

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức :
$$A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A , biết $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

Câu 2. (2,0 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $(6x + 8)(6x + 6)(6x + 7)^2 = 72$

b) $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M , N

1) Chứng minh rằng tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật

2) Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH . Chứng minh rằng $AC = 2EF$

3) Chứng minh rằng : $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Câu 5. Cho $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Rút gọn được kết quả : $A = \frac{-1}{x-2}$

$$|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ A = \frac{2}{5} \end{cases}$$

b)

c) $A < 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

d) $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{-1}{x-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-2 \in U(1) = \{\pm 1\} \Leftrightarrow x \in \{1; 3\}$

Câu 2.

a) Đặt $6x + 7 = t$. Ta có:

$$(t+1)(t-1)t^2 = 72 \Leftrightarrow (t^2 - 1)t^2 = 72$$

$$\Leftrightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = -8(ktm) \\ t^2 = 9(tm) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Vậy $x \in \left\{ -\frac{2}{3}; -\frac{5}{3} \right\}$

$$x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5); \quad x^2 + 11x + 30 = (x+6)(x+5);$$

$$x^2 + 13x + 42 = (x+6)(x+7)$$

b) $DKXD: x \neq \{-4; -5; -6; -7\}$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

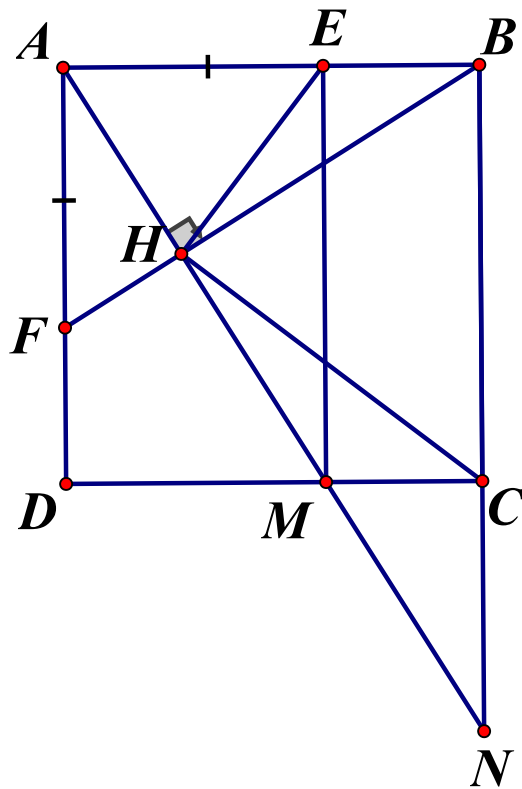
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -13(tm) \\ x = 2(tm) \end{cases}$$

Câu 3.



1) Ta có: $\angle EAM = \angle ABF$ (cùng phụ với $\angle BAH$)

$AB = AD$ (gt); $\angle BAF = \angle ADM = 90^\circ$ (ABCD là hình vuông)

$\Rightarrow \triangle ADM = \triangle BAF$ (g.c.g)

$\Rightarrow DM = AF$, mà $AF = AE$ (gt) nên $AE = DM$

Lại có: $AE \parallel DM$ (vì $AB \parallel DC$)

Suy ra tứ giác $AEMD$ là hình bình hành. Mặt khác $\angle EAE = 90^\circ$ (gt)

Vậy tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật

2) Ta có $\triangle ABH \sim \triangle FAH$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BH}{AH} \text{ hay } \frac{BC}{AE} = \frac{BH}{AH} (AB = BC; AE = AF)$$

Lại có: $\angle HAB = \angle HBC$ (cùng phụ với $\angle ABH$)

$$\Rightarrow \triangle CBH \sim \triangle AEH (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = \left(\frac{BC}{AE} \right)^2, \text{ mà } \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = 4(gt) \Rightarrow \left(\frac{BC}{AE} \right)^2 = 4 \Rightarrow BC^2 = (2AE)^2$$

$$\Rightarrow BC = 2AE \Rightarrow E \text{ là trung điểm của } AB, F \text{ là trung điểm của } AD$$

$$\text{Do đó: } BD = 2EF \text{ hay } AC = 2EF(dfcm)$$

3) Do $AD \parallel CN(gt)$. Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$$

Lại có: $MC \parallel AB(gt)$. Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{MC}{MN} \text{ hay } \frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM} \right)^2 + \left(\frac{AD}{AN} \right)^2 = \left(\frac{CN}{MN} \right)^2 + \left(\frac{CM}{MN} \right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$$

(Pytago)

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM} \right)^2 + \left(\frac{AD}{AN} \right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2} \quad (dfcm)$$

Câu 4.

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Dấu "=" xảy ra

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

Dấu "=" xảy ra

Áp dụng bất đẳng thức (***) ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Dấu "=" xảy ra

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$$

Áp dụng BĐT (*) ta có :

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{Vì } abc=1)$$

Hay

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\text{Mà } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \quad \text{nên} \quad \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}. \quad (\text{đpcm})$$

Câu 5.

$$a_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1$$

$$\text{Ta có: } a_n + a_{n+1} = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n + 1$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

là một số chính phương.