\ x \end{cases} \quad \text{c) }$$

Lời giải:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 4 \\ 3y - z = 2 \\ 2z = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 4z = 4 \\ 3y - z = 2 \\ z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 4z = 4 \\ 3y - (-5) = 2 \\ z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 4z = 4 \\ y = -1 \\ z = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \cdot (-1) + 4 \cdot (-5) = 4 \\ y = -1 \\ z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 22 \\ y = -1 \\ z = -5 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y; z) = (22; -1; -5)$.

$$\begin{cases} 4x + 3y - 5z = -7 \\ 2y = 4 \\ y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 5z = -7 \\ y = 2 \\ y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 5z = -7 \\ y = 2 \\ 2 + z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 5z = -7 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = -7 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y; z) = (-2; 2; 1)$.

$$c) \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x + 2y = 2 \\ x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3 \cdot 10 + 2y = 2 \\ x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y = -14 \\ x = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 + (-14) + 2z = 0 \\ y = -14 \\ x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ y = -14 \\ x = 10 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y; z) = (2; -14; 10)$.

3. Giải hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ 6x - y - 4z = 9 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - y + z = 4 \\ 7x + y - 5z = -2 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x + 2y - 4z = -1 \\ 2x - y - 3z = 3 \\ x - 3y + z = 4 \end{cases}$$

Lời giải:

$$a) \begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ 6x - y - 4z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ -5y - 13z = -8 \\ 6x - y - 4z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ -5y - 13z = -8 \\ -y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ -5 \cdot (-1) - 13z = -8 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ -5 \cdot (-1) - 13z = -8 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - (-1) - 2 \cdot 1 = 5 \\ z = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y; z) = (2; -1; 1)$

$$b) \begin{cases} x + 2y + 6z = 5 \\ -x + y - 2z = 3 \\ x - 4y - 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 6z = 5 \\ 3y + 4z = 8 \\ 6y + 8z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 6z = 5 \\ 3y + 4z = 8 \\ 3y + 4z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 6z = 5 \\ 3y + 4z = 8 \\ 0 = 5 \end{cases}$$

Phương trình thứ ba của hệ vô nghiệm. Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

$$c) \begin{cases} x + 4y - 2z = 2 \\ -3x + y + z = -2 \\ 5x + 7y - 5z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y - 2z = 2 \\ 13y - 5z = 4 \\ 5x + 7y - 5z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y - 2z = 2 \\ 13y - 5z = 4(2) \\ 13y - 5z = 4(3) \end{cases}$$

Hai phương trình (2) và (3) tương đương. Khi đó, hệ phương trình đưa về:

$$\begin{cases} x+4y-2z=2 \\ 13y-5z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4y=2z+2 \\ y=\frac{5z+4}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{6z+10}{13} \\ y=\frac{5z+4}{13} \end{cases}$$

Đặt $z = t$ với t là số thực bất kì, ta có: $x = \frac{6t+10}{13}, y = \frac{5t+4}{13}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm $(x; y; z) = \left(\frac{6t+10}{13}; \frac{5t+4}{13}; t \right)$ với t là số thực bất kì.

4. Tìm số đo ba góc của một tam giác, biết tổng số đo của góc thứ nhất và góc thứ hai bằng hai lần số đo của góc thứ ba, số đo của góc thứ nhất lớn hơn số đo của góc thứ ba là 20° .

Lời giải:

Gọi số đo góc thứ nhất, thứ hai, thứ ba của tam giác lần lượt là x, y, z (độ).

Tổng 3 góc trong một tam giác bằng 180° nên $x + y + z = 180$ (1)

Theo đề bài ta có: $x + y = 2z$ (2) và $x - z = 20$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + z = 180 \\ x + y = 2z \\ x - z = 20 \end{cases}$$
.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y+z=180 \\ x+y=2z \\ x-z=20 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=180 \\ x+y-2z=0 \\ x-z=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=180 \\ 3z=180 \\ y+2z=200 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=180 \\ z=60 \\ y+2.60=200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+80+60=180 \\ z=60 \\ y=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=40 \\ z=60 \\ y=80 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy số đo ba góc của tam giác đã cho là $40^\circ, 80^\circ, 60^\circ$.

5. Bác Thanh chia số tiền 1 tỉ đồng của mình cho ba khoản đầu tư. Sau một năm, tổng số tiền lãi thu được là 84 triệu đồng. Lãi suất cho ba khoản đầu tư lần lượt là 6%, 8%, 15% và số tiền đầu tư cho khoản thứ nhất bằng tổng số tiền đầu tư cho khoản thứ hai và thứ ba. Tính số tiền bác Thanh đầu tư cho mỗi khoản.

Lời giải:

Gọi số tiền đầu tư cho khoản thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là x, y, z (triệu đồng).

Theo đề bài ta có: $x + y + z = 1000$ (1)

Số tiền đầu tư cho khoản thứ nhất bằng tổng số tiền đầu tư cho khoản thứ hai và thứ ba, do đó:

$$x = y + z \text{ hay } x - y - z = 0 \text{ (2)}$$

Lãi suất cho ba khoản đầu tư lần lượt là 6%, 8%, 15% và tổng số tiền lãi thu được là 84 triệu đồng nên $6\%x + 8\%y + 15\%z = 84$ hay $6x + 8y + 15z = 8400$ (3) Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:

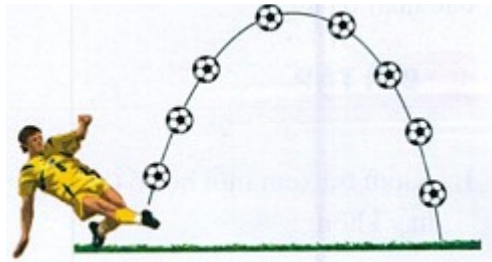
$$\begin{cases} x + y + z = 1000 \\ x - y - z = 0 \\ 6x + 8y + 15z = 8400 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $x = 500, y = 300, z = 200$.

Vậy số tiền đầu tư cho khoản thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là 500 triệu đồng, 300 triệu đồng và 200 triệu đồng.

6. Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết quỹ đạo chuyển động của quả

bóng là một parabol và độ cao h của quả bóng được tính bởi công thức $h = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + h_0$, trong đó độ cao h và độ cao ban đầu h_0 được tính bằng mét, t là thời gian của chuyển động tính bằng giây, a là gia tốc của chuyển động tính bằng m/s^2 , v_0 là vận tốc ban đầu được tính bằng m/s . Tìm a, v_0, h_0 biết sau 0,5 giây quả bóng đạt được độ cao 6,075 m; sau 1 giây quả bóng đạt độ cao 8,5 m; sau 2 giây quả bóng đạt độ cao 6 m.



Lời giải:

$$t = 0,5 \text{ thì } h = 6,075$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a(0,5)^2 + v_0 \cdot 0,5 + h_0 = 6,075 \Rightarrow \frac{1}{8}a + \frac{1}{2}v_0 + h_0 = 6,075(1)$$

$$t = 1 \text{ thì } h = 8,5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a \cdot 1^2 + v_0 \cdot 1 + h_0 = 8,5 \Rightarrow \frac{1}{2}a + v_0 + h_0 = 8,5(2)$$

$$t = 2 \text{ thì } h = 6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a \cdot 2^2 + v_0 \cdot 2 + h_0 = 6 \Rightarrow 2a + 2v_0 + h_0 = 6(3)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{8}a + \frac{1}{2}v_0 + h_0 = 6,075 \\ \frac{1}{2}a + v_0 + h_0 = 8,5 \\ 2a + 2v_0 + h_0 = 6 \end{cases}$$

Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình

Giải hệ này ta được $a = -9,8; v_0 = 12,2; h_0 = 1,2$.

7. Một cửa hàng bán đồ nam gồm áo sơ mi, quần âu và áo phông. Ngày thứ nhất bán được 22 áo sơ mi, 12 quần âu và 18 áo phông, doanh thu là 12580000 đồng. Ngày thứ hai bán được 16 áo sơ mi, 10 quần âu và 20 áo phông, doanh thu là 10800000 đồng. Ngày thứ ba bán được 24 áo sơ mi, 15 quần âu và 12 áo phông, doanh thu là 12960000 đồng. Hỏi giá bán mỗi áo sơ mi, mỗi quần âu và mỗi áo phông là bao nhiêu? Biết giá từng loại trong ba ngày không thay đổi.

Lời giải:

Gọi giá bán mỗi áo sơ mi, mỗi quần âu và mỗi áo phông lần lượt là x, y, z (nghìn đồng).

Theo đề bài ta có:

Ngày thứ nhất bán được 22 áo sơ mi, 12 quần âu và 18 áo phông, doanh thu là 12580000 đồng nên $22x + 12y + 18z = 12580$ (1)

Ngày thứ hai bán được 16 áo sơ mi, 10 quần âu và 20 áo phông, doanh thu là 10800000 đồng nên $16x + 10y + 20z = 10800$ (2)

Ngày thứ ba bán được 24 áo sơ mi, 15 quần âu và 12 áo phông, doanh thu là 12960000 đồng nên $24x + 15y + 12z = 12960$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 22x + 12y + 18z = 12580 \\ 16x + 10y + 20z = 10800 \\ 24x + 15y + 12z = 12960 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $x = 250, y = 320, z = 180$.

Vậy giá bán mỗi áo sơ mi, mỗi quần âu và mỗi áo phông lần lượt là 250 nghìn đồng, 320 nghìn đồng, 180 nghìn đồng.

8. Ba nhãn hiệu bánh quy là A, B, C được cung cấp bởi một nhà phân phối. Với tỉ lệ thành phần dinh dưỡng theo khối lượng, bánh quy nhãn hiệu A chứa 20% protein, bánh quy nhãn hiệu B chứa 28% protein và bánh quy nhãn hiệu C chứa 30% protein. Một khách hàng muốn mua một đơn hàng như sau:

- Mua tổng cộng 224 cái bánh quy bao gồm cả ba nhãn hiệu A, B, C ;
- Lượng protein trung bình của đơn hàng này (gồm cả ba nhãn hiệu A, B, C) là 25%;
- Lượng bánh nhãn hiệu A gấp đôi lượng bánh nhãn hiệu C .

Tính lượng bánh quy mỗi loại mà khách hàng đó đặt mua.

Lời giải:

Gọi lượng bánh quy nhãn hiệu A, B, C mà khách hàng đó mua lần lượt là x, y, z (cái).

Theo đề bài ta có:

Khách hàng mua tổng cộng 224 cái bánh quy nên $x + y + z = 224$ (1)

Lượng protein trong mỗi loại bánh A, B, C lần lượt là: 20%, 28%, 30%.

Vì lượng protein trung bình là 25% nên

$$\frac{20\%x + 28\%y + 30\%z}{x + y + z} = 25\% \quad (2)$$

Lượng bánh nhãn hiệu A gấp đôi lượng bánh nhãn hiệu C nên $x = 2z$ hay $x - 2z = 0$.

$$\Rightarrow 20\%x + 28\%y + 30\%z = 25\%(x + y + z)$$

$$\Rightarrow 20x + 28y + 30z = 25(x + y + z)$$

$$\Rightarrow -5x + 3y + 5z = 0 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 224 \\ -5x + 3y + 5z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $x = 96, y = 80, z = 48$.

Vậy lượng bánh quy nhãn hiệu A, B, C mà khách hàng đó mua lần lượt là 96, 80, 48 cái.

9. Sử dụng máy tính cầm tay để tìm nghiệm của các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} -x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + y + 2z = -3 \\ -2x - 3y + z = 5 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 5y - 4z = 0 \\ x + 2y - 3z = -1 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 3x - 5y - z = -3 \\ -x + 4y - 2z = 1 \end{cases} \end{array}$$

Lời giải:

a) Sử dụng loại máy tính phù hợp, ấn liên tiếp các phím:

MODE 5 2 - 1 = 2 = - 3 = 2 = 2 = 1 = 2 = - 3 = - 2 = - 3 = 1 = 5 = =

Ta thấy trên màn hình hiện ra $x = -4$.

Ấn tiếp phím = ta thấy trên màn hình hiện ra $y = \frac{11}{7}$.

Ấn tiếp phím = ta thấy trên màn hình hiện ra $z = \frac{12}{7}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y; z) = \left(-4; \frac{11}{7}; \frac{12}{7}\right)$.

b) Sử dụng loại máy tính phù hợp, ấn liên tiếp các phím:

MODE	5	2	1	=	-	3	=	1	=	1	=	0	=	5	=	-	4	=	0	=	1	=	2	=	-	3	=	-	1	=	=
------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ta thấy trên màn hình hiện ra No-Solution

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Sử dụng loại máy tính phù hợp, ấn liên tiếp các phím:

MODE	5	2	1	=	1	=	-	3	=	-	1	=	3	=	-	5	=	-	1	=	-	3	=
------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

-	1	=	4	=	-	2	=	1	=	=
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ta thấy trên màn hình hiện ra Infinite Sol.

Vậy hệ đã cho có vô số nghiệm.

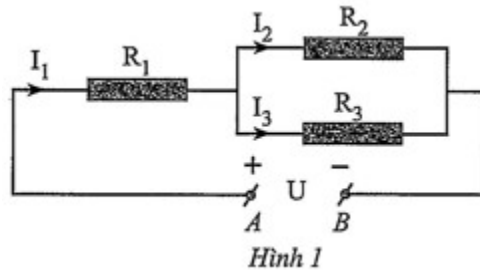
BÀI 2. ỨNG DỤNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn là một công cụ để giải quyết nhiều vấn đề trong thực tiễn cũng như trong các môn học khác như: Vật lí, Hoá học, Sinh học, Kinh tế, ...

I. ỨNG DỤNG TRONG VẬT LÍ

1. Ứng dụng trong bài toán về mạch điện

Bài toán 1. Cho mạch điện như Hình 1. Biết $R_1 = 36\Omega$, $R_2 = 90\Omega$, $R_3 = 60\Omega$ và $U = 60V$. Gọi I_1 là cường độ dòng điện chạy qua mạch chính, I_2 và I_3 là cường độ dòng điện chạy qua hai nhánh. Tính I_1, I_2, I_3 .



Giải

Cường độ dòng điện của đoạn mạch mắc song song là: $I_2 + I_3$.

Ta có: $I_1 = I_2 + I_3$ hay $I_1 - I_2 - I_3 = 0$.

Hiệu điện thế giữa hai đầu đoạn mạch mắc song song là: $U_2 = I_2 \cdot R_2 = I_3 \cdot R_3$ nên $90I_2 = 60I_3$ hay $3I_2 - 2I_3 = 0$.

Hiệu điện thế giữa hai đầu đoạn mạch AB là: $U = U_1 + U_2$ nên $60 = I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2$ hay $36I_1 + 90I_2 = 60 \Rightarrow 6I_1 + 15I_2 = 10$.

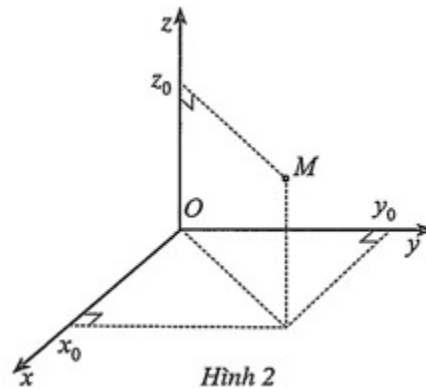
$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 3I_2 - 2I_3 = 0 \\ 6I_1 + 15I_2 = 10 \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình:

Giải hệ phương trình, ta được $I_1 = \frac{5}{6}(A), I_2 = \frac{1}{3}(A), I_3 = \frac{1}{2}(A)$.

2. Ứng dụng trong viễn thông

Bài toán 2. Cũng như trong mặt phẳng tọa độ, trong không gian ta có thể đưa vào hệ trục tọa độ $Oxyz$. Khi đó, mỗi điểm M trong không gian có tọa độ là bộ ba số $(x_0; y_0; z_0)$ và được kí hiệu là $M(x_0; y_0; z_0)(H2)$.



Khoảng cách giữa hai điểm $P(x_1; y_1; z_1), Q(x_2; y_2; z_2)$ trong không gian được tính như sau:

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS (Global Positioning System Hệ thống định vị toàn cầu) trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm trong không gian đó sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước.

Chẳng hạn, ta xét một ví dụ cụ thể như sau:

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn vệ tinh $A(0; 4; 5), B(-3; -1; 3), C(-2; 8; 9), D(-7; 2; -3)$ và trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận được tín hiệu phản hồi, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ. Biết các khoảng cách đó là $MA = 3, MB = 5, MC = 9, MD = 10$



Ảnh: Vệ tinh GPS đang bay trên quỹ đạo quanh Trái Đất

(Nguồn: <https://commons.wikimedia.org>)

a) Chứng minh tọa độ của điểm M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 9(1) \\ (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 25(2) \\ (x+2)^2 + (y-8)^2 + (z-9)^2 = 81(3) \\ (x+7)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 100(4) \end{cases}$$

b) Viết hệ phương trình có được bằng cách trừ theo từng vế của mỗi phương trình (2), (3), (4) cho phương trình (1).

c) Tìm tọa độ của điểm M .

Giải

a) Gọi tọa độ điểm $M(x; y; z)$. Theo giả thiết, $MA=3, MB=5, MC=9, MD=10$ nên ta có:

$$\begin{cases} MA^2 = 3^2 \\ MB^2 = 5^2 \\ MC^2 = 9^2 \\ MD^2 = 10^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 9 \\ (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 25 \\ (x+2)^2 + (y-8)^2 + (z-9)^2 = 81 \\ (x+7)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 100 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình (I).

b) Sau khi trừ theo từng vế của mỗi phương trình (2), (3), (4) cho phương trình (1), ta nhận được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 6x + 10y + 4z = 38 \\ 4x - 8y - 8z = -36 \\ 14x + 4y + 16z = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y + 2z = 19 \\ 2x - 4y - 4z = -18(II) \\ 7x + 2y + 8z = 35 \end{cases}$$

c) Giải hệ phương trình (II), ta được $x=1, y=2, z=3$. Vậy $M(1; 2; 3)$.

II. ỨNG DỤNG TRONG HOÁ HỌC

1. Phương pháp đại số trong cân bằng phản ứng hoá học

Xét phản ứng hoá học có dạng: $x_1 A_1 + x_2 A_2 \rightarrow x_3 A_3 + x_4 A_4$, trong đó mỗi phân tử A_i có thể có nhiều hơn một nguyên tố.

Để cân bằng phản ứng trên, ta phải tìm các hệ số x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho các nguyên tố được bảo toàn.

Bước 1. Coi x_1, x_2, x_3, x_4 là các ẩn, lập hệ phương trình bậc nhất bốn ẩn dựa theo định luật bảo toàn nguyên tố trong phản ứng hoá học.

Bước 2. Chọn ra một trong bốn ẩn x_1, x_2, x_3, x_4 và cho ẩn đó một giá trị cụ thể. Thông thường, ta chọn ra ẩn ứng với phân tử có cấu trúc phức tạp nhất trong bốn phân tử A_1, A_2, A_3, A_4 . Giải hệ phương trình bậc nhất theo ba ẩn còn lại.

Bài toán 3. Tìm các hệ số x, y, z để cân bằng phương trình: $xFe_3O_4 + yO_2 \xrightarrow{t} zFe_2O_3$.

Giải

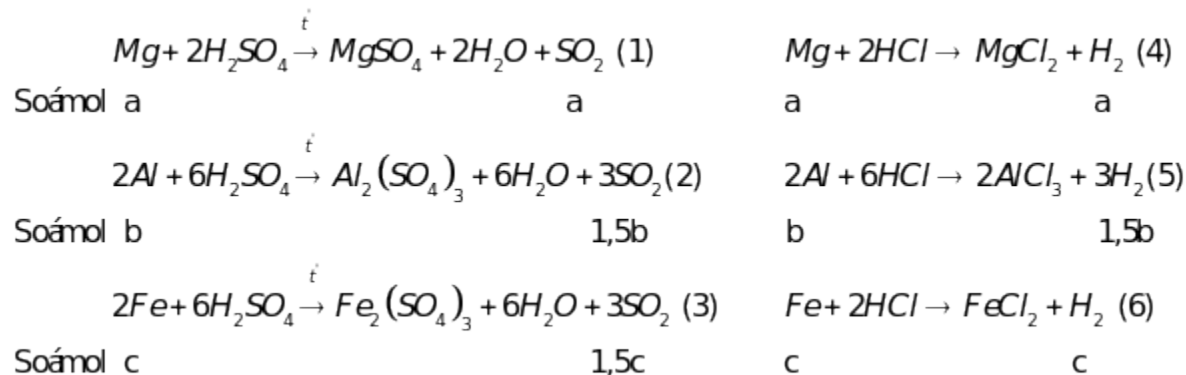
Theo định luật bảo toàn nguyên tố đối với Fe và O , ta có: $3x = 2z$ hay $3x - 2z = 0$ và $4x + 2y = 3z$ hay $4x + 2y - 3z = 0$.

Ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 3x - 2z = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Chọn $x = 4$. Khi đó, hệ (1) trở thành
$$\begin{cases} x = 4 \\ 2z = 12 \\ 2y - 3z = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ z = 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy ta có phương trình sau cân bằng: $4Fe_3O_4 + O_2 \xrightarrow{t} 6Fe_2O_3$.

Bài toán 4. Hoà tan hoàn toàn $13,4g$ hỗn hợp X gồm Mg, Al, Fe , vào dung dịch H_2SO_4 đặc nóng dư thu được $0,55mol$ khí SO_2 chỉ theo các phương trình phản ứng hoá học (1), (2), (3). Mặt khác, nếu cho $13,4g$ hỗn hợp trên tác dụng với dung dịch HCl dư thì thu được $0,5mol$ khí H_2 chỉ theo các phương trình phản ứng hoá học (4), (5), (6) :



Ở đó, a, b, c (a, b, c lớn hơn 0) lần lượt là số mol của Mg, Al và Fe trong hỗn hợp X .

Tính khối lượng Mg, Al, Fe trong hỗn hợp X .

Giải

Do khối lượng hỗn hợp X bằng 13,4 g; nguyên tử khối (khối lượng mol) của Mg, Al, Fe lần lượt là 24, 27, 56 nên ta có: $24a + 27b + 56c = 13,4$.

Số mol SO_2 là 0,55 (mol).

Từ các phương trình (1), (2), (3), ta có: $a + 1,5b + 1,5c = 0,55$.

Số mol H_2 là 0,5 (mol).

Từ các phương trình (4), (5), (6), ta có: $a + 1,5b + c = 0,5$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 24a + 27b + 56c = 13,4 \\ a + 1,5b + 1,5c = 0,55 \\ a + 1,5b + c = 0,5 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được: $a = 0,1(\text{mol}); b = 0,2(\text{mol}); c = 0,1(\text{mol})$.

Vậy ta có:

Khối lượng Mg trong hỗn hợp X là: $24 \cdot 0,1 = 2,4(g)$.

Khối lượng Al trong hỗn hợp X là: $27 \cdot 0,2 = 5,4(g)$.

Khối lượng Fe trong hỗn hợp X là: $56 \cdot 0,1 = 5,6(g)$.

2. Tìm cấu tạo của nguyên tử và xác định công thức phân tử của hợp chất

Ta đã biết một nguyên tố có ba loại hạt cơ bản là: P (proton), n (neutron), e (electron).

Ta gọi Z là số lượng hạt P . Khi đó, theo nguyên lí cân bằng điện tích, ta có Z cũng là số lượng hạt e .

Ta gọi N là số lượng hạt n .

Đặt $A = Z + N$, A được gọi là số khối.

Bài toán 5. Tổng số hạt cơ bản (P, n, e) của một nguyên tử X là 26. Số hạt mang điện nhiều hơn số hạt không mang điện là 6. Xác định số hạt P, n, e của nguyên tử X .

Giải

Có hai loại hạt mang điện của X là P và e . Vì thế tổng số hạt mang điện của X là $2Z$.

Ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 2Z + N = 26 \\ 2Z - N = 6 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $Z = 8, N = 10$.

Vậy nguyên tử X có 8 hạt P , 10 hạt n và 8 hạt e .

Bài toán 6. Trong phân tử M_2X có tổng số hạt (P, n, e) là 140 hạt, trong đó số hạt mang điện nhiều hơn số hạt không mang điện là 44 hạt. Số khối của nguyên tử M lớn hơn số khối của nguyên tử X là 23. Tổng số

hạt (p, n, e) trong nguyên tử M nhiều hơn trong nguyên tử X là 34 hạt. Xác định công thức phân tử của hợp chất M_2X .

Giải

Gọi Z_M, N_M lần lượt là số lượng hạt p, n của nguyên tử M ;

Z_X, N_X lần lượt là số lượng hạt p, n của nguyên tử X .

- Theo giả thiết, tổng số hạt (p, n, e) trong phân tử M_2X là 140 hạt nên ta có:

$$2(2Z_M + N_M) + (2Z_X + N_X) = 140 \text{ hay } 4Z_M + 2N_M + 2Z_X + N_X = 140.$$

- Do trong phân tử M_2X số hạt mang điện nhiều hơn số hạt không mang điện là 44 hạt nên ta có:

$$(4Z_M + 2Z_X) - (2N_M + N_X) = 44 \text{ hay } 4Z_M - 2N_M + 2Z_X - N_X = 44.$$

- Số khối của nguyên tử M lớn hơn số khối của nguyên tử X là 23 nên ta có:

$$(Z_M + N_M) - (Z_X + N_X) = 23 \text{ hay } Z_M + N_M - Z_X - N_X = 23.$$

- Tổng số hạt (p, n, e) trong nguyên tử M nhiều hơn trong nguyên tử X là 34 hạt nên ta có:

$$(2Z_M + N_M) - (2Z_X + N_X) = 34 \text{ hay } 2Z_M + N_M - 2Z_X - N_X = 34.$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4Z_M + 2N_M + 2Z_X + N_X = 140(1) \\ 4Z_M - 2N_M + 2Z_X - N_X = 44(2) \\ Z_M + N_M - Z_X - N_X = 23(3) \\ 2Z_M + N_M - 2Z_X - N_X = 34(4) \end{cases}$$

Cộng theo vế của phương trình (1) với từng phương trình (2), (3), (4), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 8Z_M + 4Z_X = 184 \\ 5Z_M + 3N_M + Z_X = 163 \\ 6Z_M + 3N_M = 174 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được $Z_M = 19, N_M = 20, Z_X = 8$. Do đó, $N_X = 8$.

Vì $Z_M = 19$ nên M là K (kalium); $Z_X = 8$ nên X là O (oxygen).

Vậy phân tử đó là K_2O .

III. ỨNG DỤNG TRONG SINH HỌC

Bài toán 7. Một phân tử DNA có tổng số nucleotide (nu) loại G với một loại nucleotide khác bằng 60% tổng số nucleotide của phân tử DNA. Tổng số liên kết hydrogen của phân tử DNA là 3 120. Trong mạch 1 có số nu

loại A bằng $\frac{1}{2}$ số nu loại G và bằng $\frac{1}{4}$ số nu loại T . Xác định số nucleotide mỗi loại trên từng mạch của phân tử DNA đó.

Giải

Kí hiệu: A, G, T, X lần lượt là tổng số nu loại A, G, T, X của phân tử DNA; N là tổng số nu của phân tử DNA;

A_1, G_1, T_1, X_1 lần lượt là tổng số nu loại A, G, T, X trong mạch 1; A_2, G_2, T_2, X_2 lần lượt là tổng số nu loại A, G, T, X trong mạch 2.

- Ta có: $G + A = 50\%N$; $A = T$; $G = X$.

Mà đề bài cho tổng số nu loại G với một loại nu khác là 60% của N nên $G + X = 60\%N$. Suy ra $G = X = 30\%N$ và $A + T = 40\%N$.

Vì $A = T$ nên từ $A + T = 40\%N$ ta có: $A = T = 20\%N$. Do đó, $G = 1,5A$.

- Ta có số liên kết hydrogen bằng $2A + 3G = 3120$ mà $G = 1,5A$ nên $A = T = 480$; $G = X = 720$.

Vậy $N = 2(A + G) = 2400$.

Do đó, tổng số nucleotide của phân tử DNA trên mỗi mạch là $2400 : 2 = 1200$.

- Ta có: $A_1 = T_2, A_2 = T_1$ nên $A_1 + T_1 = A_1 + A_2 = 480$.

Theo giả thiết ở mạch 1 có $A_1 = \frac{1}{2}G_1 = \frac{1}{4}T_1$ hay $G_1 = 2A_1, T_1 = 4A_1$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} A_1 + T_1 = 480 \\ 4A_1 - T_1 = 0 \\ 2A_1 - G_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 96 \\ T_1 = 384 \\ G_1 = 192 \end{cases}$$

Vậy số nucleotide loại X của mạch 1 là: $X_1 = 1200 - 96 - 384 - 192 = 528$.

- Ở mạch 2, ta có:

$A_2 = T_1 = 384$; $T_2 = A_1 = 96$; $G_2 = X_1 = 528$; $X_2 = G_1 = 192$.

18

IV. ỨNG DỤNG TRONG KINH TẾ

1. Mô hình cân bằng thị trường hàng hoá có liên quan

Giả sử trên thị trường có n loại hàng hoá được mua và bán, đánh số lần lượt là hàng hoá $1, 2, \dots, n$. Ta nói n loại hàng hoá đó có liên quan nếu giá của một mặt hàng nào đó thay đổi thì nó không những ảnh hưởng tới lượng cung (kí hiệu là Q_s) và lượng cầu (kí hiệu là Q_d) của bản thân mặt hàng đó, mà nó còn ảnh hưởng tới giá và lượng cung, lượng cầu của các mặt hàng còn lại.

Như vậy, đối với n loại hàng hoá có liên quan thì lượng cung Q_{S_i} (hoặc lượng cầu Q_{D_i}) của mỗi loại hàng hoá là một đại lượng phụ thuộc vào n biến $P_1, P_2, \dots, P_n$, trong đó $P_1, P_2, \dots, P_n$ lần lượt là giá của hàng hoá $1, 2, \dots, n$. Người ta thường biểu diễn sự phụ thuộc của lượng cung và lượng cầu vào giá của các hàng hoá bởi hàm cung và hàm cầu như sau:

$$Q_{S_i} = S_i(P_1, P_2, \dots, P_n), \quad Q_{D_i} = D_i(P_1, P_2, \dots, P_n) \quad (1 \leq i \leq n), \text{ trong đó } P_1, P_2, \dots, P_n \text{ lần lượt là giá của hàng hoá } 1, 2, \dots, n.$$

Mô hình cân bằng thị trường n loại hàng hoá có liên quan (cân bằng cung cầu) được xác định bởi hệ phương trình: $Q_{S_i} = Q_{D_i}, 1 \leq i \leq n$. Giải hệ phương trình đó chúng ta tìm được bộ giá cân bằng thị trường:

$$\bar{P} = (\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n). \text{ Thay vào } Q_{S_i} \text{ (hoặc } Q_{D_i}) \text{ chúng ta thu được bộ lượng cân bằng thị trường:}$$

$$\bar{Q} = (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}_n).$$

Bài toán 8. Xét thị trường gồm ba loại hàng hoá gồm chè, cà phê, ca cao có hàm cung và hàm cầu tương ứng như sau:

$$\begin{aligned} Q_{S_1} &= -10 + P_1; & Q_{D_1} &= 20 - P_1 - P_3 & (\text{chè}) \\ Q_{S_2} &= 2P_2; & Q_{D_2} &= 40 - 2P_2 - P_3 & (\text{cà phê}) \\ Q_{S_3} &= -5 + 3P_3; & Q_{D_3} &= 10 - P_1 + P_2 - P_3 & (\text{ca cao}) \end{aligned}$$

- Hãy thiết lập mô hình cân bằng thị trường của ba loại hàng hoá trên.
- Xác định giá và lượng cung cà phê ở trạng thái cân bằng thị trường.

Giải

- Mô hình cân bằng thị trường của ba loại hàng hoá trên được cho bởi hệ phương trình bậc nhất ba ẩn sau:

$$\begin{cases} Q_{S_1} = Q_{D_1} \\ Q_{S_2} = Q_{D_2} \\ Q_{S_3} = Q_{D_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 + P_1 = 20 - P_1 - P_3 \\ 2P_2 = 40 - 2P_2 - P_3 \\ -5 + 3P_3 = 10 - P_1 + P_2 - P_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P_1 + P_3 = 30 \\ 4P_2 + P_3 = 40 \\ P_1 - P_2 + 4P_3 = 15 \end{cases} \quad (I)$$

- Giải hệ phương trình (I), ta có:

$$\begin{aligned} (I) \quad & \Leftrightarrow \begin{cases} 2P_1 + P_3 = 30 \\ 4P_2 + P_3 = 40 \\ 2P_1 - 2P_2 + 8P_3 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P_1 + P_3 = 30 \\ 4P_2 + P_3 = 40 \\ 2P_2 - 7P_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P_1 + P_3 = 30 \\ 4P_2 + P_3 = 40 \\ 4P_2 - 14P_3 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2P_1 + P_3 = 30 \\ 4P_2 + P_3 = 40 \\ 15P_3 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = \frac{41}{3} \\ P_2 = \frac{28}{3} \\ P_3 = \frac{8}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy ở trạng thái cân bằng thị trường, giá cà phê là $\overline{P}_2 = \frac{28}{3}$ và lượng cung cà phê là: $\overline{Q}_{s_2} = 2\overline{P}_2 = 2 \cdot \frac{28}{3} = \frac{56}{3}$.

2. Mô hình cân bằng thu nhập quốc dân

Tổng thu nhập quốc dân, kí hiệu là Y , thường được tính trên hai nguồn chủ yếu: Chi tiêu cố định của chính phủ, kí hiệu là G_0 , và tiền của người dân (bao gồm đầu tư của các hộ gia đình, kí hiệu là I_0 , và tiêu dùng của các hộ gia đình, kí hiệu là C). Ta nói thu nhập quốc dân là cân bằng nếu $Y = C + I_0 + G_0$.

Xét mô hình cân bằng thu nhập quốc dân có dạng hệ phương trình bậc nhất:
$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = a(Y - T) + b \\ T = \alpha Y. \end{cases}$$

Trong đó: T là thuế, $C = a(Y - T) + b$, các hằng số $0 < a < 1, b > 0, 0 < \alpha < 1$ được chọn trước (phụ thuộc vào sự lựa chọn mô hình của các nhà hoạch định chính sách).

Bài toán 9. Cho mô hình cân bằng thu nhập quốc dân:
$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = 150 + 0,8(Y - T) \\ T = 0,2Y \end{cases}$$

Trong đó, Y là tổng thu nhập quốc dân, G_0 là chi tiêu cố định của chính phủ, I_0 là đầu tư của các hộ gia đình, C là tiêu dùng của các hộ gia đình, T là thuế và các đại lượng Y, G_0, I_0, T, C được tính theo cùng đơn vị đo.

a) Tìm trạng thái cân bằng khi $I_0 = 300, G_0 = 900$.

b) Khi suy thoái kinh tế, ta chọn $C = 150 + 0,7(Y - T)$. Giả sử $I_0 = 300$. Hỏi G_0 bằng bao nhiêu thì ổn định được tổng thu nhập quốc dân?

Giải

a) Khi $I_0 = 300, G_0 = 900$, mô hình cân bằng thu nhập quốc dân có dạng:

$$\begin{cases} Y - C = 1200 \\ -0,8Y + C + 0,8T = 150(I) \\ 0,2Y - T = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình (I), ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} Y - C = 1200 \\ 8Y - 10C - 8T = -1500 \\ 2Y - 10T = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y - C = 1200 \\ 2C + 8T = 11100 \\ Y = 5T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 3750 \\ C = 2550 \\ T = 750 \end{cases}$$

b) Theo giả thiết $C = 150 + 0,7(Y - T)$ và $I_0 = 300$ nên mô hình cân bằng thu nhập quốc dân có dạng:

$$\begin{cases} Y - C = 300 + G_0 \\ -0,7Y + C + 0,7T = 150 \quad (II) \\ 0,2Y - T = 0 \end{cases} \quad . \text{Giải hệ } (II), \text{ ta có:}$$

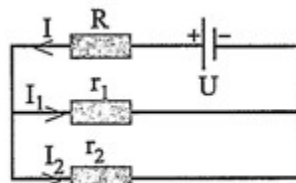
$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} C = Y - 300 - G_0 \\ -0,7Y + Y - 300 - G_0 + 0,7 \cdot 0,2Y = 150 \\ T = 0,2Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = Y - 300 - G_0 \\ \frac{11}{25}Y = 450 + G_0 \\ T = 2Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = Y - 300 - G_0 \\ Y = \frac{450 + G_0}{0,44} \\ T = 0,2Y \end{cases}$$

$$Y = \frac{450 + G_0}{0,44} = 3750 \Leftrightarrow G_0 = 1200$$

Để ổn định được thu nhập quốc dân thì

BÀI TẬP

1. Cho mạch điện như Hình 3. Biết $U = 20V, R = 0,5\Omega, r_1 = 1\Omega, r_2 = 2\Omega$. Tìm cường độ dòng điện I_1, I_2, I chạy qua mỗi điện trở.



Hình 3

Lời giải

Cường độ dòng điện của đoạn mạch mắc song song là: $I_1 + I$

Ta có: $I_2 = I_1 + I$ hay $I_1 - I_2 = -I$ (1).

Hiệu điện thế ở đoạn mạch mắc song song là: $U' = r_1 \cdot I_1 = R \cdot I$ nên

$1 \cdot I_1 = 0,5 \cdot I$ hay $2I_1 - I = 0$ (2).

Hiệu điện thế của cả đoạn mạch là: $U = U_2 + U'$ nên

$20 = r_2 \cdot I_2 + R \cdot I$ hay $2I + 0,5I_2 = 20$ (3).

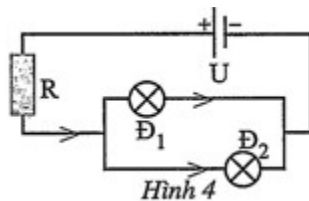
Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} I + I_1 - I_2 = 0 \\ 2I - I_1 = 0 \\ 2I + 0,5I_2 = 20 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được

$$I = \frac{40}{7} (A), I_1 = \frac{80}{7} (A), I_2 = \frac{120}{7} (A)$$

2. Cho mạch điện như Hình 4. Biết $U = 24V$, $D_1 : 12V - 6W$, $D_2 : 12V - 12W$, $R = 3\Omega$.



a) Tính điện trở của mỗi bóng đèn.

b) Tính cường độ dòng điện chạy qua mỗi bóng đèn và điện trở R.

Lời giải:

a) Điện trở của D_1 là: $R_1 = \frac{12^2}{6} = 24(\Omega)$.

Điện trở của D_2 là: $R_2 = \frac{12^2}{12} = 12(\Omega)$.

b) Gọi cường độ dòng điện qua điện trở R và các bóng đèn D_1 , D_2 lần lượt là I, I_1, I_2 (ampe).

Cường độ dòng điện của đoạn mạch mắc song song là: $I_1 + I_2$.

Ta có: $I = I_1 + I_2$ hay $I - I_1 - I_2 = 0$ (1).

Hiệu điện thế ở đoạn mạch mắc song song là: $U' = R_1 \cdot I_1 = R_2 \cdot I_2$ nên

$24 \cdot I_1 = 12 \cdot I_2$ hay $2I_1 - I_2 = 0$ (2).

Hiệu điện thế của đoạn mạch là: $U = U_R + U'$ nên

$24 = R \cdot I + R_1 \cdot I_1$ suy ra $3I + 24I_1 = 24$, hay $I + 8I_1 = 8$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} I - I_1 - I_2 = 0 \\ 2I_1 - I_2 = 0 \\ I + 8I_1 = 8 \end{cases}$$

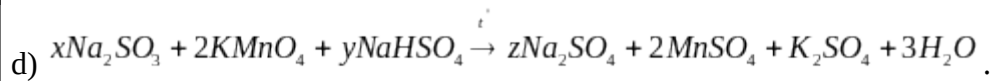
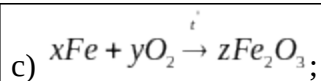
Giải hệ phương trình, ta được

$I = \frac{24}{11}(A), I_1 = \frac{8}{11}(A), I_2 = \frac{16}{11}(A)$.

3. Tìm các hệ số x, y, z để cân bằng mỗi phương trình phản ứng hoá học sau:

a) $xKClO_3 \xrightarrow{t} yKCl + zO_2$;

b) $xFeCl_2 + yCl_2 \rightarrow zFeCl_3$;



Lời giải:

a) Theo định luật bảo toàn nguyên tố với K, Cl và O, ta có: $x = y$ hay $x - y = 0$ và $3x = 2z$ hay $3x - 2z = 0$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - 2z = 0 \end{cases} \quad (1).$$

Chọn $z = 3$. Khi đó hệ (1) trở thành

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy ta có phương trình sau cân bằng: $2KClO_3 \xrightarrow{t} 2KCl + 3O_2$.

b) Theo định luật bảo toàn nguyên tố với Fe và Cl, ta có: $x = z$ hay $x - z = 0$ và $2x + 2y = 3z$ hay $2x + 2y - 3z = 0$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \quad (1).$$

Chọn $z = 2$. Khi đó hệ (1) trở thành

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy ta có phương trình sau cân bằng: $2FeCl_2 + Cl_2 \xrightarrow{t} 2FeCl_3$.

c) Theo định luật bảo toàn nguyên tố với Fe và O, ta có:

$x = 2z$ hay $x - 2z = 0$ và $2y = 3z$ hay $2y - 3z = 0$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases} \quad (1).$$

Chọn $z = 2$. Khi đó hệ (1) trở thành

$$\begin{cases} x - 4 = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy ta có phương trình sau cân bằng: $4Fe + 3O_2 \xrightarrow{t} 2Fe_2O_3$.

d) Theo định luật bảo toàn nguyên tố với Na, H và O , ta có:

$$2x + y = 2z \text{ hay } 2x + y - 2z = 0;$$

$$y = 6$$

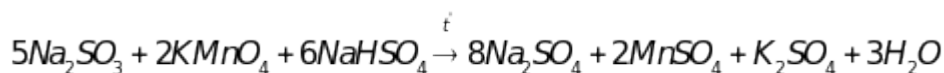
$$3x + 8 + 4y = 4z + 15 \text{ hay } 3x + 4y - 4z = 7$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ y = 6 \\ 3x + 4y - 4z = 7 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được $x = 5, y = 6, z = 8$.

Vậy ta có phương trình sau cân bằng:



4. Một giáo viên dạy Hoá tạo $1000g$ dung dịch HCl 25% từ ba loại dung dịch HCl có nồng độ lần lượt là 10%, 20% và 30%. Tính khối lượng dung dịch mỗi loại. Biết rằng lượng HCl có trong dung dịch 10% bằng $\frac{1}{4}$ lượng HCl có trong dung dịch 20%.

Lời giải:

Gọi khối lượng dung dịch HCl có nồng độ 10%, 20% và 30% lần lượt là x, y, z (g).

Theo đề bài ta có: $x + y + z = 1000$ (1).

Vì dung dịch mới có nồng độ 25% nên ta có:

$$\frac{10\%x + 20\%y + 30\%z}{1000} = 25\%$$

$$\Rightarrow 10x + 20y + 30z = 25000 \Rightarrow x + 2y + 3z = 2500 \text{ (2)}.$$

Lượng HCl có trong dung dịch 10% bằng lượng HCl có trong dung dịch 20%

$$\Rightarrow 10\%x = \frac{1}{4} 20\%y \Rightarrow 2x - y = 0 \text{ (3)}.$$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z=1000 \\ x+2y+3z=2500 \\ 2x-y=0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $x=125, y=250, z=625$.

Vậy khối lượng dung dịch HCl có nồng độ 10%, 20% và 30% lần lượt là 125 g, 250 g, 625 g.

5. Tổng số hạt p, n, e trong hai nguyên tử kim loại A và B là 177. Trong đó số hạt mang điện nhiều hơn số hạt không mang điện là 47. Số hạt mang điện của nguyên tử B nhiều hơn của nguyên tử A là 8. Xác định số hạt proton trong một nguyên tử A .

Lời giải:

Gọi Z_A, N_A lần lượt là số lượng hạt p, n của nguyên tử A .

Z_B, N_B lần lượt là số lượng hạt p, n của nguyên tử B .

Theo đề bài:

- Tổng số hạt p, n, e trong hai nguyên tử kim loại A và B là 177 nên ta có:

$$(2Z_A + N_A) + (2Z_B + N_B) = 177 \quad (1)$$

- Số hạt mang điện nhiều hơn số hạt không mang điện là 47 nên ta có:

$$(2Z_A + 2Z_B) - (N_A + N_B) = 47 \quad (2)$$

- Số hạt mang điện của nguyên tử B nhiều hơn của nguyên tử A là 8 nên ta có:

$$2Z_B - 2Z_A = 8 \text{ hay } Z_B - Z_A = 4 \quad (3).$$

Cộng theo từng vế của (1) với (2) ta được: $4Z_A + 4Z_B = 224$ hay $Z_A + Z_B = 56 \quad (4).$

Từ (3) và (4) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} Z_B - Z_A = 4 \\ Z_A + Z_B = 56 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $Z_A = 26, Z_B = 30$.

Vậy số hạt proton trong một nguyên tử A là 26.

6. Một phân tử DNA có khối lượng là $72 \cdot 10^4$ đvC và có 2826 liên kết hydrogen. Mạch 2 có số nu loại A bằng 2 lần số nu loại T và bằng 3 lần số nu loại X . Xác định số nucleotide mỗi loại trên từng mạch của phân tử DNA đó. Biết rằng một nu có khối lượng trung bình là 300 đvC.

Lời giải:

Kí hiệu A, G, T, X lần lượt là tổng số nu loại A, G, T, X của phân tử DNA.

N là tổng số nu của phân tử DNA.

A_1, G_1, T_1, X_1 lần lượt là tổng số nu loại A, G, T, X trong mạch 1.

A_2, G_2, T_2, X_2 lần lượt là tổng số nu loại A, G, T, X trong mạch 2.

+) Vì phân tử DNA có khối lượng là $72 \cdot 10^4$ đvC mà một nu có khối lượng trung bình là 300 đvC nên tổng số nu của phân tử DNA là $N = \frac{72 \cdot 10^4}{300} = 2400$

$$\Rightarrow G + A = \frac{N}{2} = \frac{2400}{2} = 1200 \quad (1).$$

+) Phân tử có 2826 liên kết hydro nên $2A + 3G = 2826 \quad (2).$

Từ (1) và (2) ta suy ra $A = 774, G = 426, T = A = 774, X = G = 426$.

+) Mạch 2 có số nu loại A bằng 2 lần số nu loại T và bằng 3 lần số nu loại X nên ta có:
 $A_2 = 2T_2, A_2 = 3X_2$ hay $A_2 - 2T_2 = 0, A_2 - 3X_2 = 0$.

Mặt khác, vì $A_1 = T_2$ nên $A_2 + T_2 = A_2 + A_1 = A = 774$.

Vậy ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} A_2 - 2T_2 = 0 \\ A_2 - 3X_2 = 0 \\ A_2 + T_2 = 774 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $A_2 = 516, T_2 = 258, X_2 = 172$.

Suy ra số nu loại G của mạch 2 là: $G_2 = 1200 - (516 + 258 + 172) = 254$.

Ở mạch 1, ta có $A_1 = T_2 = 258, T_1 = A_2 = 516, G_1 = X_2 = 172, X_1 = G_2 = 254$.

7. Tìm đa thức bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ (với $a \neq 0$) biết $f(-1) = -2, f(1) = 2, f(2) = 7$.

Lời giải:

$$f(-1) = -2a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + 1 = -2 \Rightarrow -a + b - c = -3 \quad (1)$$

$$f(1) = 2a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + 1 = 2 \Rightarrow a + b + c = 1 \quad (2)$$

$$f(2) = 7a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + 1 = 7 \Rightarrow 8a + 4b + 2c = 6 \Rightarrow 4a + 2b + c = 3 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -a+b-c=-3 \\ a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=3 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $a=1, b=-1, c=1$.

Vậy đa thức $f(x)$ là $x^3 - x^2 + x + 1$.

8. Ba lớp $^{10}A, ^{10}B, ^{10}C$ trồng được 164 cây bạch đàn và 316 cây thông. Mỗi học sinh lớp ^{10}A trồng được 3 cây bạch đàn và 2 cây thông; mỗi học sinh lớp ^{10}B trồng được 2 cây bạch đàn và 3 cây thông; mỗi học sinh lớp ^{10}C trồng được 5 cây thông. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh? Biết số học sinh lớp 10A bằng trung bình cộng số học sinh lớp 10B và 10C.

Lời giải:

Gọi số học sinh của ba lớp 10A, 10B, 10C lần lượt là x, y, z (học sinh) ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$).

Theo đề bài ta có:

- Số học sinh lớp 10A bằng trung bình cộng số học sinh lớp 10B và 10C, suy ra:

$$x = \frac{y+z}{2} \Rightarrow 2x - y - z = 0 \quad (1).$$

- Số cây bạch đàn mỗi học sinh lớp 10A, 10B trồng được lần lượt là: 3, 2. Suy ra:

$$3x + 2y = 164 \quad (2).$$

- Số cây thông mỗi học sinh lớp 10A, 10B, 10C trồng được lần lượt là: 2, 3, 5. Suy ra:

$$2x + 3y + 5z = 316 \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x + 2y = 164 \\ 2x + 3y + 5z = 316 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $x=32, y=34, z=30$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy số học sinh của ba lớp 10A, 10B, 10C lần lượt là 32, 34, 30 học sinh.

9. Độ cao h của một vật trong chuyển động được tính bởi công thức $h = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + h_0$, với độ cao h và độ cao ban đầu h_0 được tính bằng mét, t là thời gian của chuyển động tính bằng giây, a là gia tốc của chuyển động tính bằng m/s^2 , v_0 là vận tốc ban đầu tính bằng m/s . Tìm a, v_0, h_0 . Biết rằng sau 1s và 3s vật cùng đạt được độ cao 50,225m; sau 2s vật đạt độ cao 55,125m.

Lời giải:

Theo đề bài ta có:

$$t=1 \text{ thì } h=50,225$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a \cdot 1^2 + v_0 \cdot 1 + h_0 = 50,225 \Rightarrow \frac{1}{2}a + v_0 + h_0 = 50,225(1).$$

$$t=3 \text{ thì } h=50,225$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a \cdot 3^2 + v_0 \cdot 3 + h_0 = 50,225 \Rightarrow \frac{9}{2}a + 3v_0 + h_0 = 50,225(2).$$

$$t=2 \text{ thì } h=55,125$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a \cdot 2^2 + v_0 \cdot 2 + h_0 = 55,125 \Rightarrow 2a + 2v_0 + h_0 = 55,125(3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + v_0 + h_0 = 50,225 \\ \frac{9}{2}a + 3v_0 + h_0 = 50,225 \\ 2a + 2v_0 + h_0 = 55,125 \end{cases}$$

$$\frac{9}{2}a + 3v_0 + h_0 = 50,225$$

$$2a + 2v_0 + h_0 = 55,125$$

Giải hệ này ta được $a = -9,8; v_0 = 19,6; h_0 = 35,525$.

10. Một ngân hàng muốn đầu tư số tiền tín dụng là 100 tỉ đồng thu được vào ba nguồn: mua trái phiếu với mức sinh lời 8% / năm, cho vay thu lãi suất 10% / năm và đầu tư bất động sản với mức sinh lời 12% / năm. Theo điều kiện của quỹ tín dụng đề ra là tổng số tiền đầu tư vào trái phiếu và cho vay phải gấp ba lần số tiền đầu tư vào bất động sản. Nếu ngân hàng muốn thu được mức thu nhập 9,6 tỉ đồng hằng năm thì nên đầu tư như thế nào vào ba nguồn đó?

Lời giải:

Gọi số tiền đầu tư trái phiếu, cho vay, bất động sản lần lượt là x, y, z (tỉ đồng).

Theo đề bài ta có: $x + y + z = 100$ (1).

Tổng số tiền đầu tư vào trái phiếu và cho vay gấp ba lần số tiền đầu tư vào bất động sản, do đó:

$$x + y = 3z \text{ hay } x + y - 3z = 0 \text{ (2).}$$

Lãi suất cho ba khoản đầu tư lần lượt là 8%, 10%, 12% và tổng số tiền lãi thu được là 9,6 tỉ đồng nên:

$$8\%x + 10\%y + 12\%z = 9,6$$

$$\text{suy ra } 8x + 10y + 12z = 960 \text{ hay } 4x + 5y + 6z = 480(3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ x+y-3z=0 \\ 4x+5y+6z=480 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $x=45, y=30, z=25$.

Gọi số tiền đầu tư trái phiếu, cho vay, bất động sản lần lượt là 45 tỉ đồng, 30 tỉ đồng và 25 tỉ đồng.