UBND HUYỆN VĨNH BẢO
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ GIAO LƯU HSG HUYỆN CẤP THCS
MÔN: TOÁN 8

Bài 1. (3 điểm)

a) Phân tích đa thức $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ thành nhân tử

b) Cho a,b,c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$

Tính giá trị của biểu thức: $P=\dfrac{a^2}{a^2+2bc}+\dfrac{b^2}{b^2+2ac}+\dfrac{c^2}{c^2+2ab}$

c) Cho $x+y+z=0$. Chứng minh rằng: $2(x^5+y^5+z^5)=5xyz(x^2+y^2+z^2)$

Bài 2. (2 điểm)

a) Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

b) Cho $a,b>0$ thỏa mãn $a+b=1$. Chứng minh $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{a}\right)^2\geq\dfrac{25}{2}$

Bài 3. (1 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$ có góc ABC nhọn. Vẽ ra phía ngoiaf hình bình hành các tam giác đều BCE và DCF. Tính số đo $\widehat{EAF}$

Bài 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC' và H là trực tâm

a) Chứng minh $BC'.BA+CB'.CA=BC^2$

b) Chứng minh rằng: $\dfrac{HB.HC}{AB.AC}+\dfrac{HA.HB}{BC.AC}+\dfrac{HC.HA}{BC.AB}=1$

c) Gọi D là trung điểm của BC. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với DH cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh H là trung điểm của MN.

Bài 5. (1 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ và 2018 đường thẳng cùng có tính chất chia hình vuông này thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\dfrac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất 505 đường thẳng trong 2018 đường thẳng trên đồng quy.

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)-b^2\left[(a-b)+(b-c)\right]+c^2(a-b)$

$=(a^2-b^2)(b-c)+(c^2-b^2)(a-b)$

$=(a-b)(a+b)(b-c)-(b-c)(b+c)(a-b)$

$=(a-b)(b-c)\left[a+b-b-c\right]=(a-b)(b-c)(a-c)$

b) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow ab+ac+bc=0$

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}=\frac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$$

Tương tự: $\dfrac{b^2}{b^2+2ac}=\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}$; $\quad \dfrac{c^2}{c^2+2ac}=\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$$P=\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}$$

$$=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}-\frac{b^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{c^2}{(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=1$$

c) Vì $x+y+z=0 \Rightarrow x+y=-z \Rightarrow (x+y)^3=-z^3$

Hay $x^3+y^3+3xy(x+y)=-z^3 \Rightarrow 3xyz=x^3+y^3+z^3$

Do đó: $3xyz(x^2+y^2+z^2)=(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)$

$=x^5+y^5+z^5+x^3(y^2+z^2)+y^3(z^2+x^2)+z^3(x^2+y^2)$

Mà $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=z^2-2xy$ (Vì $x+y=-z$)

Tương tự: $y^2+z^2=x^2-2yz; z^2+x^2=y^2-2zx$

Vì vậy: $3xyz(x^2+y^2+z^2)=x^5+y^5+z^5+x^3(x^2-2yz)+y^3(y^2-2zx)+z^3(z^2-2xy)$

$=2(x^5+y^5+z^5)-2xyz(x^2+y^2+z^2)$

Suy ra : $2\left(x^5+y^5+z^5\right)=5xyz\left(x^2+y^2+z^2\right)$

Bài 2.

a) Để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

$\Leftrightarrow n+18=p^2$ và $n-41=q^2\left(p,q\in\mathbb{N}\right)$

$\Rightarrow p^2-q^2=(n+18)-(n-41)=59 \Leftrightarrow (p-q)(p+q)=59$

Nhưng 59 là số nguyên tố, nên: $\begin{cases} p-q=1 \\ p+q=59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=30 \\ q=29 \end{cases}$

Từ $n+18=p^2=30^2=900 \Rightarrow n=882$

Thay vào $n-41,$ ta được $882-41=841=29^2=q^2$

Vậy với $n=882$ thì $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

b) Có: $(a-b)^2\ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2ab \quad (*)$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b$

Áp dụng $(*)$ có: $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\frac{25}{4}\ge 5\left(a+\frac{1}{b}\right); \qquad \left(b+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{25}{4}\ge 5\left(b+\frac{1}{a}\right)$

Suy ra: $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{25}{2}\ge 5\left[\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{a}\right)\right]$

$\Leftrightarrow \left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{25}{2}\ge 5\left[(a+b)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]$

$\Leftrightarrow \left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{25}{2}\ge 5+5\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \quad (Vi \quad a+b=1)$

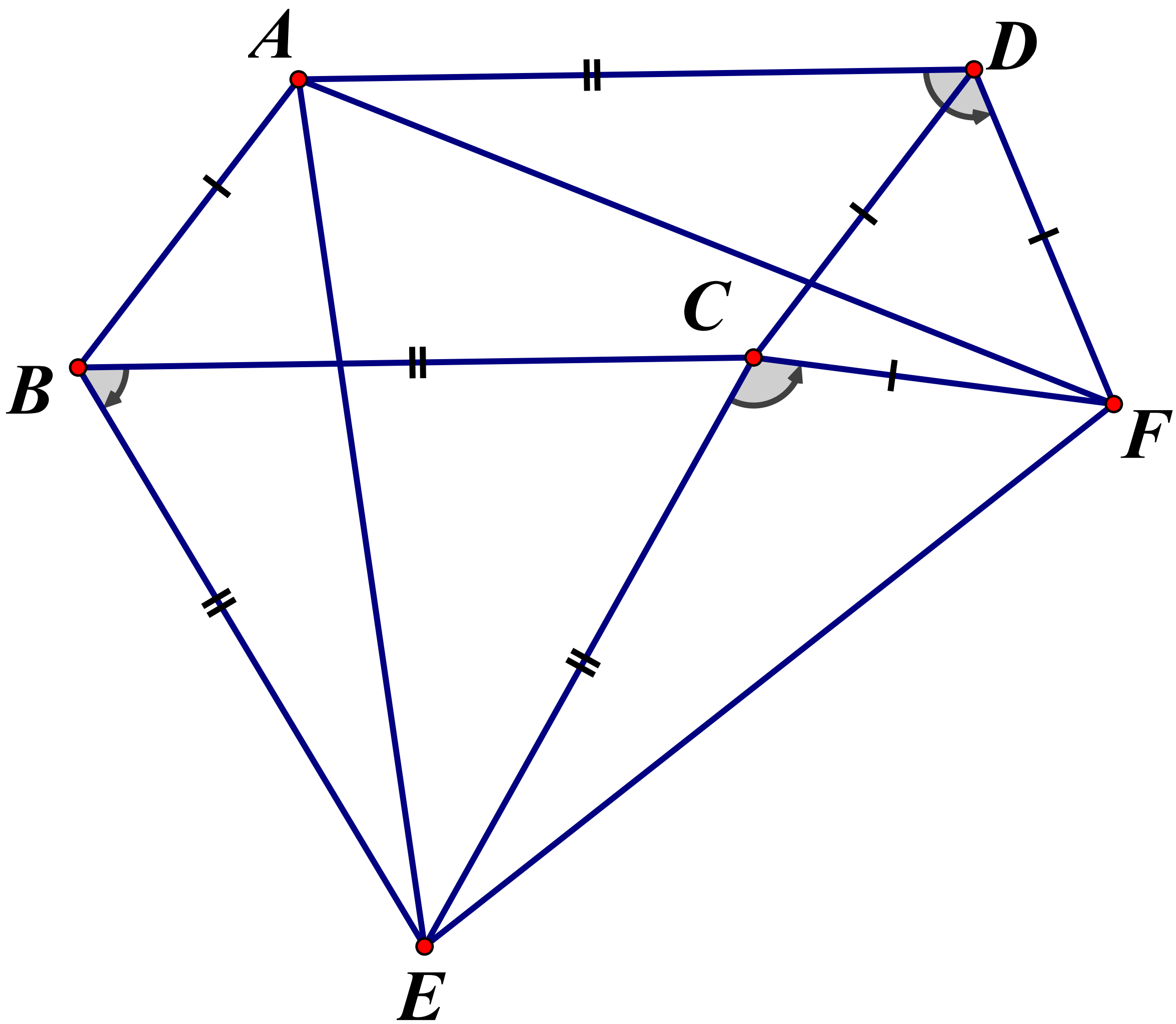
Với a,b dương , chứng minh $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}=4 \quad (Vi \quad a+b=1)$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b$

Ta được: $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{25}{2}\ge 5+5.4$

$\Leftrightarrow \left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{a}\right)^2\ge\frac{25}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Bài 3.



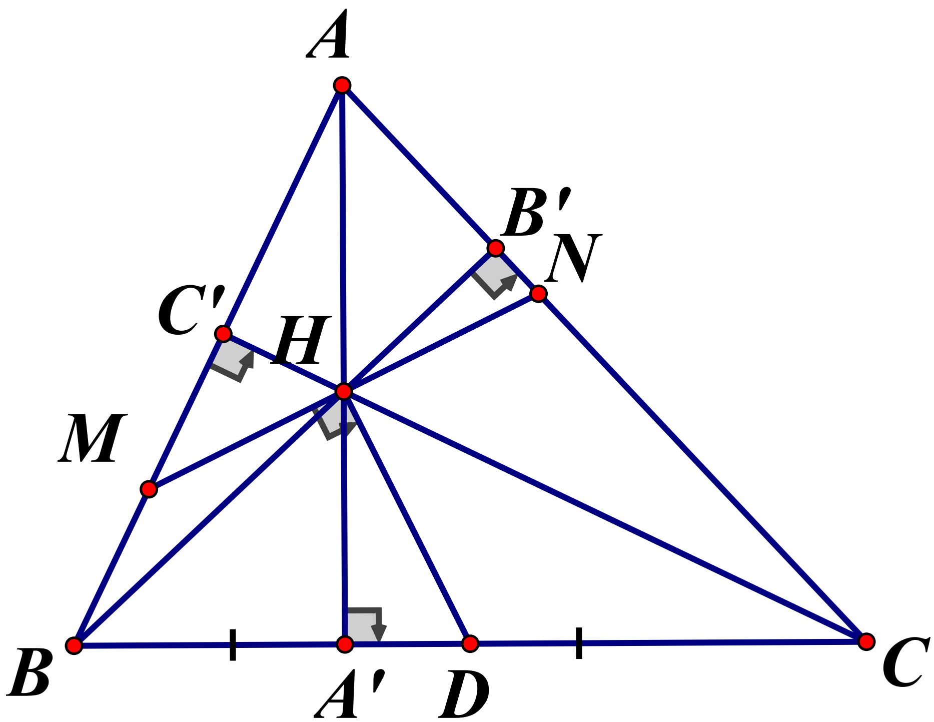
Chứng minh được $\widehat{ABE}=\widehat{ECF}$

Chứng minh được $\Delta ABE=\Delta FCE(c.g.c)\Rightarrow AE=EF$

Tương tự: $AF=EF$

$\Rightarrow AE=EF=AF\Rightarrow \Delta AEF$ đều $\Rightarrow \widehat{EAF}=60^0$

Bài 4.



a) Chứng minh $\Delta BHC' \sim \Delta BAB' \Rightarrow \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{BC'}{BB'} \Rightarrow BH.BB' = BC'.BA \qquad (1)$

Chứng minh $\Delta BHA' \sim \Delta BCB' \Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BA'}{BB'} \Rightarrow BH.BB' = BC.BA' \qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC'.BA = BA'.BC$

Tương tự : $CB'.CA = CA'.BC$

$\Rightarrow BC'.BA + CB'.CA = BA'.BC + CA'.BC = (BA' + A'C).BC = BC^2$

b) Có $\dfrac{BH}{AB} = \dfrac{BC'}{BB'} \Rightarrow \dfrac{BH.CH}{AB.AC} = \dfrac{BC'.CH}{BB'.AC} = \dfrac{S_{BHC}}{S_{ABC}}$

Tương tự: $\dfrac{AH.BH}{CB.CA} = \dfrac{S_{AHB}}{S_{ABC}}; \dfrac{AH.CH}{CB.AB} = \dfrac{S_{AHC}}{S_{ABC}}$

$\Rightarrow \dfrac{HB.HC}{AB.AC} + \dfrac{HA.HB}{AC.BC} + \dfrac{HC.HA}{BC.AB} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

c) Chứng minh $\Delta AHM \sim \Delta CDH (g.g) \Rightarrow \dfrac{HM}{HD} = \dfrac{AH}{CD} \quad (3)$

Chứng minh $\Delta AHN \sim \Delta BDH(g.g) \Rightarrow \frac{AH}{BD} = \frac{HN}{HD} \quad (4)$

Mà $CD = BD \quad (gt) \quad (5)$

Từ $(3),(4),(5) \Rightarrow \frac{HM}{HD} = \frac{HN}{HD} \Rightarrow HM = HN$ $\Rightarrow H$ là trung điểm của MN

Bài 5.

Gọi E, F, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD. Lấy các điểm I, G trên EF và K, H trên PQ thỏa mãn:

$$\frac{IE}{IF} = \frac{HP}{HQ} = \frac{GF}{GE} = \frac{KQ}{KP} = \frac{2}{3}$$

Xét d là một trong các đường thẳng bất kỳ đã cho cắt hai đoạn thẳng AD, BC, EF lần lượt tại M, N, G'. Ta có:

$$\frac{S_{ABMN}}{S_{CDNM}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{AB.(BM + AN)}{2}}{\frac{CD.(CM + DN)}{2}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{EG'}{G'F} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow G \equiv G'$$

hay d qua G.

Từ lập luận trên suy ra mỗi đường thẳng thỏa mãn yêu cầu của đề bài đều đi qua một trong 4 điểm G, H, I, K

Do có 2018 đường thẳng đi qua 1 trong 4 điểm G, H, I, K theo nguyên lý Dirichle phải tồn tại ít nhất $\left[\frac{2018}{4}\right] + 1 = 505$ đường thẳng cùng đi qua một điểm trong 4 điểm trên.

Vậy có ít nhất 505 đường thẳng trong số 2018 đường thẳng đã cho đồng quy.