



Chương

Bài 1. ĐƠN ĐIỆU & CỰC TRỊ CỦA HÀM

A

Lý thuyết

1. Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số



Định nghĩa:

Kí hiệu K là khoảng; đoạn; nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K .

Hàm số $y = f(x)$

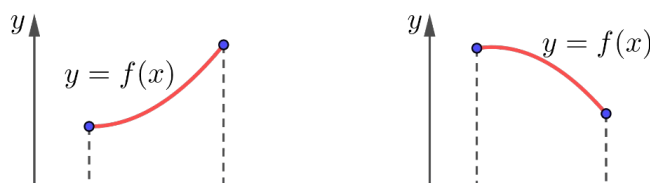
- Gọi là *đồng biến* trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.



Chú ý

» Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị đi lên từ trái sang phải (Hình 1a).

» Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị đi xuống từ trái sang phải (Hình 1b).



2. Tính đơn điệu của hàm số



Định lý:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K .



Chú ý

» Định lý vẫn đúng trong trường hợp $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm trong K .



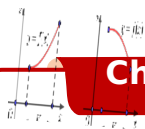
3. Khái niệm cực trị của hàm số



Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- $\exists h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .
- $\exists h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .



Chú ý

» Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại** của hàm số $f(x)$.

Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CD} hay y_{CD} .

Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** của đồ thị hàm số.

» Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực tiểu** của hàm số $f(x)$.

4. Cách tìm cực trị của hàm số



Định lý:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

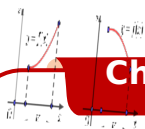
» Định lý trên được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:

x	a	x_0	b
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

$f(x_0)$
Cực tiểu

x	a	x_0	b
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

$f(x_0)$
Cực đại



Chú ý

» Từ định lí trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y=f(x)$ như sau:

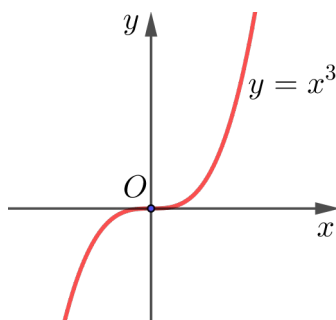
(1) Tìm tập xác định của hàm số.

(2) Tính $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không tồn tại.

(3) Lập bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

» Nếu $f'(x_0)=0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.

Chẳng hạn, hàm số $f(x)=x^3$ có $\begin{cases} f'(x)=3x^2 \\ f'(0)=0 \end{cases}$, nhưng $x=0$ không phải là điểm cực trị của hàm số.





Các dạng bài tập

Dạng 1. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi một công thức



Phương pháp

- » **Bước 1:** Tìm tập xác định D của hàm số.
- » **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1; x_2; \dots; x_n\} \in D$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
- » **Bước 3:** Sắp xếp các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ theo thứ tự tăng dần. Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.
- » **Bước 4:** Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.



Ví dụ 1.1.

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 6$.

👉 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.2.

Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

👉 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.3.

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4}$.

👉 **Lời giải**



Xét tính đơn điệu của hàm số

$$y = \log_3 (x^2 - 2x)$$

 **Lời giải**

[illegible]



▮ Dạng 2. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi đồ thị - bảng biến thiên



Phương

- » Với đồ thị hàm số, quan sát: hướng lên - xuống của *đường cong* (chiều từ trái sang phải).
- » Với bảng biến thiên, quan sát: hướng lên - xuống của *mũi tên* (chiều từ trái sang phải).



Ví dụ 2.1.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	-1	-2	$+\infty$	

Vết tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$

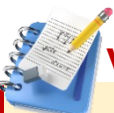
👉 Lời giải

.....

.....

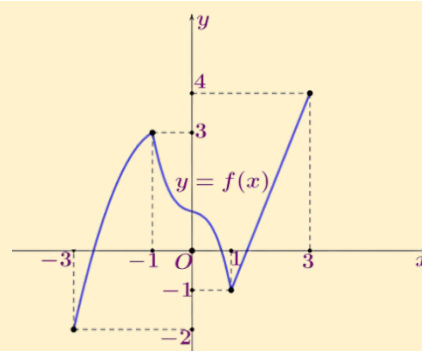
.....

.....



Ví dụ 2.2.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ và có đồ thị như hình bên. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$.



👉 Lời giải

.....

.....

.....

.....

» **Bước 1:** Tìm tập xác định D của hàm số.

» **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1; x_2; \dots; x_n\} \in D$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không tồn tại.

» **Bước 3:** Sắp xếp các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ theo thứ tự tăng dần.
Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

Tìm cực trị của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

 Lời giải

[illegible]

Tìm cực trị của hàm số $y = -x^4 + 2x^3 - 2x - 1$

 Lời giải

[illegible]



Ví dụ 3.3.

Tìm cực trị của hàm số

$$y = \frac{x+2}{3x-1}$$

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.4.

Tìm cực trị của hàm số

$$y = \frac{x^2 - 4x + 4}{1 - x}$$

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.5.

Tìm cực trị của hàm số

$$f(x) = 2^{x^2 - 5x}$$

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



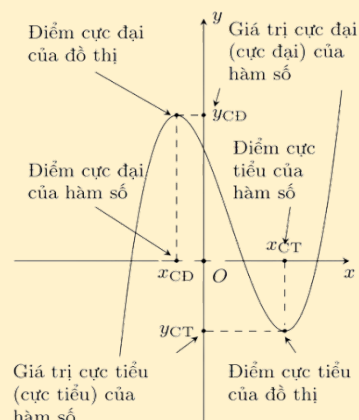
Dạng 4. Xác định cực trị của hàm số cho bởi bảng biến thiên - đồ thị



Phương

Nhận xét:

» Hàm số $f(x)$ có cực trị	y' đổi dấu
không cực trị	y' không đổi dấu
chỉ có 1 cực trị	y' đổi dấu 1 lần
có 2 cực trị	y' đổi dấu 2 lần
có 3 cực trị	y' đổi dấu 3 lần

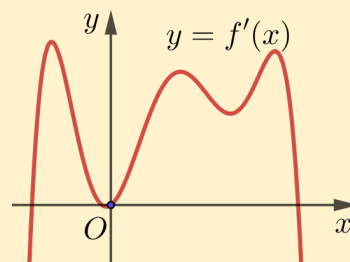


» Đối với một hàm số bất kì, hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm x_0 mà tại đó $f'(x_0) = 0$



Ví dụ 4.1.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbf{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ bao nhiêu có điểm cực tiểu và điểm cực đại?



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.2.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	4	$+\infty$	

Hàm số $y = f(x)$ bao nhiêu có điểm cực tiểu và điểm cực đại?

Lời giải

.....



Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-4	$+\infty$	

 Lời giải



▮ Dạng 5. Toán thực tế áp dụng tính đơn điệu của hàm số



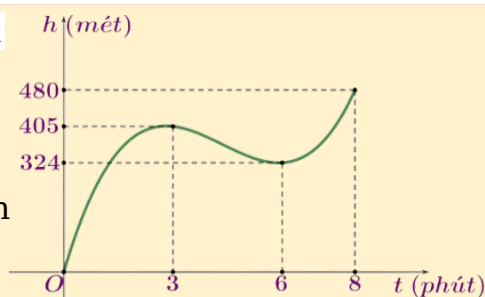
Phương

- » Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị *tốc độ tức thời* của chuyển động tại t_0 .
- » Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là *gia tốc tức thời* tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$.



Ví dụ 5.1.

Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn như hình bên. Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu



👉 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 5.2.

Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t (giây) được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận

👉 Lời giải

.....

.....

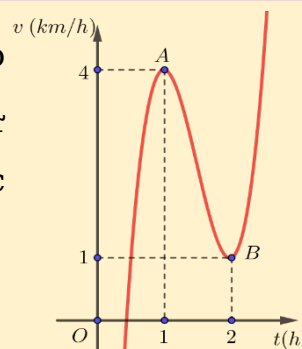
.....

.....

.....



Một vật chuyển động với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của hàm số dạng hàm bậc ba như hình bên. Biết rằng tại thời điểm $t_1 = 1\text{ h}$ vật có vận tốc



 **Lời giải**

[illegible]



Dạng 6. Bài toán liên quan tính đơn điệu có chứa tham số



Phương pháp

(1) Tìm tham số m để hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên tập xác định

» **Bước 1:**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ Tính đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

» **Bước 2:**

Điều kiện để hàm đơn điệu:

Để y **đồng biến** trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$$

Để y **nghịch biến** trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y' \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$$

(2) Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định

» **Bước 1:**

Tập xác định:

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$$

Tính

$$y' = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$$

» **Bước 2:**

Điều kiện để hàm đơn điệu:

Để y **đồng biến** trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0 \Leftrightarrow ad - bc > 0$



Ví dụ 6.1.

Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (3m+2)x - 2$. Xác định điều kiện của tham số m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$

👉 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 6.2.

Cho hàm số $y = \frac{2x - m}{x - 1}$. Xác định điều kiện của tham số m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

👉 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....



▮ Dạng 7. Bài toán hàm hợp



Phương

Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(u(x))$ từ bảng biến thiên/đồ thị của $f'(x)$

» **Bước 1:**

Tính

$$y' = u' \cdot f'(u) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \end{cases} (*)$$

» **Bước 2:**

Để giải $(*)$ ta tìm $f'(x) = 0$ (đồ thị cắt trục hoành).

Giả sử $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ M \\ x = b \end{cases} \rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = a \\ M \\ u = b \end{cases}$ nghiệm của $(*)$.

$$y' = u' \cdot f'(u) \Rightarrow$$



Ví dụ 7.1.

Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới. Xác định các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(1 - 2x)$.

x	$-\infty$	-3	-2	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

🔑 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

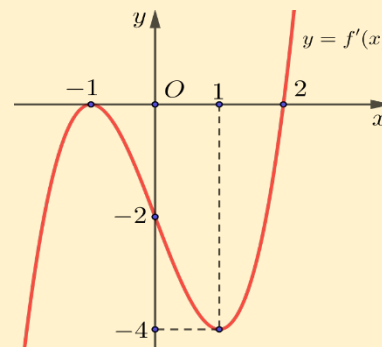
.....

.....



Ví dụ 7.2.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xác định các khoảng nghịch biến của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$.



🔑 **Lời giải**

.....

.....



Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x-4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

 **Lời giải**



Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên I và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Thí dụ: hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

 **Lời giải**

[illegible]



Luyện tập

A. Câu hỏi - Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$. B. Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. D. Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

» Câu 2. Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. C. $(0; +\infty)$. D. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

» Câu 3. Hàm số $y = \frac{5-2x}{x+3}$ nghịch biến trên

- A. $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. B. $\mathbb{R}$. C. $(-\infty; -3)$. D. $(3; +\infty)$.

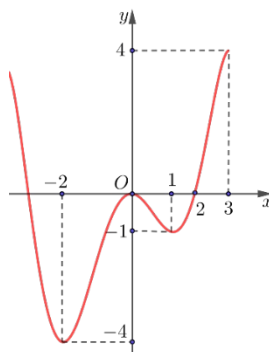
» Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-1	1	-1	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-3; 0)$. B. $(-3; 3)$. C. $(0; 3)$. D. $(-\infty; -3)$.

» Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

- A. $(-4; 0)$. B. $(2; 3)$. C. $(-1; 1)$. D. $(1; 3)$.

» Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-2	$+\infty$	

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = -2$. B. $x = 2$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

» Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
y'	$+$		$+$	0	$-$
y		$+\infty$		4	
	$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
 B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
 C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
 D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $(3; +\infty)$.

» Câu 8. Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

- A. $x = 1$. B. $(3; 1)$. C. $x = 3$. D. $\left(1; \frac{7}{3}\right)$.

» Câu 9. Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

- A. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ B. $y = \frac{2x - 2}{x + 1}$ C. $y = x^2 - 2x + 1$ D. $y = -x^3 + x + 1$

» Câu 10. Hàm số $y = \frac{2x + 3}{x + 1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1 B. 0 C. 2 D. 3

» Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-4	$+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 0 B. 2 C. -4 D. 3

» Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

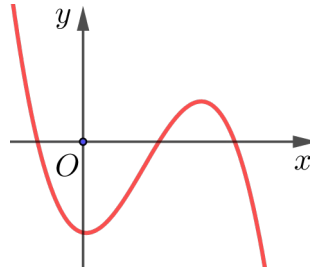


x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-2	$+\infty$	

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A.** $x = -1$ **B.** $x = -2$ **C.** $x = 2$ **D.** $x = 1$

» **Câu 13.** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số này là

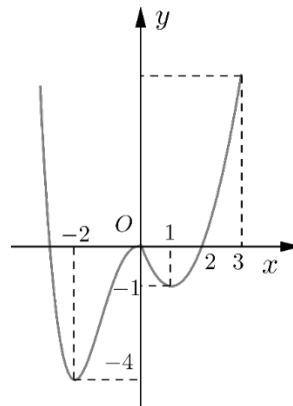


- A.** 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

» **Câu 14.** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A.** $y = \frac{x-1}{x-2}$ **B.** $y = -x^3 - 3x$ **C.** $y = x^3 + x$ **D.** $y = \frac{x+1}{x+3}$

» **Câu 15.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

- A.** $(-2; 1)$ **B.** $(-2; -1)$ **C.** $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ **D.** $(1; 3)$

» **Câu 16.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{I} \setminus \{0\}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-\infty; -1)$ **B.** $(2; +\infty)$ **C.** $(1; 2)$ **D.** $(-1; 2)$

» **Câu 17.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x+1$ với mọi $x \in \mathbf{I}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-1; +\infty)$ **B.** $(1; +\infty)$ **C.** $(-\infty; -1)$ **D.** $(-\infty; 1)$



- » **Câu 18.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^2(1-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?
 A. $(1; 2)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(-\infty; 1)$.
- » **Câu 19.** Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?
 A. $(-\infty; 0)$. B. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. C. $(0; +\infty)$. D. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
- » **Câu 20.** Hàm số $y = \frac{2}{x^2 + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?
 A. $(-\infty; +\infty)$ B. $(0; +\infty)$ C. $(-\infty; 0)$ D. $(-1; 1)$
- » **Câu 21.** Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?
 A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$
- » **Câu 22.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?
 A. $(-\infty; 1)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(1; 3)$. D. $(3; +\infty)$.
- » **Câu 23.** Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?
 A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$
- » **Câu 24.** Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Trong khoảng thời gian nào khinh khí cầu giảm dần độ cao?
 A. $\left(1; \frac{5}{2}\right)$ B. $(0; 3)$ C. $(3; 6)$ D. $\left(\frac{7}{2}; 8\right)$
- » **Câu 25.** Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 1$. Có bao nhiêu khẳng định đúng trong các khẳng định sau?
 (1) Điểm cực đại của hàm số là $x = -1$.
 (2) Điểm cực tiểu của hàm số là $x = 4$.
 (3) Giá trị cực đại của hàm số là $y = 14$.
 (4) Giá trị cực tiểu của hàm số là $y = -111$.
 A. 3 B. 1 C. 4 D. 2



» **Câu 26.** Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$.

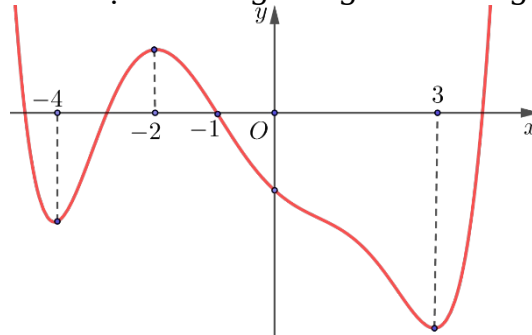
A. $x_{CD} = -3, x_{CT} = 1$.

B. $x_{CT} = -3, x_{CD} = 1$.

C. $x_{CD} = -5, x_{CT} = 3$.

D. $x_{CT} = -5, x_{CD} = 3$.

» **Câu 27.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như trong hình dưới đây.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Điểm cực đại của hàm số là $x = -4$. **B.** Điểm cực đại của hàm số là $x = -2$.

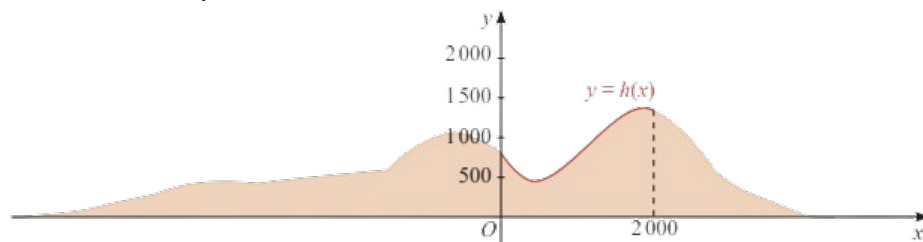
C. Điểm cực tiểu của hàm số là $x = -2$. **D.** Điểm cực đại của hàm số là $x = 3$.

» **Câu 28.** Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số

$$y = h(x) = -\frac{1}{1320000}x^3 + \frac{9}{3520}x^2 - \frac{81}{44}x + 840$$

với $0 \leq x \leq 2000$. Tìm tọa độ các đỉnh của

lát cắt dãy núi trên đoạn $[0; 2000]$.



A. $\left(1800; \frac{7365}{16}\right)$ và $\left(450; \frac{15315}{11}\right)$.

B. $\left(480; \frac{1515}{16}\right)$ và $\left(450; \frac{7365}{16}\right)$.

C. $\left(480; \frac{1515}{16}\right)$ và $\left(1750; \frac{7561}{16}\right)$.

D. $\left(1800; \frac{15315}{11}\right)$ và $\left(450; \frac{7365}{16}\right)$.

» **Câu 29.** Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = 2x + 1 - \sqrt{2x^2 - 8}$.

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(-2; 2)$.

» **Câu 30.** Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m+2)x + 1$. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -2 \end{cases}$.

B. $-2 \leq m \leq -1$.

C. $-2 < m < -1$.

D. $\begin{cases} m > -1 \\ m < -2 \end{cases}$.



- » **Câu 31.** Tìm điều kiện của tham số thực m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$
A. $m \geq 2$. **B.** $m < 2$. **C.** $m < 0$. **D.** $m \geq 0$.
- » **Câu 32.** Cho hàm số $y = \frac{mx + 4m}{x + m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .
A. 4 **B.** Vô số **C.** 3 **D.** 5
- » **Câu 33.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?
A. 2 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 3
- » **Câu 34.** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{x+4}{2x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 4)$.
A. Vô số. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.
- » **Câu 35.** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (1-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là
A. $(-\infty; -2)$ **B.** $(-\infty; 1)$ **C.** $(-\infty; -2]$ **D.** $(-\infty; 1]$
- » **Câu 36.** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ là
A. $\left[-\infty; -\frac{3}{4}\right]$ **B.** $[0; +\infty)$ **C.** $(-\infty; 0]$ **D.** $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$
- » **Câu 37.** Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \frac{(m+1)x-2}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.
- » **Câu 38.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?
A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.
- » **Câu 39.** Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $v(t) = x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t . Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?
A. $t \in (0; 2)$ **B.** $t \in (0; 3)$ **C.** $t = 2$ **D.** $t \in (2; +\infty)$
- » **Câu 40.** Cho hàm số $y = x - 2\sqrt{x^2 + 4}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. Hàm số có giá trị cực đại bằng $-2\sqrt{3}$.

B. Hàm số đạt cực

đại tại $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng

$-\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

» **Câu 41.** Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Vậy hộ này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét để thu được lợi nhuận tối đa?

A. 6 mét.

B. 10 mét.

C. 18 mét.

D. 12 mét.

» **Câu 42.** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(3 - 2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 2)$.

B. $(2; 3)$.

C. $(-\infty; -3)$.

D. $(3; 4)$.

» **Câu 43.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; -1)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(-1; 0)$.

» **Câu 44.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau.

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(2 - 3x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(2; 3)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(1; 3)$.

B. Câu hỏi - Trả lời Đúng/sai

» **Câu 45.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$+$	0	$-$
y						

The graph shows a function $y=f(x)$ with a local maximum at $x=-3$ (where $y=0$) and a local minimum at $x=-2$ (where $y=5$). The function approaches $-\infty$ as $x \rightarrow -\infty$ and $x \rightarrow +\infty$.

Khi đó:



	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-3; -2)$		
(b)	Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$		
(c)	Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$		
(d)	Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$		

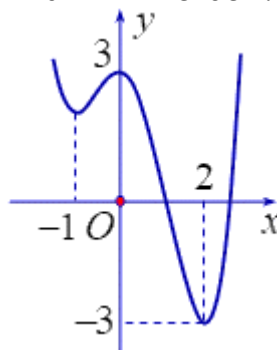
» Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$.		
(b)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.		
(c)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.		
(d)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.		

» Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Khi đó

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3		
(b)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 0)$		
(c)	Đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$		
(d)	Nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$		

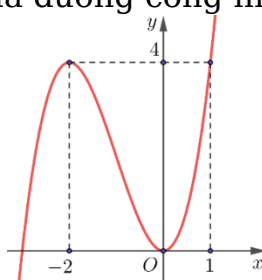
» Câu 48. Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2$.

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
--	---------	-----------	-----



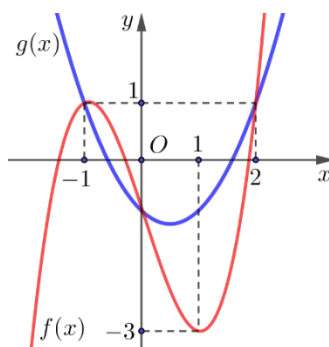
(a))	Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$		
(b))	Hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$		
(c))	Hàm số đồng biến trên $(0; 2)$		
(d))	Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$		

» Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như trong hình dưới đây.



	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a))	Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$.		
(b))	Hàm số đồng biến trên $(0; 1)$.		
(c))	Hàm số nghịch biến trên $(-2; 1)$.		
(d))	Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.		

» Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị là các đường cong như trong hình dưới đây.



	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a))	Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0 > 1$.		
(b))	Hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực trị.		
(c))	Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu là $x = 1$.		
(d))	Giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$ là $y_0 = 1$.		

» Câu 51. Cho hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

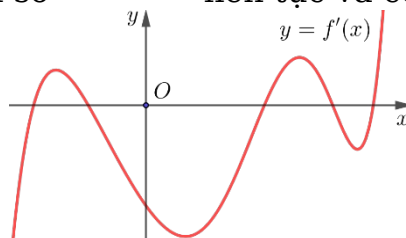


	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	Hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$.		
(b)	Hàm số nghịch biến trên $(-1;0)$ và $(0;1)$.		
(c)	Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.		
(d)	Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.		

» Câu 52. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$ có đồ thị (C).

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.		
(b)	Giá trị cực tiểu của hàm số là $x=3$.		
(c)	Điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là $x=1$.		
(d)	Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $\frac{\sqrt{13}}{13}$.		

» Câu 53. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ liên tục và có đồ thị trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ.



	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	Hàm số $y=f(x)$ đã cho có 4 điểm cực trị.		
(b)	Hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực tiểu.		
(c)	Hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực đại.		
(d)	Hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực đại dương.		

» Câu 54. Cho hàm số $y=x^3+(m+1)x^2+3x+2$ (tham số m). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	Đạo hàm của hàm số là $y'=3x^2+2(m+1)x+3$		
(b)	Khi $m=-1$ thì hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$		
(c)	Có 3 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số		



)	$y = x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$		
(d)	Có 6 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$		

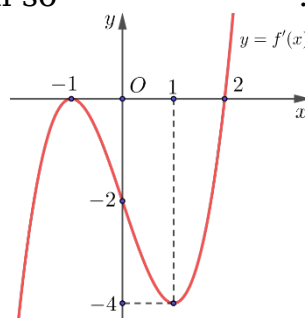
» Câu 55. Cho hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ (tham số m). Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi $m = 1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$		
(b)	Khi $m = 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$		
(c)	Khi $m = 3$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$		
(d)	Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ bằng 2		

» Câu 56. Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+m}$ (tham số m). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi $m = 1$ thì hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó		
(b)	Khi $m = 4$ thì hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó		
(c)	Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{x+3}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -6)$ là $(3; 6]$		
(d)	Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$ là $(3; 6]$		

» Câu 57. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.		



(b)	Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.		
(c)	Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.		
(d)	Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.		

» Câu 58. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Đặt $g(x) = 3f'(x) + 4$.

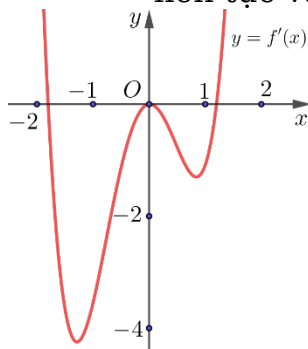
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị.		
(b)	Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực đại.		
(c)	Hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.		
(d)	Điểm $x_0 = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số $y = g(x)$.		

C. Câu hỏi - Trả lời ngắn

» Câu 59. Hãy xác định số khoảng đồng biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$?

👉 Điền đáp số:

» Câu 60. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục và có đồ thị trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ



Giả sử hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$. Trong khoảng $(a; b)$ có bao nhiêu giá trị nguyên nhỏ hơn 2024.

👉 Điền đáp số:

» Câu 61. Cho hàm số $f'(x) = x(x^2 - 1)(x + 1)^3$. Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

👉 Điền đáp số:

» Câu 62. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0	$+$

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

👉 Điền đáp số:



» **Câu 63.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

📌 **Điền đáp số:**

» **Câu 64.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

📌 **Điền đáp số:**

» **Câu 65.** Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m + 3}{x + m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tìm số phần tử của S .

📌 **Điền đáp số:**

» **Câu 66.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

📌 **Điền đáp số:**

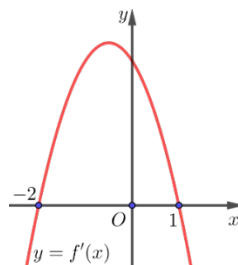
» **Câu 67.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2}{2} - mx + \ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

📌 **Điền đáp số:**

» **Câu 68.** Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x$. Đặt $g(x) = f(f(x)) + 1$. Giả sử hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ với $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Tính $a + b\sqrt{2}$.

📌 **Điền đáp số:**

» **Câu 69.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Giả sử hàm số $g(x) = 2f(x^2 - 3x) + 5$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ với $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Tính $2a + 3b$.

📌 **Điền đáp số:**

» **Câu 70.** Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh



(đơn vị là trăm người) và t là thời gian (tuần). Gọi $(a; b)$ là khoảng thời gian lâu nhất mà số người bị nhiễm bệnh tăng lên. Tính giá trị $P = 2a^2 - b^2$.

📌 **Điền đáp số:**

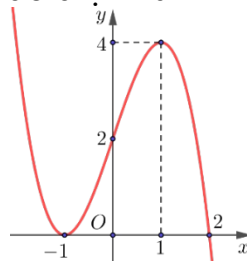
» **Câu 71.** Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = e^{2x} - 5e^x + 2x + 1$. Tính diện tích của tam giác OAB . Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

📌 **Điền đáp số:**

» **Câu 72.** Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = 2\ln(x^2 + 1) - x^2 - 1$. Tính $P = AB^2 + BC^2 + CA^2$. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

📌 **Điền đáp số:**

» **Câu 73.** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(\ln(e^2 + x^2) - 1)$.

📌 **Điền đáp số:**

» **Câu 74.** Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi

theo thời gian bởi công thức: $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2}$ (con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi thời gian bằng bao nhiêu để số lượng vi khuẩn đạt cực đại?

📌 **Điền đáp số:**

» **Câu 75.** Giả sử tổng chi phí sản xuất x ($0 \leq x \leq 50$) đơn vị sản phẩm A mỗi ngày tại một

nhà máy được cho bởi công thức $C(x) = \frac{x^2}{4} + 3x + 400$ (nghìn đồng) và toàn bộ

chúng được bán hết với giá $(900 - 6x)$ nghìn đồng một sản phẩm. Tìm mức sản lượng (đó là số lượng sản phẩm được sản xuất) để chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm là đạt cực tiểu.

📌 **Điền đáp số:**

-----Hết-----