ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 8. Năm học: 2017-2018

Câu 1: ***(4,0 điểm)*** Chứng minh rằng:

a) $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ...+ 3^{11}$ chia hết cho 40.

b) $B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{100^2} < 1.$

Câu 2: ***(4,0 điểm)***

a) Cho a + b + c = 0, chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3=3abc$

b) So sánh hai số sau: $C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ và $D = 2^{32}$.

Câu 3: ***(4,0 điểm)***

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = 2x^2 – 8x + 1$.

Câu 4: ***(3,0 điểm)*** Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác ấy.

Câu 5: ***(4,0 điểm)***

Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC). Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Qua I vẽ IM vuông góc với AB tại M và IN vuông góc với AC tại N.

a) Chứng minh tứ giác AMIN là hình chữ nhật.

b) Gọi D là điểm đối xứng của I qua N. Chứng minh tứ giác ADCI là hình thoi.

c) Đường thẳng BN cắt DC tại K. Chứng minh rằng $DK = \frac{1}{3}DC$

Câu 6: ***(1,0 điểm)***

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

“HẾT”

C. ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu 1: ***(4,0 điểm)*** Chứng minh rằng:

a) $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ...+ 3^{11}$ chia hết cho 40.

b) $B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{100^2} < 1.$

CÂU 1	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
a	$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ...+ 3^{11}$ $= (1 + 3 + 3^2+ 3^3) + (3^4 + 3^5 +3^6 + 3^7)+ (3^8 + 3^9+ 3^{10} + 3^{11})$ $= (1 + 3 + 3^2+ 3^3) + 3^4. (1 + 3 + 3^2+ 3^3) + 3^8(1 + 3 + 3^2+ 3^3)$ $= 40 + 3^4. 40 + 3^8. 40$ $= 40. (1 + 3^4 + 3^8) \vdots 40$ Vậy $A \vdots 40$	 0,5 0,5 0,5 0,5
b	$B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{100^2}$ $= \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + ... + \frac{1}{100.100}$ $< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{99.100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$ $= 1 - \frac{1}{100} < 1$ Vậy $B < 1$	 0,5 0,5 0,5 0,5

Câu 2: ***(4,0 điểm)***

a) Cho $a + b + c = 0$, Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3=3abc$

b) So sánh hai số sau: $C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ và $D = 2^{32}$

CÂU 2	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
a	Ta có: $a + b + c = 0$ suy ra $a + b = - c$ Mặt khác: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ Suy ra $(- c)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(-c)$ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$(đpcm)	 0,5 0,5 0,5 0,5
b	$C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ $(2-1)C = (2-1) (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ $C = (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$	 0,25 0,25

	$C = (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$	0,25
	$C = (2^8-1)\ (2^8+1)(2^{16}+1)$	0,25
	$C = (2^{16}-1)(2^{16}+1)$	0,25
	$C = 2^{32}-1$	0,25
	Vì $2^{32} - 1 < 2^{32}$ nên C < D.	0,5

Câu 3: *(4,0 điểm)*

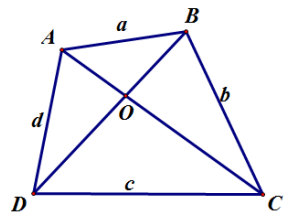
a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = 2x^2 – 8x + 1$.

CÂU 3	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
a	$x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$	
	$= x^4 + (x^2 + 2018x^2) + 2018x + (2018 + 1) + x^3 – x^3$	0,5
	$= (x^4 + x^3 + x^2) + (2018x^2 + 2018x + 2018) – (x^3 - 1)$	0,5
	$= x^2(x^2 + x + 1) + 2018(x^2 + x + 1) – (x – 1)(x^2 + x + 1)$	0,5
	$= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2018 – x + 1)$	0,25
	$= (x^2 + x + 1)(x^2– x + 2019)$	0,25
b	$E = 2x^2 – 8x + 1$	
	$= 2x^2 – 8x + 8 - 7$	0,5
	$= 2(x^2 – 4x + 4) – 7$	0,5
	$= 2(x – 2)^2 – 7 \geq - 7$	0,5
	Vậy giá trị nhỏ nhất của $E = - 7$ khi $x = 2$	0,5

Câu 4: *(3,0 điểm)*

Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác ấy.

ĐÁP ÁN	ĐIỂM
	

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD.	
Đặt AB = a, BC = b, CD = c, DA = d.	
Xét ΔAOB, ta có: OA + OB > AB (Quan hệ giữa ba cạnh của tam giác).	
Xét ΔCOD, ta có: OC + OD > CD (Quan hệ giữa ba cạnh của tam giác).	0,25
Suy ra: OA + OB + OC + OD > AB + CD	0,25
$\Rightarrow$ AC + BD > AB + CD	
$\Rightarrow$ AC + BD > a + c (1)	0,25
Chứng minh tương tự:	
AC + BD > AD + BC	0,25
$\Rightarrow$ AC + BD > d + b (2)	
Từ (1) và (2) suy ra 2(AC + BD) > a + c + d + b	0,25
$\Rightarrow AC+BD>\frac{a+c+d+b}{2}$ (*)	0,25 0,25
Xét ΔABC, ta có: AC < a + b	
Xét ΔADC, ta có: AC < d + c	
Suy ra: 2AC < a +b + c + d	0,25
$\Rightarrow AC<\frac{a+c+d+b}{2}$ (3)	0,25
Chứng minh tương tự: $BD<\frac{a+c+d+b}{2}$ (**) (4)	0,25
Từ (3) và (4) suy ra: AC + BD < a +b + c +d.	
Từ (*) và (**) suy ra $\frac{a+c+d+b}{2}<AC+BD<a+b+c+d$ (đpcm)	0,25 0,25

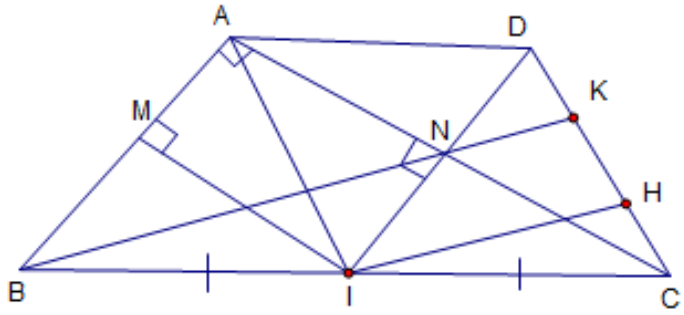
<u>Câu 5</u>*: (4,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC). Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Qua I vẽ IM vuông góc với AB tại M và IN vuông góc với AC tại N.

a) Chứng minh tứ giác AMIN là hình chữ nhật.

b) Gọi D là điểm đối xứng của I qua N. Chứng minh tứ giác ADCI là hình thoi.

c) Đường thẳng BN cắt DC tại K. Chứng minh rằng $DK = \frac{1}{3}DC.$

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
		
a	Xét tứ giác AMIN có: $\widehat{MAN} = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông ở A) $\widehat{AMI} = 90^0$ (vì IM vuông góc với AB) $\widehat{ANI} = 90^0$ (vì IN vuông góc với AC) Vậy tứ giác AMIN là hình chữ nhật (Vì có 3 góc vuông)	 0,25 0,25 0,25 0,25
b	ΔABC vuông tại A, có AI là trung tuyến nên $AI = IC = \frac{1}{2}BC$ Do đó ΔAIC cân tại I, có đường cao IN đồng thời là trung tuyến $\Rightarrow NA = NC$ Mặt khác: NI = ND (tính chất đối xứng) nên ADCI là hình bình hành (1) Mà $AC \perp ID$ (2) Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ADCI là hình thoi.	0,5 0.5 0,5 0,5
c	Kẻ qua I đường thẳng IH song song với BK cắt CD tại H $\Rightarrow$ IH là đường trung bình ΔBKC $\Rightarrow$ H là trung điểm của CK hay KH = HC (3) Xét ΔDIH có N là trung điểm của DI, NK // IH (IH // BK) Do đó K là trung điểm của DH hay DK = KH (4)	0,25 0,25 0,25

	Từ (3) và (4) suy ra DK = KH = HC $\Rightarrow DK = \frac{1}{3}DC$	0,25

Câu 6:*(1,0 điểm)*

Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e)$

ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Ta có :	
$\left(\frac{1}{2}a-b\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2+b^2 \geq ab$ (1)	
$\left(\frac{1}{2}a-c\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2+c^2 \geq ac$ (2)	0,25
$\left(\frac{1}{2}a-d\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2+d^2 \geq ad$ (3)	
$\left(\frac{1}{2}a-e\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2+e^2 \geq ae$ (4)	0,25
Ta cộng (1), (2), (3), (4) vế theo vế ta được :	
$4.\frac{1}{4}a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq ab+ac+ad+ae$	0,25
$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e)$	0,25

- ***Lưu ý :***
  - *Mọi cách giải khác của học sinh có kết quả đúng đều ghi điểm tối đa.*
  - *Riêng câu 4 và câu 5 nếu học sinh không vẽ hình mà làm đúng thì cho ½ tổng số điểm của câu đó.*

(Đề thi gồm có 08 trang)