

CHỦ ĐỀ 5

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẪNG

DẠNG 1

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN BIỂU THỨC

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.
 Tìm tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $T = \left| \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right|$ nhỏ nhất
 (với $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$).

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)

Bước 1: Tìm tọa độ điểm phụ I

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$

Dựa vào đẳng thức $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I .

Ta có:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} + \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MI} \quad (\text{do } \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}) \\ \Rightarrow T &= \left| \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right| = \left| \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \right| \left| \overrightarrow{MI} \right| \end{aligned}$$

Vì $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ là hằng số khác không nên $T_{\min} \Leftrightarrow \left| \overrightarrow{MI} \right|_{\min}$

Mà $M \in (P)$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

- + Lập phương trình tham số đường thẳng IM với $\begin{cases} \text{Qua } I \\ u_{IM} = n_p = (A; B; C) \end{cases}$.
- + Ta có $M = IM \cap (P) \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bunhiacôpxki

Với $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, ta có:

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2$ nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) (với $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$).

Chú ý:

$$T_{\min} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$$

$$T_{\max} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$$

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)

Bước 1: Tìm tọa độ điểm phụ I

+ Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$

+ Dựa vào đẳng thức $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ ta tìm được tọa độ điểm I .

+ Ta có:

$$\begin{aligned} T &= \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2 \\ &= \alpha_1 (\overrightarrow{MA_1})^2 + \alpha_2 (\overrightarrow{MA_2})^2 + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MA_n})^2 \\ &= \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1})^2 + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2})^2 + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n})^2 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) MI^2 + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2 + 2MI(\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) MI^2 + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2 \quad (\text{do } \alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) MI^2 + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2$$

+ Vì $\alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \dots + \alpha_n IA_n^2$ không đổi nên:

• với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.

• với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.

+ Mà $M \in (P)$ nên MI nhỏ nhất khi điểm M cần tìm là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M

+ Lập phương trình tham số đường thẳng IM với $\begin{cases} \text{Qua } I \\ u_{IM} = n_P = (A; B; C) \end{cases}$.

+ Ta có $M = IM \cap (P) \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bu-nhia-cốp-xki

Với $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, ta có: $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Dấu "=" xảy ra

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; 2), B(3; 1; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$. Gọi $M(a; b; c) \in (P)$ sao cho $\left| \overrightarrow{3MA} - \overrightarrow{2MB} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S = 9a + 3b + 6c$.

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4; 2; 2), B(1; 1; -1), C(2; -2; -2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (Oxy) sao cho $\left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right|$ nhỏ nhất.

- A. $M(2; 3; 0)$ B. $M(1; 3; 0)$ C. $M(2; -3; 0)$ D. $M(2; 3; 1)$

Câu 3. Trong hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(-1; 3; 5), B(2; 6; -1), C(-4; -12; 5)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 5 = 0$. Gọi M là điểm di động trên (P) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right|$ là

- A. 42. B. 14. C. $14\sqrt{3}$. D. $\frac{14}{\sqrt{3}}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4; 2; 2), B(1; 1; -1), C(2; -2; -2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $\left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right|$ nhỏ nhất

- A. $M(2; 3; 1)$ B. $M(0; 3; 1)$ C. $M(0; -3; 1)$ D. $M(0; 1; 2)$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1; -1; 3), B(2; 1; 0), C(-3; -1; -3)$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - 4 = 0$. Gọi $M(a, b, c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $T = \left| \overrightarrow{3MA} - \overrightarrow{2MB} + \overrightarrow{MC} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b + c$.

- A. $S = 3$. B. $S = -1$. C. $S = 2$. D. $S = 1$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và ba điểm $A(3; 1; 1), B(7; 3; 9)$ và $C(2; 2; 2)$. Điểm $M(a; b; c)$ trên (P) sao cho $\left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $2a - 10b + c$.

- A. $\frac{62}{9}$ B. $\frac{27}{9}$ C. $\frac{46}{9}$ D. $\frac{43}{9}$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;2)$ và điểm M thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 7 = 0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P = \overline{3MA} + \overline{5MB} - \overline{7MC}$.

- A. $P_{\min} = 20$. B. $P_{\min} = 5$. C. $P_{\min} = 25$. D. $P_{\min} = 27$.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-3;7)$, $B(0;4;1)$, $C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của M là:

- A. $M(0;1;-4)$. B. $M(2;1;0)$. C. $M(0;1;-2)$. D. $M(0;1;4)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;3;4)$ và $C(-2;5;1)$. Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $T = a^2 + b^2$ bằng

- A. $T = 10$. B. $T = 25$. C. $T = 13$. D. $T = 17$.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P = x + y + z$.

- A. $P = 0$. B. $P = 2$. C. $P = 6$. D. $P = -2$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 8 = 0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P) , tính giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $a + b + c$ có giá trị bằng

- A. 2. B. 3. C. 4. D. -4.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): 3x + 3y - 2z - 29 = 0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) sao cho biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt GTNN. Tính tổng $a + b + c$.

- A. 8. B. 10. C. -10. D. -8.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3)$, $B(0;1;1)$, $C(1;0;-2)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho giá trị của biểu thức $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(Q): 2x - y - 2z + 3 = 0$?

- A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{121}{54}$ C. 24 D. $\frac{91}{54}$

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -2; 4)$, $B(-3; 3; -1)$, $C(-1; -1; -1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 8 = 0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (P) , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2MA^2 + MB^2 - MC^2$.

- A. 102. B. 105. C. 30. D. 35.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1; 2; 0)$, $B(1; -1; 3)$, $C(1; -1; -1)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z - 15 = 0$. Xét $M(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a + b + c$ bằng

- A. 3. B. 7. C. 2. D. -1.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(3; 1; -5)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 - 2MB^2 - MC^2$ lớn nhất.

- A. $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ B. $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right)$ C. $M(0; 0; 5)$ D. $M(3; -4; 0)$

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10; -5; 8)$, $B(2; 1; -1)$, $C(2; 3; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 9 = 0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$.

- A. 54 B. 282 C. 256 D. 328

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 1)$, $B(5; 0; -1)$, $C(3; 1; 2)$ và mặt phẳng $(Q): 3x + y - z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc (Q) thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ nhỏ nhất. Tính tổng $a + b + 5c$.

- A. 11. B. 9. C. 15. D. 14.

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1; 1; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(-2; 1; 4)$ và mặt phẳng $(P): x - y + z + 2 = 0$. Tìm điểm $N \in (P)$ sao cho $S = 2NA^2 + NB^2 + NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $N\left(-\frac{4}{3}; 2; \frac{4}{3}\right)$ B. $N(-2; 0; 1)$ C. $N\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right)$ D. $N(-1; 2; 1)$

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(4; -2; 6)$, $B(2; 4; 2)$, $M \in (\alpha): x + 2y - 3z - 7 = 0$ sao cho $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ nhỏ nhất. Tọa độ của M bằng

- A. $\left(\frac{29}{13}; \frac{58}{13}; \frac{5}{13}\right)$ B. $(4; 3; 1)$ C. $(1; 3; 4)$ D. $\left(\frac{37}{3}; -\frac{56}{3}; \frac{68}{3}\right)$

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1; -1; 2)$, $B(-2; 0; 3)$, $C(0; 1; -2)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S = \overline{MA.MB} + 2\overline{MB.MC} + 3\overline{MC.MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T = 12a + 12b + c$ có giá trị là

- A. $T = 3$. B. $T = -3$. C. $T = 1$. D. $T = -1$.

Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(4; 1; 5)$, $B(3; 0; 1)$, $C(-1; 2; 0)$ và điểm $M(a; b; c)$ thỏa mãn $\overline{MA.MB} + 2\overline{MB.MC} - 5\overline{MC.MA}$ lớn nhất. Tính $P = a - 2b + 4c$.

- A. $P = 23$. B. $P = 31$. C. $P = 11$. D. $P = 13$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-8; 1; 1)$, $B(2; 1; 3)$ và $C(6; 4; 0)$. Một điểm M di động trong không gian sao cho $\overline{MA.MC} = \overline{MA.MB} + 34$. Cho biết $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất khi điểm M trùng với điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Tính tích số $x_0 y_0 z_0$.

- A. 16. B. 18. C. 14. D. 12.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3; 2; 1)$, $B(-2; 3; 6)$. Điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) . Tìm giá trị của biểu thức $T = x_M + y_M + z_M$ khi $|\overline{MA} + 3\overline{MB}|$ nhỏ nhất.

Trả lời:

Câu 26. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(-1; 2; 3)$, $B(6; -5; 8)$ và $\overline{OM} = a\vec{i} + b\vec{k}$ trong đó a, b là các số thực luôn thay đổi. Nếu $|\overline{MA} - 2\overline{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị $a - b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 2; 5)$, $B(3; -1; 0)$, $C(-4; 0; -2)$. Gọi I là điểm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $|\overline{IA} - 2\overline{IB} + 3\overline{IC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(P): 4x + 3y + 2 = 0$.

Trả lời:

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1)$, $B(2; -1; 3)$ và điểm $M(a; b; 0)$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Tính giá trị của $a + b$.

Trả lời:

Câu 29. Trong không gian cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(3; 6; -5)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Trả lời:

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;2), B(1;1;0), C(3;0;1)$ và mặt phẳng $(Q): x + y + z - 5 = 0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (Q) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2 + MB^2 + MC^2$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 31. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1), B(1;4;-1), C(2;4;3), D(2;2;-1)$, biết $M(x;y;z)$ để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x + y + z$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;1), B(-1;1;0), C(1;0;-1)$. Điểm M thuộc mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 2 = 0$ sao cho $3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Trả lời:

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-2;4), B(-3;3;-1), C(-1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 8 = 0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (P) , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2MA^2 + MB^2 - MC^2$.

Trả lời:

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5), B(3;4;0), C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x - 3y - 2z - 12 = 0$. Gọi $M(a;b;c)$ thuộc (α) sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S = a + b + c$.

Trả lời:

Câu 35. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;2), B(-2;2;0)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$. Xét các điểm M, N di động trên (P) sao cho $MN = 1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2AM^2 + 3BN^2$.

Trả lời:

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;b;c)$ với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $5(a^2 + b^2 + c^2) = 9(ab + 2bc + ca)$ và $Q = \frac{a}{b^2 + c^2} - \frac{1}{(a + b + c)^3}$ có giá trị lớn nhất. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia Ox, Oy, Oz . Viết phương trình mặt phẳng (MNP) .

Trả lời:

DẠNG 2

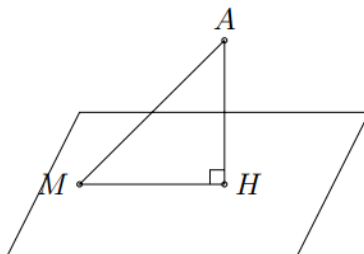
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN KHOẢNG CÁCH

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ cố định và điểm M di động trên mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$. Tìm tọa độ điểm M để AM có giá trị nhỏ nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



- + Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P) .
- + Khi đó, tam giác AHM vuông tại H do đó $AM \geq AH$.
- + Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$.
- + Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P) .

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M ($M \equiv H$)

- + Lập phương trình tham số đường thẳng AH với $\begin{cases} \text{Qua } A \\ u_{AH} = n_p = (A; B; C) \end{cases}$.
- + Ta có $M \equiv H = AH \cap (P) \Rightarrow$ độ điểm M cần tìm.

Cách 2: Phương pháp đại số

Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bunhiacốpski

Với $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, ta có:

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

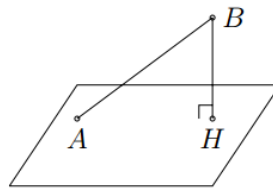
Dấu "=" xảy ra

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm A, B cố định. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



- + Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P) .
- + Khi đó $d(B, (P)) = BH \leq BA$
- + Do đó (P) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với AB

Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng (P) với $\begin{cases} \text{Qua } A \\ \vec{n_P} = \vec{AB} \end{cases}$.

Cách 2: Phương pháp đại số

- + Gọi $\vec{n_P} = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
- + Khi đó phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A là: $a(x - x_A) + (y - y_A) + (z - z_A) = 0$
- + Khi đó $\vec{n_P} \cdot \vec{AB} = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).
- + Ta có: $d(B, (P)) = f(t)$, với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$.
- + Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

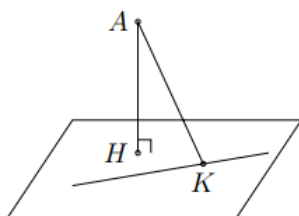
Chú ý: Để tìm vectơ pháp tuyến $\vec{n_P}$ của mặt phẳng (P) đơn giản hơn thì nên gọi $\vec{n_P} = (1; b; c)$.

Bài toán 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm A và đường thẳng Δ cố định. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng Δ và cách A một khoảng lớn nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học

Bước 1:



- + Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ .
- + Khi đó $d(A, (P)) = AH \leq AK$
- + Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK .

Bước 2:

- + Tìm tọa độ điểm K .

- + Lập phương trình mặt phẳng (P) với $\begin{cases} \text{Qua } K \\ n_p = AK \end{cases}$.

Cách 2: Phương pháp đại số

- + Gọi $n_p = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
- + Khi đó $n_p \cdot u_\Delta = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).
- + Ta có: $d(A, (P)) = f(t)$, với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$.
- + Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Chú ý: Để tìm vector pháp tuyến n_p của mặt phẳng (P) đơn giản hơn thì nên gọi $n_p = (1; b; c)$.

Bài toán 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B . Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

1. $MA + MB$ nhỏ nhất.
2. $|MA - MB|$ lớn nhất.

Phương pháp giải

1. $MA + MB$ nhỏ nhất.

Ta xét hai trường hợp sau:

- **TH 1:** Nếu A và B nằm về hai phía so với (P) .

Khi đó $AM + BM \geq AB$

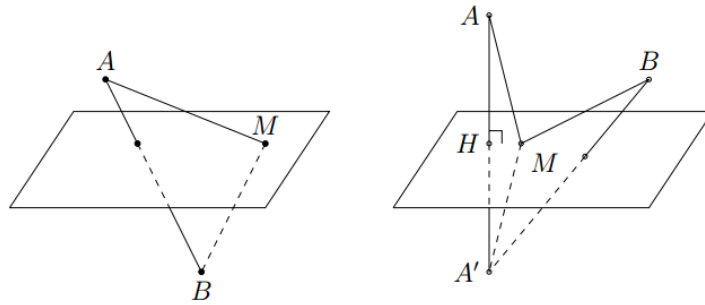
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P) .

- **TH 2:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P) .

Gọi A' đối xứng với A qua (P) .

Khi đó $AM + BM = A'M + BM \geq A'B$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P) .



2. $|MA - MB|$ lớn nhất.

Ta xét hai trường hợp sau

- **TH 1:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P) .

+ Khi đó $|AM - BM| \leq AB$

+ Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P) .

- **TH 2:** Nếu A và B nằm khác phía so với (P) .

+ Gọi A' đối xứng với A qua (P) ,

+ Khi đó $|AM - BM| = |A'M - BM| \leq A'B$

+ Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P) .

Bài toán 5. Trong không gian $Oxyz$, cho các số thực dương α, β và ba điểm A, B, C . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua C và có $T = \alpha d(A, (P)) + \beta d(B, (P))$ nhỏ nhất.

Phương pháp giải

1. Xét A, B nằm về cùng phía so với (P) .

- Nếu $AB \parallel (P)$ thì $P = (\alpha + \beta)d(A, (P)) \leq (\alpha + \beta)AC$

- Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại I . Gọi D là điểm thỏa mãn $\vec{IB} = \frac{\alpha}{\beta} \vec{ID}$ và E là trung điểm BD . Khi

đó: $P = \alpha d(A, (P)) + \beta \cdot \frac{IB}{ID} \cdot d(D, (P)) = 2\alpha d(E, (P)) \leq 2(\alpha + \beta)EC$

2. Xét A, B nằm về hai phía so với (P) .

Gọi I là giao điểm của AB và (P) , B' là điểm đối xứng với B qua I .

Khi đó $P = \alpha d(A, (P)) + \beta d(B', (P))$

Đến đây ta chuyển về **bài toán 4** trên.

Bài toán 6. Trong không gian $Oxyz$, cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và điểm A . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tổng khoảng cách từ các điểm $A_i (i = \overline{1, n})$ lớn nhất.

Phương pháp giải

- Xét n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ nằm cùng phía so với (P) . Gọi G là trọng tâm của n điểm đã cho.

Khi đó: $\sum_{i=1}^n d(A_i, (P)) = nd(G, (P)) \leq nGA$

- Trong n điểm trên có m điểm nằm về một phía và k điểm nằm về phía khác ($m + k = n$). Khi đó, gọi G_1 là trọng tâm của m điểm, G_2 là trọng tâm của k điểm G_3 đối xứng với G_1 qua A .

Khi đó $P = md(G_3, (P)) + kd(G_2, (P))$

Đến đây ta chuyển về **bài toán 5** trên.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Phương trình của (P) là

- A. $2y + z = 0$. B. $2y - z = 0$. C. $y + z = 0$. D. $y - z = 0$.

Câu 38. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; 7; 2)$ và cách $M(-2; 4; -1)$ một khoảng lớn nhất có phương trình là

- A. $(P): 3x + 3y + 3z - 10 = 0$. B. $(P): x + y + z - 1 = 0$.
C. $(P): x + y + z - 10 = 0$. D. $(P): x + y + z + 10 = 0$.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2; -1; -2)$ và đường thẳng (d) có phương trình

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. $x - y - 6 = 0$. B. $x + 3y + 2z + 10 = 0$. C. $x - 2y - 3z - 1 = 0$. D. $3x + z + 2 = 0$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1; -7; -8)$, $B(2; -5; -9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7; -1; -2)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Biết (P) có một vectơ pháp tuyến là $n = (a; b; 4)$, khi đó giá trị của tổng $a + b$ là

- A. -1. B. 3. C. 6. D. 2.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

- A. $x + y - z - 2 = 0$. B. $x + y - z = 0$.
C. $x + y - z + 1 = 0$. D. $-x + 2y + z + 5 = 0$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cách điểm A một khoảng cách lớn nhất. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) .

- A. $n = (1; 0; 2)$. B. $n = (1; 0; -2)$. C. $n = (1; 1; 1)$. D. $n = (1; 1; -1)$.

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x + my + (2m+1)z - m - 2 = 0$, m là tham số. Gọi $H(a; b; c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P) . Tính $a + b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất?

- A. $a + b = -\frac{1}{2}$. B. $a + b = 2$. C. $a + b = 0$. D. $a + b = \frac{3}{2}$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Biết rằng $(P): ax + by + cz - 3 = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) là mặt phẳng chứa d và khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Khi đó tổng $T = a + b + c$ bằng

- A. 3. B. -3. C. -2. D. -5.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cách điểm A một khoảng cách lớn nhất. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $n = (1; 0; 2)$. B. $n = (1; 0; -2)$. C. $n = (1; 1; 1)$. D. $n = (1; 1; -1)$.

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(5;-4;-1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $d_{(B,(P))} = 2d_{(A,(P))}$, (P) cắt AB tại $I(a;b;c)$ nằm giữa AB . Tính $a+b+c$

A. 8 B. 6 C. 12 D. 4

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;3;-1), B(2;3;2), C(-1;0;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) để $S = |\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

A. $M\left(-1;0;\frac{7}{3}\right)$ B. $M(0;3;0)$ C. $M\left(1;0;\frac{7}{3}\right)$ D. $M\left(-\frac{1}{2};0;2\right)$

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C (A, B, C không trùng với gốc tọa độ). Thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{81}{2}$ B. $\frac{243}{2}$ C. $\frac{81}{6}$ D. 243

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m;0;0), N(0;n;0), P(0;0;p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2 + n^2 + p^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP) .

A. $\frac{1}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D. $\frac{1}{27}$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;-1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Viết phương trình của (P) .

Trả lời:

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Viết phương trình của (P) .

Trả lời:

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Lập phương trình của (P) .

Trả lời:

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2; -1; -2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

Trả lời:

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P) .

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{3}{\sqrt{6}}$. C. $\frac{11\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Trả lời:

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 2)$ và mặt phẳng $(P): (m-1)x + y + mz - 1 = 0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Tính m .

Trả lời:

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1), B(3; 0; 3)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách B một khoảng lớn nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mp $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d qua A và vuông góc với mp $(Q): 3x + 4y - 4z + 5 = 0$, cắt mp (P) tại B . Điểm M nằm trong mp (P) sao cho M luôn nhìn AB dưới góc vuông. Tính độ dài lớn nhất của MB .

Trả lời:

Câu 58. Cho $A(4; 5; 6); B(1; 1; 2)$, M là một điểm di động trên mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 1 = 0$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $|MA - MB|$.

Trả lời:

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(3; 2; 1)$, $C(5; 3; 7)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $MA = MB$ và $MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + b + c$.

Trả lời:

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3;1;1)$, $B(5;1;1)$ và hai mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$, $(Q): -x+y+z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm nằm trên hai mặt phẳng (P) và (Q) sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

Trả lời:

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): y-1=0$, đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=2-t \\ z=1 \end{cases}$ và hai điểm $A(-1;-3;11)$, $B\left(\frac{1}{2};0;8\right)$. Hai điểm M, N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $d(M,d)=2$ và $NA=2NB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN .

Trả lời:

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;1)$, $B(3;1;5)$, $C(1;2;0)$, $D(4;2;1)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua D sao cho ba điểm A, B, C nằm cùng phía đối với (α) và tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến mặt phẳng (α) là lớn nhất. Giả sử phương trình (α) có dạng: $2x+my+nz-p=0$. Khi đó, tính giá trị của $T=m+n+p$.

Trả lời:

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ gọi $(P): ax+by+cz-3=0$ (a, b, c là các số nguyên không đồng thời bằng 0) là phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $M(0;-1;2), N(-1;1;3)$ và không đi qua $H(0;0;2)$. Biết rằng khoảng cách từ $H(0;0;2)$ đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị của $P=a-2b+3c+12$.

Trả lời:

Câu 64. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. Tính $T=a+2b+3c$.

Trả lời:

Câu 65. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Câu 66. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (A, B, C không trùng với gốc O) sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Câu 67. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, trong đó a, b, c là các số thực thỏa mãn $\frac{2}{a} - \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) .

Trả lời:

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$ với a, b, c là những số dương thay đổi thỏa mãn $a^2 + 4b^2 + 16c^2 = 49$. Tính tổng $S = a^2 + b^2 + c^2$ khi khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất.

Trả lời:

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$ và hai điểm $A(3;4;1); B(7;-4;-3)$. Điểm $M(a;b;c) (a > 2)$ thuộc (P) sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

Trả lời:

$$d: \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 3 + 4t \\ z = 0 \end{cases}$$

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d . Gọi A là hình chiếu vuông góc của O trên d . Điểm M di động trên tia Oz , điểm N di động trên đường thẳng d sao cho $MN = OM + AN$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng OA . Trong trường hợp diện tích tam giác IMN đạt giá trị nhỏ nhất, lập phương trình của mặt phẳng chứa điểm M và đường thẳng d .

Trả lời:

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;3)$ và mặt phẳng $(P): 2y - z = 0$. Biết điểm B thuộc (P) , điểm C thuộc (Oxy) sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Trả lời:

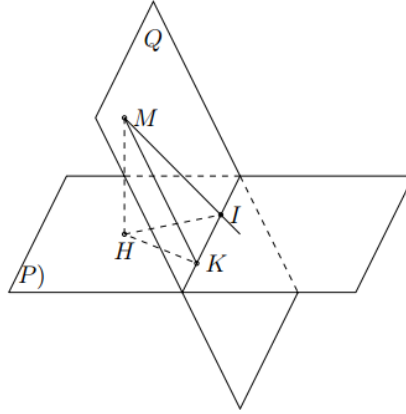
DẠNG 3

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN GÓC

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau. Lập phương trình của mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học



Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P) và lấy điểm $M \in d, M \neq I$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên (P) và giao tuyến Δ của (P) và (Q) .

Đặt ϕ là góc giữa (P) và (Q) , ta có $\phi = \angle MKH$, do đó $\tan \phi = \frac{HM}{HK} \geq \frac{HM}{HI}$

Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (MHI) , nên (Q) đi qua M và nhận

$[[n_P, u_d], u_d]$ làm VTPT.

Cách 2: Phương pháp đại số

Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

- Gọi $n_Q = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là một VTPT của mặt phẳng (Q) .
- Khi đó $n_Q \cdot u_d = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).

- Gọi ϕ là góc giữa (P) và (Q) , ta có:
$$\cos \phi = \frac{|n \cdot n_P|}{|n| |n_P|} = f(t)$$

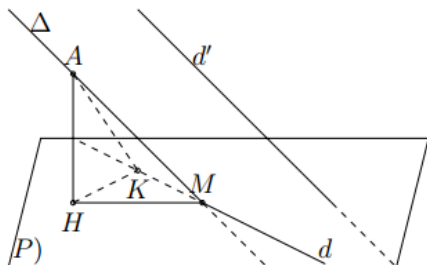
với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Chú ý: Để tìm vector pháp tuyến n_Q của mặt phẳng (Q) đơn giản hơn thì nên gọi $n_Q = (1; b; c)$.

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất.

Phương pháp giải

Cách 1: Phương pháp hình học



- Trên đường thẳng d , lấy điểm M và dựng đường thẳng Δ đi qua M song song với d' . Khi đó góc giữa Δ và (P) chính là góc giữa d' và (P) .
- Trên đường thẳng Δ , lấy điểm A . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d , ϕ là góc giữa Δ và (P) .

Khi đó $\phi = \angle AMH$ và $\cos \phi = \frac{HM}{AM} \geq \frac{KM}{AM}$

Suy ra (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (AMK) . Do đó (P) đi qua M và nhận $(u_d \wedge u_{d'}) \wedge u_d$ làm VTPT.

Cách 2: Phương pháp đại số

Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

- Gọi $n_p = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là một VTPT của mặt phẳng (P) .
- Khi đó $n_p \cdot u_d = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).

$$\sin \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}_{d'}|}{|\vec{n}| |\vec{u}_{d'}|} = f(t)$$

- Gọi ϕ là góc giữa (P) và d' , ta có

với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Chú ý: Để tìm vector pháp tuyến n_p của mặt phẳng (P) đơn giản hơn thì nên gọi $n_p = (1; b; c)$.

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{2-z}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng $(Q): 2x - y - 2z - 2 = 0$ một góc có số đo nhỏ nhất. Điểm $A(1; 2; 3)$ cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng:

- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{7\sqrt{11}}{11}$. D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 74. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ sao cho góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (Q) là

- A. $x - 2y + z = 0$. B. $x + 22y + 10z = 0$. C. $x - 2y - z = 0$. D. $x + 10y - 22z = 0$.

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 2 = 0$. (Q) là mặt phẳng chứa d và tạo với mp (P) một góc nhỏ nhất. Gọi $\vec{n}_Q = (a; b; 1)$ là một vectơ pháp tuyến của (Q) . Đẳng thức nào **đúng**?

- A. $a - b = -1$. B. $a + b = -2$. C. $a - b = 1$. D. $a + b = 0$.

Câu 76. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$ và tạo với trục Oy góc có số đo lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P) ?

- A. $E(-3; 0; 4)$. B. $M(3; 0; 2)$. C. $N(-1; -2; -1)$. D. $F(1; 2; 1)$.