

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Hai đường thẳng vuông góc

- Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tam giác SAD là tam giác đều và M là trung điểm của cạnh AD . Tính góc giữa hai đường thẳng BC và SA ; BC và SM .
- Câu 2.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và góc $A'AD$ bằng 120° . Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau: $A'C'$ và BD ; AD và BB' ; $A'D$ và BB' .
- Câu 3.** Cho tứ diện $ABCD$, gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BD . Biết $MN = a\sqrt{3}$; $AB = 2\sqrt{2}a$ và $CD = 2a$. Chứng minh rằng đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng CD .
- Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O và tất cả các cạnh của hình chóp đều bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AB .
- a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau: MN và SD ; MO và SB .
- b) Tính tang của góc giữa hai đường thẳng SN và BC .

Dạng 2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

- Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy là tam giác ABC vuông tại B . Kẻ AM vuông góc với SB tại M và AN vuông góc với SC tại N . Chứng minh rằng:
- a) $BC \perp (SAB)$;
- b) $AM \perp (SBC)$;
- c) $SC \perp (AMN)$.
- Câu 6.** Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O đến mặt phẳng (ABC) . Chứng minh rằng:
- a) $BC \perp (OAH)$;
- b) H là trực tâm của tam giác ABC ;
- c) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.
- Câu 7.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Chứng minh rằng $AD \perp BC$.
- Câu 8.** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có AA' vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy là tam giác ABC vuông tại B . Chứng minh rằng:
- a) $BB' \perp (A'B'C')$;
- b) $B'C' \perp (ABB'A')$.
- Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Chứng minh rằng:
- a) $SO \perp (ABCD)$;
- b) $AC \perp (SBD)$ và $BD \perp (SAC)$.

- Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC . Chứng minh rằng:
- $BC \perp (SAH)$ và các đường thẳng AH, BC, SK đồng quy;
 - $SB \perp (CHK)$ và $HK \perp (SBC)$.

Dạng 3. Góc của đường thẳng với mặt phẳng

- Câu 11.** Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a . Tính cosin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) .
- Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a, SA \perp (ABCD), SA = a\sqrt{2}$.
- Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.
 - Tính tang của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) .
- Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác ABC vuông cân tại B , biết $AB = a, SA = a\sqrt{6}$.
- Tính tang của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) .
 - Tính sin của góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (SBC) .
- Câu 14.** Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $AA' = a\sqrt{2}$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ trùng với trung điểm của $B'D'$. Tính góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.
- Câu 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và các cạnh đều bằng a .
- Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.
 - Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .
 - Gọi M là trung điểm của cạnh SC và α là góc giữa đường thẳng OM và mặt phẳng (SBC) . Tính $\sin \alpha$.

Dạng 4. Hai mặt phẳng vuông góc. Góc nhị diện

- Câu 16.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của CD , kẻ AH vuông góc với BM tại H .
- Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.
 - Tính cosin của góc giữa mặt phẳng (BCD) và mặt phẳng (ACD) .
- Câu 17.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = BC, AD = BD$. Gọi M là trung điểm của AB . Chứng minh rằng $(CDM) \perp (ABC)$ và $(CDM) \perp (ABD)$.
- Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh bằng a , góc BAD bằng 60° .
Kẻ OH vuông góc với SC tại H . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh rằng:
- $(SBD) \perp (SAC)$;

b) $(SBC) \perp (BDH)$;

c) $(SBC) \perp (SCD)$.

Câu 19. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng sau:

a) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$;

b) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SBC) .

Câu 20. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{15}}{6}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC vuông tại A , $\angle ABC = 30^\circ$, $AC = a$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

Câu 22. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

a) Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$.

b) Tính cosin của số đo góc nhị diện $[A', BD, C']$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , biết $(SAB) \perp (ABCD)$, $(SAD) \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính cosin của số đo góc nhị diện $[S, BD, C]$ và góc nhị diện $[B, SC, D]$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và AB .

a) Tính cosin của góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy $(ABCD)$.

b) Chứng minh rằng $(SMD) \perp (SHC)$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông, AC cắt BD tại O , $SO \perp (ABCD)$. Tất cả các cạnh của hình chóp bằng a .

a) Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) .

b) Gọi α là số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$. Tính $\cos \alpha$.

c) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) , β là số đo của góc nhị diện $[A, d, D]$. Tính $\cos \beta$.

$d^*)$ Gọi γ là số đo góc nhị diện $[B, SC, D]$. Tính $\cos \gamma$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $AC = a$, $SA = \frac{a}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$.

Dạng 5. Khoảng cách

- Câu 27.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy.
 $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
 Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a , biết
- Câu 28.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , M là trung điểm của SC .
 a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) .
 b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAG) .
- Câu 29.** Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$.
- Câu 30.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $\sqrt{11}$. Gọi I là trung điểm của cạnh CD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BI .
- Câu 31.** Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính theo a khoảng cách:
 a) Giữa hai đường thẳng AB và $C'D'$.
 b) Giữa đường thẳng AC và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.
 c) Từ điểm A đến đường thẳng $B'D'$.
 d) Giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$.
- Câu 32.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh bằng a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Tính theo a khoảng cách:
 a) Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .
 b) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .
 c) Giữa hai đường thẳng AB và SC .
- Câu 33.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , góc ABC bằng 60° , biết tam giác SBC đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính theo a khoảng cách:
 a) Từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) .
 b) Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .
 c) Giữa hai đường thẳng AB và SC .
- Câu 34.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = a\sqrt{2}, AA' = a\sqrt{3}$. Tính theo a khoảng cách:
 a) Từ điểm A đến mặt phẳng $(BDD'B')$.
 b) Giữa hai đường thẳng BD và CD' .
- Câu 35.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = AC = AA' = a$. Tính theo a khoảng cách:
 a) Từ điểm A đến đường thẳng $B'C'$.

b) Giữa hai đường thẳng BC và AB' .

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), AB \perp BC, SA = AB = 3a, BC = 4a$. Tính khoảng cách:

a) Từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) ;

b) Giữa hai đường thẳng SA và BC ;

c) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) ;

d) Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) ;

e*) Giữa hai đường thẳng AB và SC .

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a, AD = 3a$, tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính khoảng cách:

a) Từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) ;

b) Giữa hai đường thẳng SB và CD ;

c) Giữa hai đường thẳng BC và SA ;

d) Từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, AC cắt BD tại $O, SO \perp (ABCD), SA = 2a$. Tính khoảng cách:

a) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) ;

b) Giữa hai đường thẳng SO và CD ;

c) Từ điểm O đến mặt phẳng (SCD) ;

d*) Giữa hai đường thẳng AB và SD .

Câu 39. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh $a, AA' \perp (ABCD), AA' = 2a, AC = a$. Tính khoảng cách:

a) Từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$;

b) Giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$;

c*) Giữa hai đường thẳng BD và $A'C$.