PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 THI TN THPT 2021 BGD

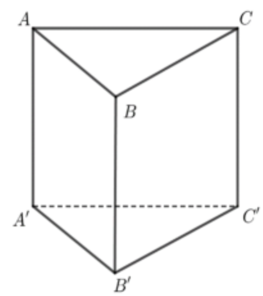
MÔN: TOÁN

THỜI GIAN: 90 PHÚT

TỔ 27

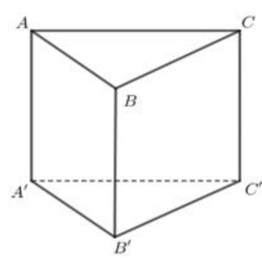
ĐỀ BÀI

Câu 1. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 36)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$ (tham khảo hình bên). Góc giữa AB' và BC' bằng



A. $30°$ **B.** $60°$ **C.** $45°$ **D.** $120°$

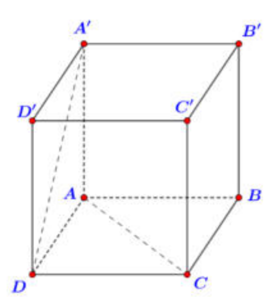
Câu 2. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 36)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{3}$ (tham khảo hình bên).



Góc giữa hai đường thẳng AB' và CC' bằng

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Câu 3. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 36)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng



A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Câu 4. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 37)** Với mọi số thực a, b, c thỏa mãn $\log_3 a-2\log_3 b+3\log_{27}(c+1)=1$, khẳng định đúng là

A. $a-2b+c=0$.
B. $a-2b+(c+1)^3=3$.
C. $a(c+1)=3b^2$.
D. $a(c+1)=9b^2$.

Câu 5. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 37)** Với mọi số thực a, b thỏa mãn $3\log_2 a+2\log_2 b=3$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a^3b^2=8$.
B. $a^3b^2=6$.
C. $3a+2b=8$.
D. $3a+2b=6$.

Câu 6. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 37)** Cho các số thực dương a, b, x thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x=\frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} a-\frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}} b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{5}}$.
B. $x=\frac{2}{3}a-\frac{1}{5}b$.
C. $x=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{-1}{5}}$.
D. $x=a^{\frac{3}{2}}b^{-5}$.

Câu 7. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 38)** Nếu $\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x=2$ thì $\int_{-1}^{3}\left[2x-f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 6.
B. 8.
C. 10.
D. 12.

Câu 8. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 38)** Nếu $\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x=-2$ thì $\int_{1}^{3}\left[2f(x)-3x^2+1\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -30.
B. -28.
C. -26.
D. -27.

Câu 9. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 38)** Cho $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=5$. Khi đó $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+2\sin x\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=7$.
B. $I=5+\frac{\pi}{2}$.
C. $I=3$.
D. $I=5+\pi$.

Câu 10. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 38)** Cho $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x=-1$. Khi đó $I=\int_{-1}^{2}\left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\frac{17}{2}$.
B. $I=\frac{7}{2}$.
C. $I=\frac{5}{2}$.
D. $I=\frac{11}{2}$.

Câu 11. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 39)** Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}3x^2-2x-1 & \text{khi } x\geq 2\\ 2x+3 & \text{khi } x<2\end{cases}$.

Gọi F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(1\right)=4$. Giá trị của $2F\left(0\right)-3F\left(3\right)$ bằng

A. 65. **B.** 57. **C.** -61. **D.** -69.

Câu 12. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 39)** Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}2x^2-3x+1 & \text{khi } x>0\\ 1-x^2 & \text{khi } x\leq 0\end{cases}$.

Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(-2\right)=\dfrac{5}{3}$. Giá trị của $F\left(-4\right)+4F\left(3\right)$ nằm trong khoảng nào?

A. $\left(52;53\right)$. **B.** $\left(53;54\right)$. **C.** $\left(54;55\right)$. **D.** $\left(55;56\right)$.

Câu 13. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 39)** Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}3x^2-2x-1 & \text{khi } x\leq 3\\ -4x+32 & \text{khi } x>3\end{cases}$.

Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(1\right)=4$. Giá trị của $3F\left(-2\right)-F\left(4\right)$ bằng

A. -69. **B.** -25. **C.** -45. **D.** -53.

Câu 14. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 40)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(8^x-2^{x^3+2}\right).\left[\log_{\sqrt{3}}\left(2x+21\right)-4\right]\geq 0$?

A. 10. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 15. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 40)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(9^{x^2}-3^x.9^{x+1}\right)\left(\log_2\left(2x-18\right)-5\right)\leq 0$?

A. 1 **B.** Vô số. **C.** 17. **D.** 16.

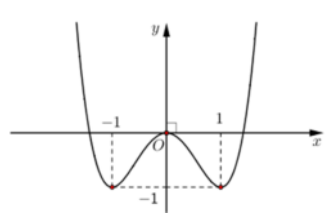
Câu 16. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 40)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\sqrt{\log_3\left(x+25\right)-2}.\left(2^{x^3}-2^{-x}.4^{3-2x}\right)<0$?

A. 1 **B.** 18. **C.** 16. **D.** 17.

Câu 17. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 40)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(9^{x^2}-27^x\right)\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(x+2022\right)+1\right]\geq 0$?

A. 2020. **B.** 2022. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 18. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 41)** Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2f\left(f\left(x\right)\right)+1=0$ là

A. 9. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 19. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 41)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(4x^2-2x^4\right)=1$ là

A. 9. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 12.

Câu 20. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 41)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=2$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 21. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 42)** Một hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O và $SO=a$. Một mặt phẳng $\left(P\right)$ qua đỉnh S cắt đường tròn $\left(O\right)$ theo dây cung AB sao cho góc $\widehat{AOB}=90°$ và cách O một khoảng $\dfrac{a}{2}$. Diện tích xung quanh hình nón bằng

A. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{10}}{6}$. **B.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{10}}{3}$. **D.** $\dfrac{2\pi a^2\sqrt{10}}{3}$.

Câu 22. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 42)** Cắt hình nón $\left(N\right)$ bởi mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ đi qua đỉnh và có khoảng cách đến tâm O của đường tròn đáy là $\dfrac{3a}{2}$ ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $4a$. Thể tích của $\left(N\right)$ bằng

A. $\dfrac{7\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{13}\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{13}\pi a^3}{3}$. **D.** $7\pi a^3$.

Câu 23. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 42)** Cho hình trụ đứng có hai đáy là hai đường tròn tâm O và tâm O', bán kính bằng a, chiều cao hình trụ bằng $2a$. Mặt phẳng đi qua trung điểm OO' và tạo với OO' một góc $30°$, cắt đường tròn đáy tâm O theo dây cung AB. Độ dài đoạn AB là

A. a. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}a$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Câu 24. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 42)** Hình nón (N) có đỉnh S, tâm đường tròn đáy là O, góc ở đỉnh bằng $120°$. Một mặt phẳng qua S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N)

A. $S_{xq}=36\sqrt{3}\pi$. **B.** $S_{xq}=27\sqrt{3}\pi$. **C.** $S_{xq}=18\sqrt{3}\pi$. **D.** $S_{xq}=9\sqrt{3}\pi$.

Câu 25. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 43)** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m-1)z+m^2-5m=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|^3=3|\overline{z_0}|+2$. Tổng các phần tử của tập S là

A. 8. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 26. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 43)** Trong tập số phức, cho phương trình $2z^2+2(m-1)z+m^2-3m-2=0,\ m\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong đoạn $[0;2021]$ để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $z_1;z_2$ thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$?

A. 2016. **B.** 202 **C.** 202 **D.** 2017.

Câu 27. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 44)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa $|iz_1-1|=1$ và $|\overline{z_2}+i|=2$. Khi biểu thức $P=|2z_1+3z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z_1-2z_2|$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 28. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 44)** Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=2$, $|iw-2+5i|=1$. Khi $|z^2-wz-4|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z|+|w|$ bằng

A. $2+\sqrt{5}$. **B.** $2(1+\sqrt{5})$. **C.** $1+\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{5}-2$.

Câu 29. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 44)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3i+5|=2$ và $|iz_2-2-i|=6$. Khi $T=|2iz_1+z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z_1+z_2|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5629}}{13}$. **B.** 13. **C.** 26. **D.** $\dfrac{\sqrt{2259}}{13}$.

Câu 30. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 44)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3-i|=\sqrt{5}$ và $|z_2-1+i|=|\overline{z_2}-5+i|$. Khi $T=|z_1-iz_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì phần thực của z_1+5z_2 bằng

A. 19. **B.** 21. **C.** -18. **D.** 5.

Câu 31. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 45)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $(P):x+y+z-5=0$ là đường thẳng có phương trình

A. $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}$.
B. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+2}{1}$.
C. $\frac{x-2}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{-1}$.
D. $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z+2}{7}$.

Câu 32. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 45)** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=-1+2t\end{cases}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (Oxz) là đường thẳng có phương trình

A. $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$.
B. $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=-1+2t\end{cases}$.
C. $\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=0\end{cases}$.
D. $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=-1+2t\end{cases}$.

Câu 33. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 45)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{-2}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $(P):2x-2y+z-3=0$ là đường thẳng có phương trình

A. $\frac{x+2}{17}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-5}{14}$.
B. $\frac{x+2}{-17}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-5}{-14}$.
C. $\frac{x-2}{17}=\frac{y-1}{10}=\frac{z+5}{-14}$.
D. $\frac{x+2}{-17}=\frac{y+1}{-10}=\frac{z-5}{14}$.

Câu 34. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 45)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $(P):x-y+2z+1=0$ là đường thẳng có phương trình

A. $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-1}{1}$.
B. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-5}{1}$.
C. $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-1}{-3}$.
D. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-5}{-3}$.

Câu 35. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 46)** Cho hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị (C), đường thẳng $y=mx+n$ là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=-1$ và cắt (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 (với a, b, c, m và n là các số thực). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x^2-1)2^{f(x)-mx-n}$ và trục hoành bằng

A. $\frac{15}{16.\ln 2}$.
B. $\frac{15}{16}$.
C. $\frac{5}{16}\ln 2$.
D. $\frac{5}{16.\ln 2}$.

Câu 36. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 46)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right).\mathrm{e}^{-x}$ có hai giá trị cực trị là 5 và -3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ và $h\left(x\right)=\left(2ax+b\right).\mathrm{e}^{-x}$ bằng

A. 2. **B.** 8. **C.** $\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^{-3}$. **D.** $\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^3$.

Câu 37. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 46)** Cho hàm số $f\left(x\right)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)+f'\left(x\right)+f''\left(x\right)+f'''\left(x\right)$ có ba giá trị cực trị là -14; 4; 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)+24}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 10$. **C.** $\ln 3$. **D.** $\ln 5$.

Câu 38. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 46)** Cho hàm số $f\left(x\right)=3x^3+bx^2+cx+d$ với $b,c,d\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)+f'\left(x\right)+f''\left(x\right)$ có hai giá trị cực trị là $-12;\,6$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)+18}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 6$. **C.** $2\ln 2$. **D.** $\ln 5$.

Câu 39. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 46)** Cho hai hàm số $f\left(x\right)=x^4+ax^2+bx+1$ và $g\left(x\right)=cx^2+dx+3$ $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\dfrac{45}{5}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{99}{10}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 40. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 47)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $2\le x\le 2021$ và $2^y-\log_2\left(x+2^{y-1}\right)=2x-y$?

A. 2020. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 2019.

Câu 41. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 47)** Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x\in\left(\dfrac{1}{2};5\right)$ thỏa mãn $8^{2x^2+xy}=\left(1+xy\right).8^{4x}$?

A. 7. **B.** **C.** 6. **D.** 5.

Câu 42. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 47)** Có bao nhiêu số nguyên $y>5$ để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_{15}\left(4x+3y+1\right)=\log_6\left(x^2-2x+y^2\right)$?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 43. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 48)** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=2a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm cạnh AD, góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BI\right)$ và $\left(ABCD\right)$ bằng $60°$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\sqrt{3}\,a^3$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}\,a^3$. **D.** $3\sqrt{3}\,a^3$.

Câu 44. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 48)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a, góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BM\right)$ và $\left(ABCD\right)$ bằng 60° với M là trung điểm CD. Thể tích khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{15}}{15}a^3$. **B.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}a^3$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a^3$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}a^3$.

Câu 45. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 48)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ tạo với đáy góc $30°$ và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Thể tích V của khối lăng trụ đã cho là

A. $64\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $16\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{3}$.

Câu 46. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 49)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;3;9)$, $B(2;3;4)$ và $C(2;15;9)$. Một mặt cầu (S) luôn đi qua A, B và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại D. Biết rằng khi CD đạt giá trị nhỏ nhất thì tọa độ tâm của mặt cầu (S) là $I(a;b;c)$. Khi đó $a-b+2c$ bằng

A. -13. **B.** 9. **C.** 2 **D.** 6.

Câu 47. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 49)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;1;1)$ và điểm $B(5;0;5)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng $(P): x+z-2=0$ sao cho $MN=2$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng

A. $3\sqrt{11}$. **B.** $\sqrt{21}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\sqrt{33}$.

Câu 48. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 49)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+15=0$. Gọi M là điểm di động trên (P), N là điểm thuộc tia OM sao cho $OM.ON=10$. Khoảng cách nhỏ nhất từ N đến mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu?

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 49. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 50)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-7)\left(x^2-9\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|ax^3+bx\right|+2m+3\right)$ với $a.b>0$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 50. **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 50)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(|6x-5|\right)+2021+m\right|$ có 3 điểm cực đại?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

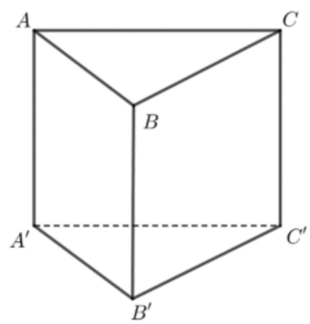
HẾT

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7		8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	A	D	C	A	C	A		B	A	A	D	A	D	C	D	C	D	C	B	D	C	D	D	C	B
26	27	28	29	30	31	32		33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
D	D	B	A	B	D	D		D	A	D	B	C	C	C	B	C	B	D	D	D	D	D	B	A	B

LỜI GIẢI CHI TIẾT

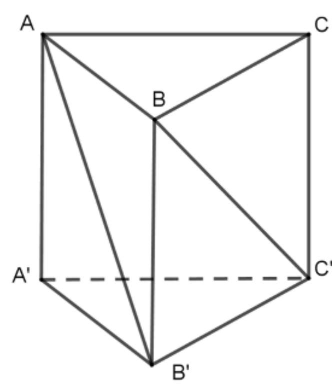
Câu 1. **[1H3-4.6-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 36)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$ (tham khảo hình bên). Góc giữa AB' và BC' bằng



A. 30° **B.** 60° **C.** 45° **D.** 120°

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Hường



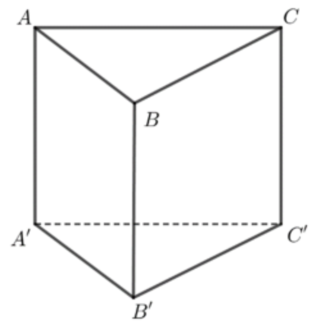
Ta có: $AB'=BC'=a\sqrt{3}$

$$\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}=\left(\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{A'B'}\right).\left(\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'}\right)=B'B^2+\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{B'C'}=2a^2-\frac{1}{2}a^2=\frac{3}{2}a^2.$$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC'}\right)=\frac{\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}}{AB'.BC'}=\frac{\frac{3}{2}a^2}{3a^2}=\frac{1}{2}$$

Vậy góc giữa AB' và BC' bằng 60°.

Câu 2. **[1H3-4.6-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 36)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{3}$ (tham khảo hình bên).

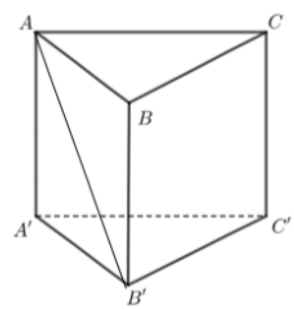


Góc giữa hai đường thẳng AB' và CC' bằng

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Lời giải

FB tác giả: Liễu Hoàng

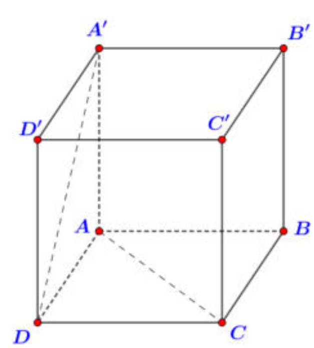


Ta có: $AA' // CC'$ nên góc giữa hai đường thẳng AB' và CC' là góc giữa hai đường thẳng AB' và AA' và bằng góc $\widehat{A'AB'}$ (do $\widehat{A'AB'}$ nhọn).

Tam giác $AA'B'$ vuông tại A' nên $\tan\widehat{A'AB'} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \widehat{A'AB'} = 30°$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng $30°$.

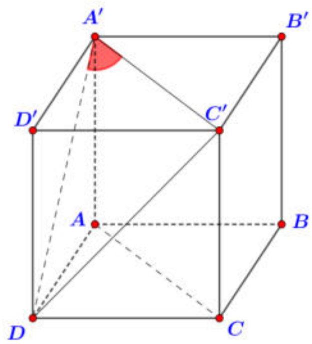
Câu 3. **[1H3-4.6-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 36)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng



A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải

FB tác giả: Đinh Ngọc



Ta có: $\widehat{(AC, A'D)} = \widehat{(A'C', A'D)} = \widehat{DA'C'} = 60°$.

Vì $A'D = A'C' = C'D$.

Câu 4. **[2D2-3.2-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 37)** Với mọi số thực a, b, c thỏa mãn $\log_3 a - 2\log_3 b + 3\log_{27}(c+1) = 1$, khẳng định đúng là

A. $a - 2b + c = 0$. **B.** $a - 2b + (c+1)^3 = 3$.

C. $a(c+1) = 3b^2$. **D.** $a(c+1) = 9b^2$.

Lời giải

FB tác giả: Hiếu Lưu

Ta có: $\log_3 a - 2\log_3 b + 3\log_{27}(c+1) = 1$

$\Leftrightarrow \log_3 a - \log_3 b^2 + 3\log_{3^3}(c+1) = 1$

$\Leftrightarrow \log_3 a + \log_3(c+1) = \log_3 3 + \log_3 b^2$

$\Leftrightarrow \log_3\left[a(c+1)\right] = \log_3\left(3b^2\right)$

$\Leftrightarrow a(c+1) = 3b^2$.

Câu 5. **[2D2-3.2-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 37)** Với mọi số thực a, b thỏa mãn $3\log_2 a + 2\log_2 b = 3$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a^3b^2 = 8$. **B.** $a^3b^2 = 6$. **C.** $3a + 2b = 8$. **D.** $3a + 2b = 6$.

Lời giải

FB tác giả: Trần Minh Hưng

Ta có: $3\log_2 a + 2\log_2 b = 3$

$\Leftrightarrow \log_2 a^3 + \log_2 b^2 = 3$

$\Leftrightarrow \log_2 a^3b^2 = 3$

$\Leftrightarrow a^3b^2 = 2^3$

$\Leftrightarrow a^3b^2 = 8$.

Câu 6. **[2D2-3.2-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 37)** Cho các số thực dương $a,\ b,\ x$ thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}} b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x = a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{5}}$. **B.** $x = \frac{2}{3}a - \frac{1}{5}b$. **C.** $x = a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{-1}{5}}$. **D.** $x = a^{\frac{3}{2}} b^{-5}$.

Lời giải

FB tác giả: Quang Trí

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} a^{\frac{2}{3}} + \log_{\frac{1}{2}} b^{\frac{-1}{5}}$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} a^{\frac{2}{3}}.b^{\frac{-1}{5}}$

$\Rightarrow x = a^{\frac{2}{3}}.b^{-\frac{1}{5}}$.

Câu 7. **[2D3-2.1-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 38)** Nếu $\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ thì $\int_{-1}^{3} \left[2x - f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Thị Quỳnh Nga

Ta có: $\int_{-1}^{3} \left[2x - f(x)\right]\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{3} x\mathrm{d}x - \int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 8 - 2 = 6.$

Câu 8. **[2D3-2.1-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 38)** Nếu $\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = -2$ thì $\int_{1}^{3} \left[2f(x) - 3x^2 + 1\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -30. **B.** -28. **C.** -26. **D.** -27.

Lời giải

FB tác giả: Quang Thoại

Ta có $\int_{1}^{3} \left[2f(x) - 3x^2 + 1\right]\mathrm{d}x = 2\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} \left(-3x^2 + 1\right)\mathrm{d}x$.

+ Ta có $2\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = -4$.

+ Mặt khác $\int_{1}^{3} \left(-3x^2 + 1\right)\mathrm{d}x = \left(-x^3 + x\right)\Big|_1^3 = -24$.

Vậy $\int_{1}^{3} \left[2f(x) - 3x^2 + 1\right]\mathrm{d}x = -4 - 24 = -28$.

Câu 9. **[2D3-2.1-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 38)** Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) + 2\sin x\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 7$. **B.** $I = 5 + \dfrac{\pi}{2}$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 5 + \pi$.

Lời giải

FB tác giả: Duyên Nguyễn

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) + 2\sin x\right]\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x - 2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5 - 2(0 - 1) = 7$

Vậy: $I = 7$.

Câu 10. **[2D3-2.1-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 38)** Cho $\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Khi đó $I = \int_{-1}^{2} \left[x + 2f(x) - 3g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = \dfrac{17}{2}$. **B.** $I = \dfrac{7}{2}$. **C.** $I = \dfrac{5}{2}$. **D.** $I = \dfrac{11}{2}$.

Lời giải

FB tác giả: Duyên Nguyễn

Ta có: $I = \int_{-1}^{2} \left[x + 2f(x) - 3g(x)\right]\mathrm{d}x$

$= \dfrac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} + 2\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{3}{2} + 2.2 - 3(-1)$

$= \dfrac{17}{2}$

Vậy $I = \dfrac{17}{2}$.

Câu 11. **[2D3-2.1-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 39)** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 & \text{khi } x \ge 2 \\ 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Gọi F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(1) = 4$. Giá trị của $2F(0) - 3F(3)$ bằng

A. 65. **B.** 57. **C.** -61. **D.** -69.

Lời giải

FB tác giả: Son Que Nguyen.

Ta có:

$$I=2\int_1^0 f(x)\,dx-3\int_1^3 f(x)dx=2F(0)-2F(1)-\left[3F(3)-3F(1)\right]=2F(0)-3F(3)+F(1).$$

Do đó $2F(0)-3F(3)=I-4$.

Mà $2\int_1^0 f(x)\,\mathrm{d}x=-2\int_0^1(2x+3)\,\mathrm{d}x=-8$

và $3\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=3\int_1^2(2x+3)\,\mathrm{d}x+3\int_2^3(3x^2-2x-1)\,\mathrm{d}x=57$.

Do đó $I=-65$. Vậy $2F(0)-3F(3)=I-4=-69$.

Câu 12. **[2D3-2.1-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 39)** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^2-3x+1 & \text{khi } x>0\\ 1-x^2 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(-2)=\dfrac{5}{3}$. Giá trị của $F(-4)+4F(3)$ nằm trong khoảng nào?

A. $(52;53)$. **B.** $(53;54)$. **C.** $(54;55)$. **D.** $(55;56)$.

Lời giải

FB tác giả: Trịnh Trung Hiếu

Ta có $\int_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x=F(0)-F(-2)=\int_{-2}^0(1-x^2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{-2}{3}$.

$\Rightarrow F(0)=\dfrac{-2}{3}+F(-2)=\dfrac{-2}{3}+\dfrac{5}{3}=1$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$

Mặt khác $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(1-x^2)\,\mathrm{d}x=x-\dfrac{1}{3}x^3+C_1$ khi $x\le 0$.

$F(-2)=\dfrac{5}{3}\Rightarrow -2-\dfrac{1}{3}(-2)^3+C_1=\dfrac{5}{3}\Rightarrow C_1=1$.

Vậy $F(x)=x-\dfrac{1}{3}x^3+1$, khi $x\le 0$. Từ đó ta tính được $F(-4)=\dfrac{55}{3}$.

Xét $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(2x^2-3x+1)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+x+C_2$ khi $x>0$.

Ta có $F(0)=1\Rightarrow C_2=1$

Vậy $F(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+x+1$, khi $x>0$. Từ đó ta tính được $4F(3)=4.\dfrac{17}{2}=34$.

Vậy $F(-4)+4F(3)=\dfrac{55}{3}+34=\dfrac{157}{3}\approx 52,(3)$.

Câu 13. **[2D3-2.1-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 39)** Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}3x^2-2x-1 \text{khi } x\le 3\\ -4x+32 \quad \text{khi } x>3\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(1\right)=4$. Giá trị của $3F\left(-2\right)-F\left(4\right)$ bằng

A. -69. **B.** -25. **C.** -45. **D.** -53.

Lời giải

FB tác giả: Hiếu Lê

Ta có $I=-3\int\limits_{-2}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-3F\left(1\right)+3F\left(-2\right)-F\left(4\right)+F\left(1\right)$.

Do đó $I=3F\left(-2\right)-F\left(4\right)-2F\left(1\right)=3F\left(-2\right)-F\left(4\right)-8\Rightarrow 3F\left(-2\right)-F\left(4\right)=I+8$.

Mà $-3\int\limits_{-2}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-3\int\limits_{-2}^{1}\left(3x^2-2x-1\right)\mathrm{d}x=-27$

và $\int\limits_{1}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{3}\left(3x^2-2x-1\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{3}^{4}\left(-4x+32\right)\mathrm{d}x=34$.

Suy ra $I=-27-34=-61$.

Vậy $3F\left(-2\right)-F\left(4\right)=-61+8=-53$.

Câu 14. **[2D2-6.2-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 40)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(8^x-2^{x^3+2}\right).\left[\log_{\sqrt{3}}\left(2x+21\right)-4\right]\ge 0$?

A. 10. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

FB tác giả: Quang Thoại

Điều kiện: $x>-\dfrac{21}{2}\left(*\right)$.

Trường hợp 1:

$$\begin{cases}8^x-2^{x^3+2}\ge 0\\ \log_{\sqrt{3}}\left(2x+21\right)-4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^{3x}\ge 2^{x^3+2}\\ \log_{\sqrt{3}}\left(2x+21\right)\ge 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x^3+3x-2\ge 0\\ 2x+21\ge 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -2\\ x=1\end{array}\right.\\ x\ge -6\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-6\le x\le -2\\ x=1\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $\left(*\right)$ ta được $x\in\left[-6;-2\right]\cup\left\{1\right\}$.

Trường hợp này ta được 6 giá trị nguyên của x thỏa yêu cầu.

Trường hợp 2:

$$\begin{cases}8^x-2^{x^3+2}\le 0\\ \log_{\sqrt{3}}\left(2x+21\right)-4\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^{3x}\le 2^{x^3+2}\\ \log_{\sqrt{3}}\left(2x+21\right)\le 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x^3+3x-2\le 0\\ 2x+21\le 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x\le -6\end{cases}.$$

Trường hợp này không có giá trị nào của x thỏa mãn.

Vậy có 6 giá trị nguyên của x thỏa ycbt gồm $\{-6;-5;-4;-3;-2;1\}$.

Câu 15. **[2D2-6.2-3] (PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 40)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(9^{x^2}-3^x.9^{x+1}\right)\left(\log_2\left(2x-18\right)-5\right)\leq 0$?

A. 1 **B.** Vô số. **C.** 17. **D.** 16.

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Thanh Bằng

Điều kiện: $x>9$ $(*)$.

Trường hợp 1:

$$\begin{cases}9^{x^2}-3^x.9^{x+1}\geq 0\\ \log_2\left(2x-18\right)-5\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{2x^2}\geq 3^{3x+2}\\ 2x-18\leq 2^5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2\geq 3x+2\\ 2x\leq 50\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\leq\dfrac{-1}{2}\\ x\geq 2\end{array}\right.\\ x\leq 25\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq\dfrac{-1}{2}\\ 2\leq x\leq 25\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $x\in(9;25]$

Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{10;11;...;25\}$ $\Rightarrow$ có 16 giá trị nguyên của x thỏa mãn.

Trường hợp 2:

$$\begin{cases}9^{x^2}-3^x.9^{x+1}\leq 0\\ \log_2\left(2x-18\right)-5\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{2x^2}\leq 3^{3x+2}\\ 2x-18\geq 2^5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2\leq 3x+2\\ 2x\geq 50\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\leq x\leq 2\\ x\geq 25\end{cases}$$

Trường hợp này không có giá trị nào của x thỏa mãn.

Kết hợp các trường hợp, ta có tất cả 16 giá trị nguyên của x thỏa mãn đề.

Câu 16. **[2D2-6.2-3] (PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 40)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\sqrt{\log_3\left(x+25\right)-2}.\left(2^{x^3}-2^{-x}.4^{3-2x}\right)<0$?

A. 1 **B.** 18. **C.** 16. **D.** 17.

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Thanh Bằng

Điều kiện: $x>-25$ $(*)$.

Ta có: $\sqrt{\log_3\left(x+25\right)-2}.\left(2^{x^3}-2^{-x}.4^{3-2x}\right)<0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3\left(x+25\right)-2>0\\ 2^{x^3}-2^{-x}.4^{3-2x}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+25>3^2\\ 2^{x^3}<2^{6-5x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-16\\ x^3<6-5x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-16\\ x<1\end{cases}\Leftrightarrow -16<x<1$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $x\in(-16;1)$

Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-15;-14;...;0\}\Rightarrow$ có 16 giá trị nguyên của x thỏa mãn.

Vậy có 16 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 17. **[2D2-6.2-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 40)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(9^{x^2}-27^x\right)\left[\log_{\frac{1}{2}}(x+2022)+1\right]\ge 0$?

A. 2020. **B.** 2022. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Tác giả: Hồ Hữu Tình

Điều kiện $x>-2022\,(*)$.

Ta có

$$\left(9^{x^2}-27^x\right)\left[\log_{\frac{1}{2}}(x+2022)+1\right]\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}9^{x^2}-27^x\ge 0\\ \log_{\frac{1}{2}}(x+2022)+1\ge 0\end{cases}\ (1)\\ \begin{cases}9^{x^2}-27^x\le 0\\ \log_{\frac{1}{2}}(x+2022)+1\le 0\end{cases}\ (2)\end{array}\right.$$

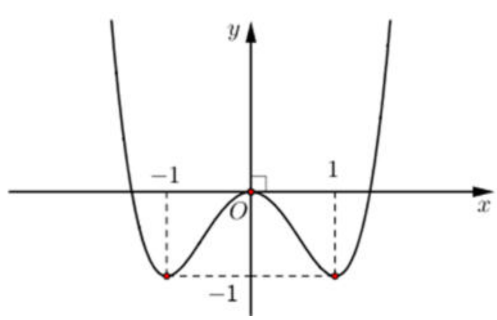
Khi đó

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}3^{2x^2}\ge 3^{3x}\\ \log_{\frac{1}{2}}(x+2022)\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2\ge 3x\\ x+2022\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-3x\ge 0\\ x+2022\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge\frac{3}{2}\\ x\le 0\end{array}\right.\\ x\le -2020\end{cases}\Leftrightarrow x\le -2020$$

$$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}3^{2x^2}\le 3^{3x}\\ \log_{\frac{1}{2}}(x+2022)\le -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2\le 3x\\ x+2022\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-3x\le 0\\ x+2022\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le\frac{3}{2}\\ x\ge -2020\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x\le\frac{3}{2}$$

Kết hợp điều kiện $(*)$ ta có tất cả 4 giá trị nguyên của x là $-2021;\,-2020;\,0;\,1$.

Câu 18. **[2D1-5.3-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 41)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên



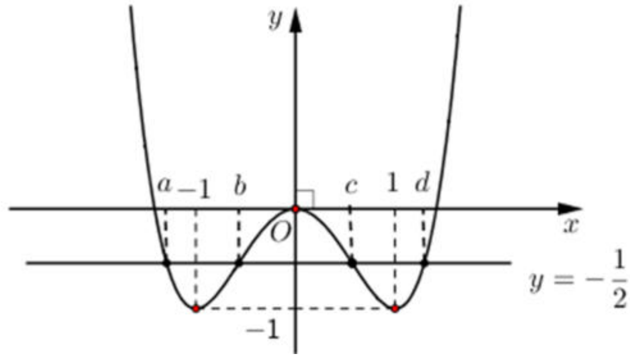
Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2f\left(f(x)\right)+1=0$ là

A. 9. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Tác giả: Tăng Văn Vũ

Ta biến đổi: $2f\left(f\left(x\right)\right)+1=0\Leftrightarrow f\left(f\left(x\right)\right)=-\frac{1}{2}$.



Căn cứ vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy: $f\left(f\left(x\right)\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=a\ \left(a<-1\right)\\ f\left(x\right)=b\left(-1<b<0\right)\\ f\left(x\right)=c\ \left(0<c<1\right)\\ f\left(x\right)=d\ \left(d>1\right)\end{array}\right.$.

Căn cứ vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có:

+ Với $a<-1$, phương trình $f\left(x\right)=a$ vô nghiệm.

+ Với $-1<b<0$, phương trình $f\left(x\right)=b$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

+ Với $0<c<1$, phương trình $f\left(x\right)=c$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

+ Với $d>1$, phương trình $f\left(x\right)=d$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

Các nghiệm của các phương trình $f\left(x\right)=a$, $f\left(x\right)=b$, $f\left(x\right)=c$ và $f\left(x\right)=d$ là các nghiệm thực phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 8 nghiệm thực phân biệt.

Câu 19. **[2D1-5.3-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 41)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(4x^2-2x^4\right)=1$ là

A. 9. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 12.

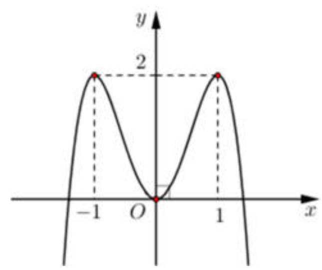
Lời giải

Tác giả: Tăng Văn Vũ

x	$-\infty$		a		0		b		2		c		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			0	$-$			0			$+$	
$f(x)$	$-\infty$				3				-1				$+\infty$
													$y=1$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: $f\left(4x^2-2x^4\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2-2x^4=a\ (a<0) \\ 4x^2-2x^4=b(0<b<2) \\ 4x^2-2x^4=c\ (c>2) \end{array}\right.$.

Vẽ đồ thị (hoặc bảng biến thiên) của hàm số $y=4x^2-2x^4$:



Căn cứ vào đồ thị hàm số $y=4x^2-2x^4$, ta có:

+ Với $a<0$, phương trình $4x^2-2x^4=a\quad(1)$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

+ Với $0<b<2$, phương trình $4x^2-2x^4=b\quad(2)$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

+ Với $c>2$, phương trình $4x^2-2x^4=c\quad(3)$ vô nghiệm.

Các nghiệm của các phương trình (1), (2) và (3) là các nghiệm thực phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thực phân biệt.

Câu 20. **[2D1-5.3-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 41)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$		2		0		2		$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(f(\cos x)\right)=2$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

FB tác giả: Phạm Hùng

Từ bảng biến thiên ta suy ra: $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(\cos x\right)=-1\\f\left(\cos x\right)=1\end{array}\right.$

TH1: $f\left(\cos x\right)=-1$

Đặt $t=\cos x$, $t\in\left[-1;1\right]$

Khi đó phương trình $f\left(\cos x\right)=-1$ trở thành $f\left(t\right)=-1$, với $t\in\left[-1;1\right]$.

Đây là phương trình có hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ và đường thẳng $y=-1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f\left(t\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=a<-1\\t=b>1\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

TH2: $f\left(\cos x\right)=1$

Tương tự TH1: Đặt $t=\cos x$, $t\in\left[-1;1\right]$

$$f\left(t\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=m\in\left(-\infty;-1\right)\ \left(\text{L}\right)\\t=n\in\left(-1;0\right)\\t=p\in\left(0;1\right)\\t=q\in\left(1;+\infty\right)\ \left(\text{L}\right)\end{array}\right.$$

+ Với $t=n\in\left(-1;0\right)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in\left(-1;0\right)$ thì phương trình $\cos x=t$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$

+ Với $t=p\in\left(0;1\right)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in\left(0;1\right)$ thì phương trình $\cos x=t$ có 5 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Hiển nhiên, 9 nghiệm trong những trường hợp trên đều khác nhau.

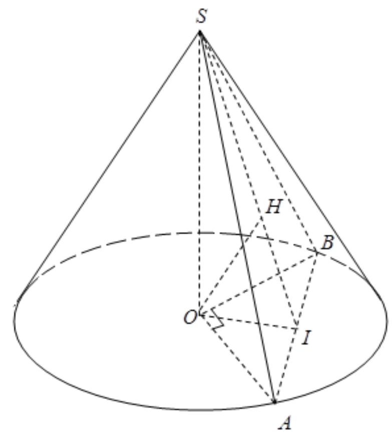
Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Câu 21. **[2H2-1.2-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 42)** Một hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O và $SO=a$. Một mặt phẳng $\left(P\right)$ qua đỉnh S cắt đường tròn $\left(O\right)$ theo dây cung AB sao cho góc $\widehat{AOB}=90^\circ$ và cách O một khoảng $\dfrac{a}{2}$. Diện tích xung quanh hình nón bằng

A. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{10}}{6}$. **B.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{10}}{3}$. **D.** $\dfrac{2\pi a^2\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải

FB tác giả: Minh Trí



Gọi I là trung điểm của AB. Kẻ $OH \perp SI$

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OI^2} \Rightarrow \frac{1}{OI^2}=\frac{4}{a^2}-\frac{1}{a^2}=\frac{3}{a^2} \Rightarrow OI=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Tam giác OAB vuông cân tại O nên:

$$AB=2OI=\frac{2a\sqrt{3}}{3},\ R=OA=OB=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Suy ra: $SB=\sqrt{SO^2+OB^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

Diện tích xung quanh của hình nón:

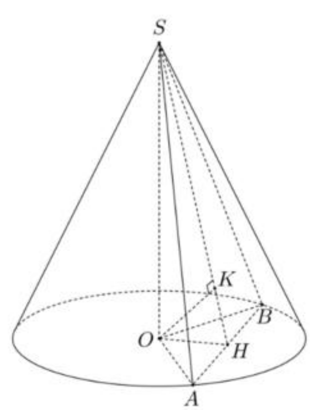
$$S_{xq}=\pi Rl=\pi\frac{a\sqrt{6}}{3}\frac{a\sqrt{15}}{3}=\frac{\pi a^2\sqrt{10}}{3}.$$

Câu 22. **[2H2-1.2-3] (PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 42)** Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng (α) đi qua đỉnh và có khoảng cách đến tâm O của đường tròn đáy là $\frac{3a}{2}$ ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $4a$. Thể tích của (N) bằng

A. $\frac{7\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{4\sqrt{13}\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{8\sqrt{13}\pi a^3}{3}$. **D.** $7\pi a^3$.

Lời giải

FB tác giả: Shangri La



Gọi O là tâm đường tròn đáy và thiết diện là tam giác SAB đều cạnh $4a$.

Gọi H là trung điểm của AB.

Kẻ $OK \perp SH$, khi đó $\mathrm{d}\left(O,(\alpha)\right) = SK = \dfrac{3a}{2} = \dfrac{SO.OH}{\sqrt{SO^2 + OH^2}}$ (1)

Mặt khác ΔSAB đều có cạnh $4a$ suy ra $SH = 4a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}a$.

Lại có $OH^2 = SH^2 - SO^2 = 12a^2 - SO^2$.

Thay vào (1) ta được $\dfrac{3a}{2} = \dfrac{SO.\sqrt{12a^2 - SO^2}}{\sqrt{SO^2 + 12a^2 - SO^2}} = \dfrac{SO.\sqrt{12a^2 - SO^2}}{2\sqrt{3}a} \Leftrightarrow SO = 3a$.

Ta có $OA = \sqrt{(4a)^2 - (3a)^2} = a\sqrt{7}$.

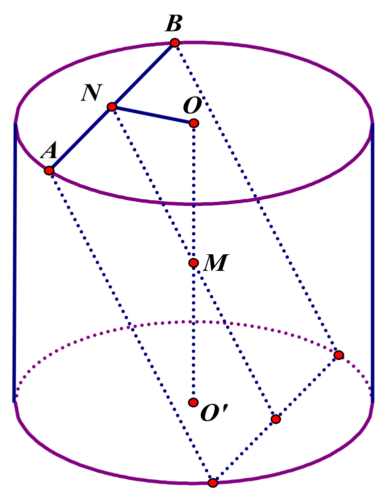
Vậy $V_{(N)} = \dfrac{1}{3}\pi.7a^2.3a = 7\pi a^3$.

Câu 23. **[2H2-1.2-3] (PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 42)** Cho hình trụ đứng có hai đáy là hai đường tròn tâm O và tâm O', bán kính bằng a, chiều cao hình trụ bằng $2a$. Mặt phẳng đi qua trung điểm OO' và tạo với OO' một góc $30°$, cắt đường tròn đáy tâm O theo dây cung AB. Độ dài đoạn AB là

A. a. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}a$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Lời giải

FB tác giả: Hoàng Yến



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OO' và AB.

Ta có $\left(OO';(ABM)\right) = (OO';MN) = \widehat{OMN} = 30°$.

Tam giác OMN vuông tại O có $ON = \tan\widehat{OMN}.OM \Leftrightarrow ON = \tan 30°.a = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

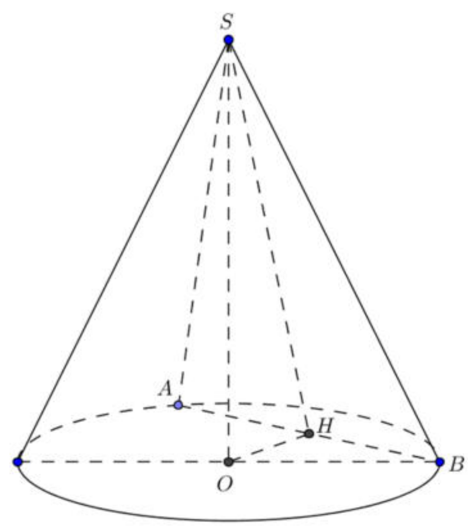
$AB = 2NB = 2\sqrt{OB^2 - ON^2} = 2\sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{2\sqrt{6}a}{3}$.

Câu 24. **[2H2-1.2-3] (PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 42)** Hình nón (N) có đỉnh S, tâm đường tròn đáy là O, góc ở đỉnh bằng $120°$. Một mặt phẳng qua S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N)

A. $S_{xq} = 36\sqrt{3}\pi$. **B.** $S_{xq} = 27\sqrt{3}\pi$. **C.** $S_{xq} = 18\sqrt{3}\pi$. **D.** $S_{xq} = 9\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

FB tác giả: Hoàng Yến



Theo giả thiết ta có tam giác SAB vuông tại S và $OH = 3$ và $\widehat{BSO} = 60°$.

Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón thì đường sinh $l = SB = \dfrac{r}{\sin 60°} \Rightarrow l = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$.

ΔSAB vuông tại S nên: $AB = l\sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}r$. Suy ra $BH = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{r\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác OBH vuông tại H, ta có $9 + \dfrac{6r^2}{9} = r^2 \Leftrightarrow r = 3\sqrt{3}$.

Vậy $S_{xq} = \pi r l = 18\sqrt{3}\pi$

Câu 25. **[2D4-4.1-3] (PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 43)** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m-1)z + m^2 - 5m = 0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|^3 = 3|\overline{z_0}| + 2$. Tổng các phần tử của tập S là

A. 8. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

FB tác giả: Nam Hồng Lê

Do $|z_0| = |\overline{z_0}|$ nên $|z_0|^3 = 3|\overline{z_0}| + 2 \Leftrightarrow |z_0|^3 - 3|z_0| - 2 = 0 \Leftrightarrow |z_0| = 2$

$\Delta' = (m-1)^2 - m^2 + 5m = 3m+1$.

TH1: Nếu $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 3m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{1}{3}$, phương trình có 2 nghiệm thực

Khi đó $|z_0| = 2 \Leftrightarrow z_0 = \pm 2$.

Thay $z_0 = 2$ vào phương trình ta được: $m^2 - 9m + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=8 \end{array}\right.$ (TM).

Thay $z_0 = -2$ vào phương trình ta được: $m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$ (TM).

TH2: Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 3m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{3}$, phương trình có 2 nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_2 = \overline{z_1}, |z_1| = |z_2| = 2$. Khi đó $z_1.z_2 = |z_1|^2 = m^2 - 5m = 4 \Leftrightarrow m = \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$ (Không thỏa mãn).

Vậy $S = \{0;1;8\}$.

Suy ra tổng là 9.

Câu 26. **[2D4-4.1-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 43)** Trong tập số phức, cho phương trình $2z^2 + 2(m-1)z + m^2 - 3m - 2 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong đoạn $[0;2021]$ để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $z_1; z_2$ thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$?

A. 2016. **B.** 202 **C.** 202 **D.** 2017.

Lời giải

FB tác giả: Nhật Lê

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt

TH1: $\Delta > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4m + 5 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m > -1 \end{cases}$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt z_1, z_2.

Theo định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = -(m-1) \\ z_1 z_2 = m^2 - 3m - 2 \end{cases}$

Theo đề bài ta có: $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow z_1 = -z_2$ (vì $z_1 \neq z_2$)

$\Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0$

$\Rightarrow -(m-1) = 0$

$\Leftrightarrow m = 1$ (nhận)

TH2: $\Delta < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 \\ m < -1 \end{cases}$

Phương trình luôn có 2 nghiệm phức z_1, z_2 luôn thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$.

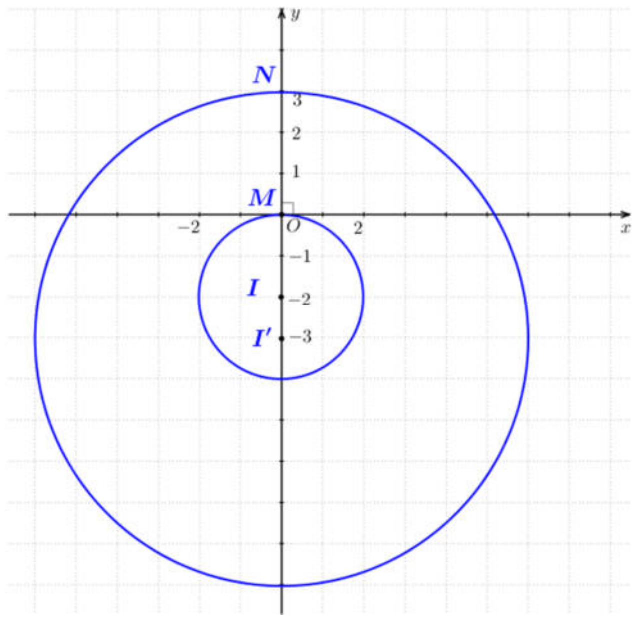
Vậy có 2017 giá trị m thỏa mãn.

Câu 27. **[2D4-5.1-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 44)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa $|iz_1 - 1| = 1$ và $|\overline{z_2} + i| = 2$. Khi biểu thức $P = |2z_1 + 3z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z_1 - 2z_2|$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

FB tác giả: Tho Nguyen



Ta có: $|iz_1 - 1| = 1 \Leftrightarrow |i|\left|z_1 - \dfrac{1}{i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z_1 + i| = 1 \Leftrightarrow |2z_1 + 2i| = 2$

Gọi M là điểm biểu diễn số phức $2z_1$.

$\Rightarrow$ Tập hợp M thuộc đường tròn tâm $I(0\,;-2)$, $R = 2$.

Ta có: $|\overline{z_2} + i| = 2 \Leftrightarrow |z_2 - i| = 2 \Leftrightarrow |-3z_2 + 3i| = 6$

Gọi N là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$.

$\Rightarrow$ Tập hợp N thuộc đường tròn tâm $I'(0;-3)$, $R' = 6$.

Suy ra: $P = |2z_1 + 3z_2| = MN$

$\Rightarrow P_{\min} \Leftrightarrow MN_{\min} \Leftrightarrow M, N, I, I'$ thẳng hàng (M nằm giữa N và I) $MN = 3$ và $\overrightarrow{IM} = -2\overrightarrow{II'}$, M là trung điểm của NI'. Từ đó ta tính được $M(0;0)$, $N(0;3)$.

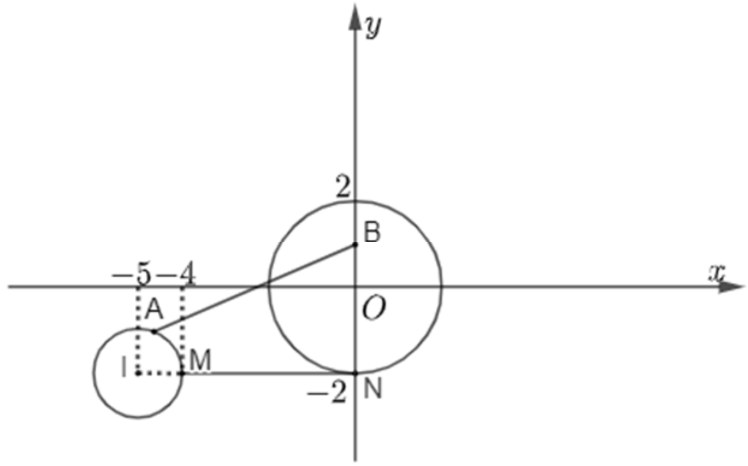
$\Rightarrow 2z_1 = 0, -3z_2 = 3i$. Khi đó, $z_1 - 2z_2 = 2i$. Vậy $|z_1 - 2z_2| = 2$.

Câu 28. **[2D4-5.1-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 44)** Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 2$, $|iw - 2 + 5i| = 1$. Khi $|z^2 - wz - 4|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z| + |w|$ bằng

A. $2 + \sqrt{5}$. **B.** $2\left(1 + \sqrt{5}\right)$. **C.** $1 + \sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{5} - 2$.

Lời giải

FB tác giả: Ngọ Thị Hằng



Ta có: $|iw-2+5i|=1 \Leftrightarrow |i|.\left|w+\dfrac{-2+5i}{i}\right|=1 \Leftrightarrow |w+5+2i|=1$.

Ta có: $T=\left|z^2-wz-4\right|=\left|z^2-wz-|z|^2\right|=\left|z^2-wz-z.\overline{z}\right|=|z|.\left|z-w-\overline{z}\right|=2\left|z-w-\overline{z}\right|$.

Đặt $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$, suy ra $z-\overline{z}=2bi$. Vì $|z|=2 \Rightarrow -2\le b\le 2$.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của w, $2bi$ nên:

A thuộc đường tròn tâm $I(-5;-2)$; $R=1$, B thuộc trục Oy và $-4\le x_B\le 4$

$\Rightarrow T=2AB\ge 2MN=2.4=8$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$A\equiv M(-4;-2)\Rightarrow w=-4-2i\Rightarrow |w|=2\sqrt{5}$ và $B\equiv N(0;-2)\Rightarrow 2bi=-2i\Rightarrow b=-1\Rightarrow z=a-i$

$\Rightarrow |z|=2\Rightarrow a^2+1=4\Rightarrow a^2=3\Rightarrow a=\pm\sqrt{3}\Rightarrow z=\pm\sqrt{3}-i\Rightarrow |z|=2$

Vậy $|z|+|w|=2+2\sqrt{5}$.

Câu 29. **[2D4-5.1-3] (PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 44)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3i+5|=2$ và $|iz_2-2-i|=6$. Khi $T=|2iz_1+z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z_1+z_2|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5629}}{13}$. **B.** 13. **C.** 26. **D.** $\dfrac{\sqrt{2259}}{13}$.

Lời giải

FB tác giả: Dương Thị Lý

Giả sử M, N lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức $2iz_1$ và $-z_2$.

Ta có $|z_1-3i+5|=2 \Leftrightarrow |2i|.|z_1-3i+5|=|2i|.2 \Leftrightarrow |2iz_1+6+10i|=4$.

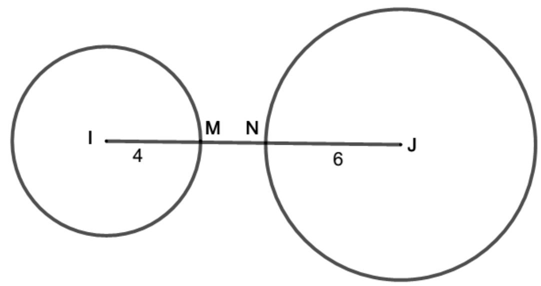
Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn (C_1) tâm $I(-6;-10)$ và bán kính $R_1=4$.

$|iz_2-2-i|=6 \Leftrightarrow |i|.|iz_2-2-i|=|i|.6 \Leftrightarrow |-z_2+1-2i|=6$.

Suy ra tập hợp điểm N là đường tròn (C_2) tâm $J(-1;2)$ và bán kính $R_2 = 6$.

Ta có $T = |2i\,z_1 + z_2| = MN$.

$minT = IJ - R_1 - R_2 = 13 - 4 - 6 = 3$.



Đạt được khi $\begin{cases} \overrightarrow{IM} = \dfrac{4}{13}\overrightarrow{IJ} \\ \overrightarrow{IN} = \dfrac{7}{13}\overrightarrow{IJ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\left(-\dfrac{58}{13}; -\dfrac{82}{13}\right) \\ N\left(-\dfrac{43}{13}; -\dfrac{46}{13}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2iz_1 = -\dfrac{58}{13} - \dfrac{82}{13}i \\ -z_2 = -\dfrac{43}{13} - \dfrac{46}{13}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -\dfrac{41}{13} + \dfrac{29}{13}i \\ z_2 = \dfrac{43}{13} + \dfrac{46}{13}i \end{cases}$

Vậy $|z_1 + z_2| = \left|\dfrac{2}{13} + \dfrac{75}{13}i\right| = \dfrac{\sqrt{5629}}{13}$.

Câu 30. **[2D4-5.1-3] (PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 44)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - i| = \sqrt{5}$ và $|z_2 - 1 + i| = |\overline{z_2} - 5 + i|$. Khi $T = |z_1 - i\,z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì phần thực của $z_1 + 5z_2$ bằng

A. 19. **B.** 21. **C.** -18. **D.** 5.

Lời giải

FB tác giả: Dương Thị Lý

Giả sử $M(x;y)$, $N(x';y')$ lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức z_1 và iz_2

Ta có $|z_1 - 3 - i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(x-3)+(y-1)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$.

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn (C) tâm $I(3;1)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

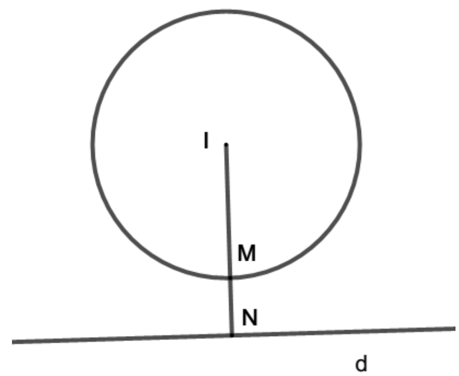
$|z_2 - 1 + i| = |\overline{z_2} - 5 + i| \Leftrightarrow |i\,z_2 - i - 1| = |i\,\overline{z_2} - 5i - 1|$

$\Leftrightarrow |(x'-1)+(y'-1)i| = |(-x'-1)+(y'-5)i| \Leftrightarrow x' - 2y' + 6 = 0$.

Suy ra tập hợp điểm N là đường thẳng $(d): x - 2y + 6 = 0$.

Ta có $T = |z_1 - i\,z_2| = MN$.

$minT = d(I,d) - R = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.



Đạt được khi N là hình chiếu của I trên d và $\overrightarrow{IM}=\frac{5}{7}\overrightarrow{IN}$.

Suy ra $N\left(\frac{8}{5};\frac{19}{5}\right)$ và $M(2;3)$

$\Rightarrow z_1=2+3i$; $iz_2=\frac{8}{5}+\frac{19}{5}i\Rightarrow z_2=\frac{19}{5}-\frac{8}{5}i\Rightarrow z_1+5z_2=21-5i$

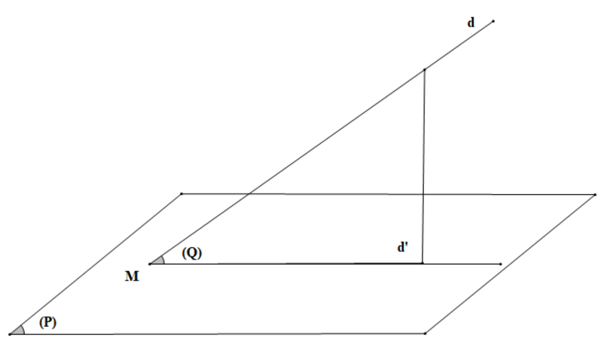
Vậy phần thực của z_1+5z_2 là 21.

Câu 31. **[2H3-3.2-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 45)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $(P):x+y+z-5=0$ là đường thẳng có phương trình

A. $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}$.
B. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+2}{1}$.
C. $\frac{x-2}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{-1}$.
D. $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z+2}{7}$.

Lời giải

FB tác giả: Bùi Tuấn Anh



Phương trình tham số của $d:\begin{cases}x=2t\\y=2+3t\\z=-1-t\end{cases}$.

Gọi $M=d\cap(P)\Rightarrow M(2t;2+3t;-1-t)$.

Do $M\in(P): 2t+2+3t-1-t-5=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow M(2;5;-2)$.

Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P). (Q) là mặt phẳng chứa d' và d.

$$\left.\begin{array}{l}(Q)\perp(P)\Rightarrow \overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{n_P}\\ d\subset(Q)\Rightarrow \overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{u_d}\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_P}\right]=(4;-3;-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}d'\subset(P)\Rightarrow \overrightarrow{u_{d'}}\perp\overrightarrow{n_P}\\ d'\subset(Q)\Rightarrow \overrightarrow{u_{d'}}\perp\overrightarrow{n_Q}\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{u_{d'}}=\left[\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{n_P}\right]=(-2;-5;7)$$

Đường thẳng d' qua điểm $M(2;5;-2)$ và nhận $\overrightarrow{u_{d'}}=(-2;-5;7)$ là vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là $d': \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z+2}{7}$.

Câu 32. **[2H3-3.2-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 45)** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=-1+2t\end{cases}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (Oxz) là đường thẳng có phương trình

A. $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=-1+2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=-1+2t\end{cases}$.

Lời giải

FB tác giả: Phuong Tran

Mặt phẳng $(Oxz): y=0$, d có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;1;2)$

$d\cap(Oxz)=A(1;0;-1)$. Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của d trên (Oxz)

$\Rightarrow A\in\Delta$ và Δ có véctơ chỉ phương là $\vec{v}=(1;0;2)$ $\Rightarrow \Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=-1+2t\end{cases}$.

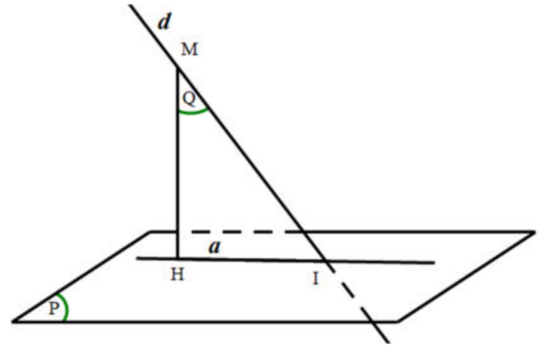
Câu 33. **[2H3-3.2-3]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 45)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-3=0$ là đường thẳng có phương trình

A. $\dfrac{x+2}{17}=\dfrac{y+1}{10}=\dfrac{z-5}{14}$. **B.** $\dfrac{x+2}{-17}=\dfrac{y+1}{10}=\dfrac{z-5}{-14}$.

C. $\dfrac{x-2}{17}=\dfrac{y-1}{10}=\dfrac{z+5}{-14}$. **D.** $\dfrac{x+2}{-17}=\dfrac{y+1}{-10}=\dfrac{z-5}{14}$.

Lời giải

FB tác giả: Phuong Tran



d có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;2;-2)$

Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-2;1)$

Gọi đường thẳng a là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P), (Q) là mặt phẳng chứa a và d $\Rightarrow (Q)$ có véctơ pháp tuyến là $[\vec{u},\vec{n}]$ và $a=(P)\cap(Q)$

$\Rightarrow a$ có véctơ chỉ phương là $[[\vec{u},\vec{n}],\vec{n}]=(-17;-10;14)$

$d\cap(P)=I(-2;-1;5)\Rightarrow I\in a$

$\Rightarrow a:\dfrac{x+2}{-17}=\dfrac{y+1}{-10}=\dfrac{z-5}{14}$.

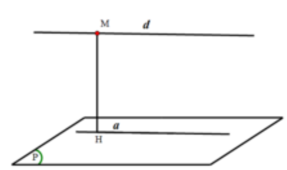
Câu 34. **[2H3-3.2-3] (PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 45)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $(P):x-y+2z+1=0$ là đường thẳng có phương trình

A. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-1}{1}$. **B.** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-5}{1}$.

C. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-1}{-3}$. **D.** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-5}{-3}$.

Lời giải

FB tác giả: Phuong Tran



Gọi đường thẳng a là hình chiếu vuông góc của d trên (P)

d có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;4;1)$ và d đi qua $M(1;2;3)$

Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;2)$

Có $\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}=0\\ M\notin(P)\end{cases}\Rightarrow d\,//\,(P)\Rightarrow a$ nhận $\vec{u}=(2;4;1)$ làm véctơ chỉ phương

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (P)

$\Rightarrow MH:\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3+2t \end{cases}$ mà $H\in(P)\Rightarrow H(0;3;1)$

$\Rightarrow a$ đi qua $H(0;3;1)$

$\Rightarrow a:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-1}{1}$.

Câu 35. [2D3-3.1-4] (PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 46) Cho hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị (C), đường thẳng $y=mx+n$ là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=-1$ và cắt (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 (với a, b, c, m và n là các số thực). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x^2-1)2^{f(x)-mx-n}$ và trục hoành bằng

A. $\dfrac{15}{16.\ln 2}$. **B.** $\dfrac{15}{16}$. **C.** $\dfrac{5}{16}\ln 2$. **D.** $\dfrac{5}{16.\ln 2}$.

Lời giải

FB tác giả: Dương Thái Bảo

Vì $f(x)-mx-n=x^3+ax^2+(b-m)x+c-n$ là hàm số bậc ba có hai nghiệm $x=-1$ (nghiệm kép) và $x=2$ nên $f(x)-mx-n=(x+1)^2(x-2)$.

Đặt $g(x)=f(x)-mx-n=(x+1)^2(x-2)$, suy ra $g'(x)=3x^2-3$.

Phương trình hoành độ giao điểm $(x^2-1)2^{g(x)}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\left|\int_{-1}^{1}(x^2-1).2^{g(x)}\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{3}\left|\int_{-1}^{1}g'(x).2^{g(x)}\mathrm{d}x\right|=\frac{5}{16.\ln 2}.$$

Câu 36. [2D3-3.1-4] (PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 46) Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $g(x)=f(x).\mathrm{e}^{-x}$ có hai giá trị cực trị là 5 và -3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x)$ và $h(x)=(2ax+b).\mathrm{e}^{-x}$ bằng

A. 2. **B.** 8. **C.** $\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^{-3}$. **D.** $\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^3$.

Lời giải

FB tác giả: Dương Thái Bảo

Ta có $g'(x)=[f'(x)-f(x)].\mathrm{e}^{-x}=\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right].\mathrm{e}^{-x}$.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $g'(x)$, khi đó $\begin{cases} g'(x_1)=0 \\ g'(x_2)=0 \end{cases}$ và $\begin{cases} g(x_1)=5 \\ g(x_2)=-3 \end{cases}$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$f(x).\mathrm{e}^{-x}=(2ax+b).\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right].\mathrm{e}^{-x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$$

Vậy diện tích hình phẳng được giới hạn bằng

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right].\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}g'(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|g(x_2)-g(x_1)\right|=8.$$

Câu 37. **[2D3-3.1-4]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 46)** Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)$ có ba giá trị cực trị là -14; 4; 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+24}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 10$. **C.** $\ln 3$. **D.** $\ln 5$.

Lời giải

FB tác giả: Luu Le Van

Xét hàm số: $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)$.

Ta có $g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)+f''''(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)+24$

Vì $f''''(x)=24$. Gọi $x_1; x_2; x_3$ là các điểm cực trị của hàm số thì ta có $g'(x_1)=g'(x_2)=g'(x_3)=0$ và có thể giả sử $\begin{cases} g(x_1)=-14 \\ g(x_2)=4 \\ g(x_3)=6 \end{cases}$

Xét phương trình:

$$\frac{f(x)}{g(x)+24}=1 \Leftrightarrow f(x)=g(x)+24 \Leftrightarrow f'(x)+f''(x)+f'''(x)+24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_3}\left(\frac{f(x)}{g(x)+24}-1\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{g(x)+24}-1\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}\left(\frac{f(x)}{g(x)+24}-1\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{g'(x)}{g(x)+24}\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}\left(\frac{g'(x)}{g(x)+24}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\ln\left|g(x)+24\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|+\left|\ln\left|g(x)+24\right|\Big|_{x_2}^{x_3}\right|$$

$$=\left|\ln\left|g(x_2)+24\right|-\ln\left|g(x_1)+24\right|\right|+\left|\ln\left|g(x_3)+24\right|-\ln\left|g(x_2)+24\right|\right|$$

$= \left| \ln|4+24| - \ln|-14+24| \right| + \left| \ln|6+24| - \ln|4+24| \right| = \ln 3$.

Câu 38. **[2D3-3.1-4]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 46)** Cho hàm số $f(x) = 3x^3 + bx^2 + cx + d$ với $b, c, d \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là $-12; 6$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{f(x)}{g(x)+18}$ và $y = 1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 6$. **C.** $2\ln 2$. **D.** $\ln 5$.

Lời giải

FB tác giả: Luu Le Van

Xét hàm số: $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$

Ta có $g'(x) = f'(x) + f''(x) + f'''(x) = f'(x) + f''(x) + 18$

Vì $f'''(x) = 18$. Gọi $x_1; x_2$ là các điểm cực trị của hàm số thì ta có $g'(x_1) = g'(x_2) = 0$ và có thể giả sử $\begin{cases} g(x_1) = -12 \\ g(x_2) = 6 \end{cases}$

Xét phương trình:

$$\frac{f(x)}{g(x)+18} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + 18 \Leftrightarrow f'(x) + f''(x) + 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \end{array} \right.$$

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{f(x)}{g(x)+18} - 1 \right) dx \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{f(x) - g(x) - 18}{g(x)+18} \right) dx \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{g'(x)}{g(x)+18} \right) dx \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{(g(x)+18)'}{g(x)+18} \right) dx \right|$$

$$= \left| \ln|g(x)+18| \Big|_{x_1}^{x_2} \right| = \left| \ln|g(x_2)+18| - \ln|g(x_1)+18| \right| = \left| \ln|6+18| - \ln|-12+18| \right| = \ln 4 = 2\ln 2.$$

Câu 39. **[2D3-3.1-4]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 46)** Cho hai hàm số $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + 1$ và $g(x) = cx^2 + dx + 3$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\dfrac{45}{5}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{99}{10}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

FB tác giả: Luu Le Van

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} f(-2) = g(-2) \\ f(1) = g(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 + 4a - 2b + 1 = 4c - 2d + 3 \\ 1 + a + b + 1 = c + d + 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(a-c) - 2(b-d) = -14 \\ (a-c) + (b-d) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = -2 \\ b - d = 3 \end{cases}$$

Ta có $f(x) - g(x) = x^4 + (a-c)x^2 + (b-d)x - 2$

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S=\left|\int_{-2}^{1}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{-2}^{1}\left(x^4+(a-c)x^2+(b-d)x-2\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^5}{5}+(a-c)\frac{x^3}{3}+(b-d)\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{-2}^{1}\right|$$

Thay $\begin{cases}a-c=-2\\ b-d=3\end{cases}$ ta có $S=\left|\frac{1^5-(-2)^5}{5}-2.\frac{1^3-(-2)^3}{3}+3.\frac{1^2-(-2)^2}{2}-2\left(1-(-2)\right)\right|=\frac{99}{10}$.

Câu 40. **[2D2-5.5-4]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 47)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2\le x\le 2021$ và $2^y-\log_2\left(x+2^{y-1}\right)=2x-y$?

A. 2020. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 2019.

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Thị Vân

Đặt $\log_2\left(x+2^{y-1}\right)=t\Rightarrow x+2^{y-1}=2^t\Leftrightarrow x=2^t-2^{y-1}$.

Phương trình đã cho trở thành: $2^y-t=2\left(2^t-2^{y-1}\right)-y\Leftrightarrow 2.2^y+y=2.2^t+t$

Xét hàm số $f(x)=2.2^x+x$ đồng biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow y=t$.

Suy ra phương trình $\log_2\left(x+2^{y-1}\right)=y\Leftrightarrow x+2^{y-1}=2^y\Leftrightarrow x=2^{y-1}$.

$2\le x\le 2021\Rightarrow 2\le 2^{y-1}\le 2021\Leftrightarrow 1\le y-1\le\log_2 2021\Leftrightarrow 2\le y\le\log_2 2021+1$.

Do $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{2;3;4;...;11\}$ có 10 giá trị nguyên của y.

Mà $x=2^{y-1}$ nên với mỗi số nguyên $y\in\{2;3;4;...;11\}$ xác định duy nhất một giá trị nguyên của x .

Vậy có 10 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 41. **[2D2-5.5-4]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 47)** Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x\in\left(\frac{1}{2};5\right)$ thỏa mãn $8^{2x^2+xy}=(1+xy).8^{4x}$?

A. 7. **B.** **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

FB tác giả: Thao nguyen

$8^{2x^2+xy}=(1+xy).8^{4x}\Leftrightarrow 8^{2x^2+xy-4x}-(1+xy)=0$

Xét hàm số $f(x)=8^{2x^2+xy-4x}-(1+xy)$

Áp dụng BĐT $a^x>x(a-1)+1$ ta có

$f(x)=8^{2x^2+xy-4x}-(1+xy)>7(2x^2+xy-4x)+1-(1+xy)=14x^2+2x(3y-14)>0,\forall y\geq 5$

Do đó $y\leq 4$

Với $y\leq -2\Rightarrow xy<-1\Rightarrow f(x)>0$ (loại)

Với $y=-1\Rightarrow f(x)=8^{2x^2-5x}+x-1$

Ta có $f(5)>0;\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0\Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm $x\in\left(\dfrac{1}{2};5\right)\Rightarrow y=1$ thỏa mãn

Với $y=0\Rightarrow 8^{2x^2}=8^{4x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\ (\text{TM})\end{array}\right.\Rightarrow y=0$ thỏa mãn

Với $y>0$ có $f(5)=8^{5y+30}-(1+5y)>0,\forall y>0$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=8^{\frac{y}{2}-\frac{3}{2}}-\left(1+\dfrac{y}{2}\right)<0,\forall y=\{1;2;3;4\}$

$\Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm $x\in\left(\dfrac{1}{2};5\right)$

Vậy $y=\{-1;0;1;2;3;4\}$.

Câu 42. **[2D2-5.5-4]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 47)** Có bao nhiêu số nguyên $y>5$ để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_{15}(4x+3y+1)=\log_6(x^2-2x+y^2)$?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

FB tác giả: Nguyễn Huỳnh Tấn Trung

Đặt $\log_{15}(4x+3y+1)=\log_6(x^2-2x+y^2)=t\Leftrightarrow\begin{cases}4x+3y+1-15^t=0\\(x-1)^2+y^2=6^t+1\end{cases}$ (*).

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng $\Delta:4x+3y+1-15^t=0$ và đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=6^t+1$ có điểm chung, với tâm $I(1;0)$

$\Leftrightarrow d(I,\Delta)\leq R\Leftrightarrow\dfrac{\left|5-15^t\right|}{5}\leq\sqrt{6^t+1}\Leftrightarrow 225^t-10.15^t-25.6^t\leq 0$

$\Leftrightarrow 15^t-6.\left(\dfrac{2}{5}\right)^t-10\leq 0$

Xét hàm số $f(t)=15^t-6.\left(\dfrac{2}{5}\right)^t-10$

Đạo hàm $f'(t)=15^t.\ln 15-6.\left(\dfrac{2}{5}\right)^t\ln\dfrac{2}{5}>0,\forall t$

Do vậy: hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $f(t) \le 0 \Leftrightarrow t \le 0,9341$

Do $(x-1)^2 + y^2 = 6^t + 1$ nên $|y| \le \sqrt{6^t+1}$, dẫn đến $|y| \le 6$

Kết hợp giả thiết ta suy ra $y = 6$.

Thử lại:

Với $y = 6$, hệ (*) trở thành

$$\begin{cases} 4x + 19 - 15^t = 0 \\ (x-1)^2 = 6^t - 35 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{15^t - 23}{4}\right)^2 = 6^t - 35 \Leftrightarrow 225^t + 1089 = 46.15^t + 16.6^t \ (**)$$

Nếu $t < 0$ thì $15^t < 1, 6^t < 1 \Rightarrow 225^t + 1089 > 46.15^t + 16.6^t$.

Nếu $t \ge 1 \Rightarrow 15^t > 6^t$, ta sẽ chứng minh $225^t + 1089 > 62.15^t$.

Thật vậy, ta có $225^t + 1089 - 62.15^t = (15^t - 31)^2 + 128 > 0$

Dẫn đến $225^t + 1089 > 62.15^t > 46.15^t + 16.6^t$.

Nếu $0 \le t \le 1$ thì $15^t \le 15, 6^t \le 6 \Rightarrow 225^t + 1089 > 46.15^t + 16.6^t$

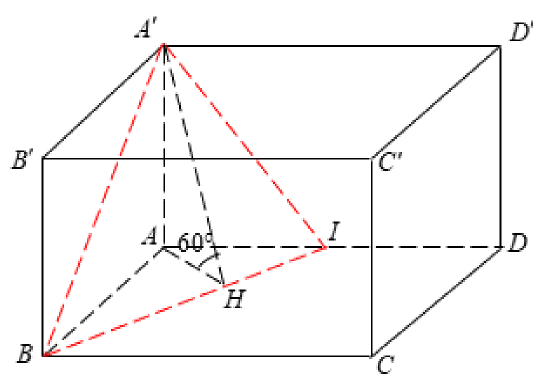
Vậy (**) vô nghiệm.

Câu 43. **[2H1-3.2-4]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 48)** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm cạnh AD, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BI)$ và $(ABCD)$ bằng $60°$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $3\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

FB tác giả: Huong Nguyen



Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BI)$ và $(ABCD)$.

Trong $(ABCD)$: Kẻ $AH \perp BI$ tại H; $AA' \perp BI$ (do $AA' \perp (ABCD)$ suy ra $A'H \perp BI$

Vậy $\alpha = \widehat{(A'H, AH)} = \widehat{AHA'} = 60°$.

Tam giác ABI vuông tại A, AH là đường cao nên có:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{3a^2}=\frac{4}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Tam giác $A'AH$ vuông tại A có: $AA'=AH.\tan 60^\circ=\frac{3a}{2}$

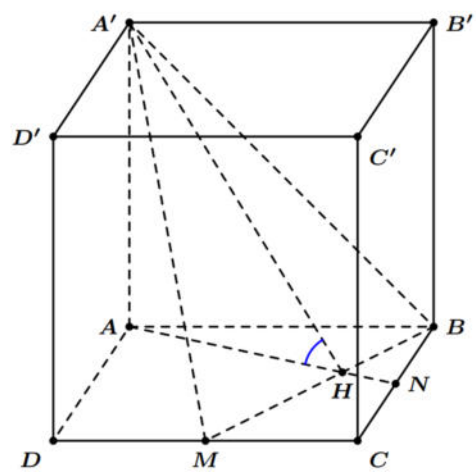
$$V_{ABCD.A'B'C'D'}=AA'.S_{ABCD}=\frac{3a}{2}.2\sqrt{3}\,a^2=3\sqrt{3}\,a^3.$$

Câu 44. **[2H1-3.2-4]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 48)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BM)$ và $(ABCD)$ bằng 60° với M là trung điểm CD. Thể tích khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{15}}{15}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{15}}{5}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}a^3$. **D.** $\frac{2\sqrt{15}}{5}a^3$.

Lời giải

FB tác giả: Dương Thái Bảo



Gọi N là trung điểm của BC, H là giao điểm của MB và AN.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có $AN\perp BM$, suy ra $A'H\perp MB$.

Do đó $\widehat{A'HA}=60^\circ$.

Ta có $AH=\frac{AB^2}{AN}=\frac{2\sqrt{5}}{5}a$, suy ra $AA'=AH.\tan 60^\circ=\frac{2\sqrt{15}}{5}a$.

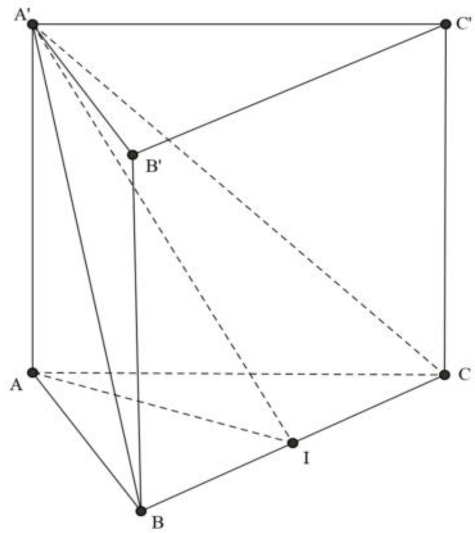
Thể tích khối hộp chữ nhật đã cho bằng $V=AA'.S_{ABCD}=\frac{2\sqrt{15}}{5}a^3$.

Câu 45. **[2H1-3.2-4]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 48)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy góc 30° và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Thể tích V của khối lăng trụ đã cho là

A. $64\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $16\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{3}$.

Lời giải

FB tác giả: Sơn Trường



Gọi I là trung điểm cạnh BC.

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều nên $ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ đều.

Do đó ta có: $A'B = A'C$. Suy ra tam giác $A'BC$ cân tại A' $\Rightarrow A'I \perp BC$.

Mặt khác: tam giác ABC đều $\Rightarrow AI \perp BC$.

Suy ra $BC \perp (A'IA)$.

Vậy góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt đáy bằng góc $\widehat{A'IA} = 30°$.

Ta có: tam giác ABC là hình chiếu của tam giác $A'BC$ trên mặt đáy

Nên $S_{ABC} = S_{A'BC}.\cos\alpha = 8.\cos 30° = 4\sqrt{3}$.

Đặt $AB = x \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 4$.

Ta có: $AI = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow AA' = AI.\tan\widehat{AIA'} = 2$.

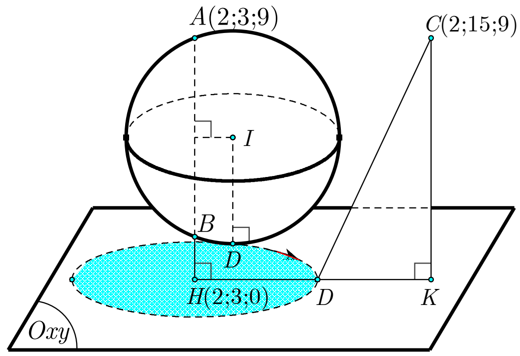
Suy ra: $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = 2.4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Câu 46. **[2H3-2.8-4]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 49)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;3;9)$, $B(2;3;4)$ và $C(2;15;9)$. Một mặt cầu (S) luôn đi qua A, B và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại D. Biết rằng khi CD đạt giá trị nhỏ nhất thì tọa độ tâm của mặt cầu (S) là $I(a;b;c)$. Khi đó $a-b+2c$ bằng

A. -13. **B.** 9. **C.** 2 **D.** 6.

Lời giải

FB tác giả: Lê Văn Đoàn



Ta có: $\overrightarrow{AB}=(0;0;-5)\Rightarrow AB\perp(Oxy)$.

Và $H(2;3;0)$, D là hình chiếu của A, I lên mặt (Oxy).

$\Rightarrow HA=9,\ HB=4$.

Ta có $HD^2=HA.HB\Rightarrow KD=\sqrt{HA.HB}=6$.

$\Rightarrow D$ thuộc đường tròn (C) tâm H, $r=6$.

Gọi K là hình chiếu của C lên $(Oxy)\Rightarrow K(2;15;0)$.

$\Rightarrow HK=12>r\Rightarrow K$ nằm ngoài (C).

Ta có $CD=\sqrt{CK^2+DK^2}=\sqrt{9^2+DK^2}\ge\sqrt{81+(HK-r)^2}=\sqrt{81+(12-6)^2}=3\sqrt{3}$.

$\Rightarrow CD_{\min}=3\sqrt{3}$. Dấu "=" xảy ra khi $H,\ K,\ D$ và D nằm giữa HK.

Ta có: $r=HD=6,\ \ HK=12\Rightarrow\overrightarrow{HK}=2\overrightarrow{HD}\Rightarrow D$ là trung điểm $HK\Rightarrow D(2;9;0)$.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của (S), vì D là hình chiếu của I lên mặt phẳng $(Oxy)\Rightarrow I(2;9;c)$.

$\Rightarrow I$ nằm trên $(P):z=\dfrac{13}{2}$ là mặt phẳng trung trực của AB, $(P)//(Oxy)\Rightarrow c=\dfrac{13}{2}$.

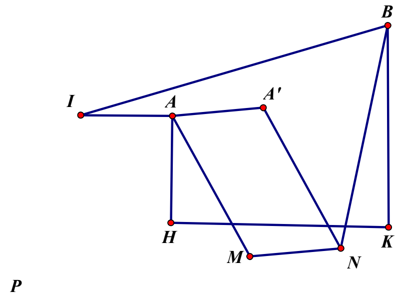
$\Rightarrow a=2,\ b=9,\ c=\dfrac{13}{2}\Rightarrow a-b+2c=6$.

Câu 47. **[2H3-2.8-4]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 49)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;1;1)$ và điểm $B(5;0;5)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng $(P):x+z-2=0$ sao cho $MN=2$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng

A. $3\sqrt{11}$. **B.** $\sqrt{21}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\sqrt{33}$.

Lời giải

FB tác giả: Tân Ngọc



Ta có A, B cùng phía so với (P). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B lên mặt phẳng (P). Khi đó $H(3;1;-1)$, $K(1;0;1)$.

Ta có $\mathrm{d}_A=\mathrm{d}(A,(P))=2\sqrt{2}$, $\mathrm{d}_B=\mathrm{d}(B,(P))=4\sqrt{2}$.

Đặt $A'=T_{\overrightarrow{MN}}(A)$, khi đó ta có $|AM-BN|=|A'N-BN|\le A'B$.

Rõ ràng A' nằm trên đường tròn có tâm A và có bán kính bằng MN, đường tròn này cắt mặt phẳng tạo bởi (AH,BK) tại hai điểm, giả sử I là điểm cách B một khoảng lớn hơn.

Khi đó ta có $|AM-BN|_{max}\Leftrightarrow A'B_{max}\Leftrightarrow A'\equiv I$.

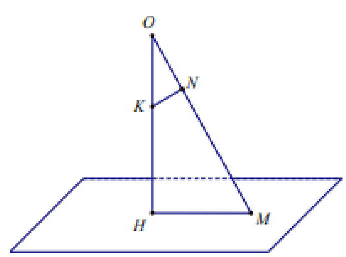
Vậy $A'B_{max}=IB=\sqrt{(d_B-d_A)^2+(HK+MN)^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(3+2)^2}=\sqrt{33}$.

Câu 48. **[2H3-2.8-4]** **(PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 49)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y+z+15=0$. Gọi M là điểm di động trên (P), N là điểm thuộc tia OM sao cho $OM.ON=10$. Khoảng cách nhỏ nhất từ N đến mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu?

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

FB tác giả: Tân Ngọc



Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên (P) và K thuộc tia OH thỏa mãn $OK.OH=10$.

Do $OH=\mathrm{d}(O;(P))=5$ nên $OK=2$.

Lại có: $OK.OH=OM.ON\Rightarrow \Delta ONK$ đồng dạng tam giác OHM. Suy ra $\widehat{ONK}=90°$. Do đó N thuộc đường tròn đường kính OK. Suy ra $\mathrm{d}(N,(P))\ge \mathrm{d}(K,(P))$.

Vậy khi $N \equiv K$ thì khoảng cách từ N đến (P) nhỏ nhất và bằng $KH = 3$.

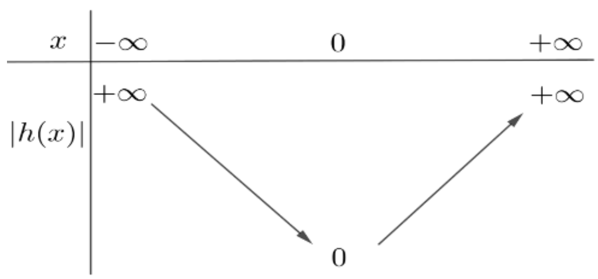
Câu 49. **[2D1-2.6-4] (PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 50)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-7)(x^2-9)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(\left|ax^3 + bx\right| + 2m + 3\right)$ với $a.b > 0$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

FB tác giả: Văn Nguyễn

Ta có BBT của hàm $y = \left|h(x)\right| = \left|ax^3 + bx\right|$ như sau



Ta có $g'(x) = \left|ax^3 + bx\right|' . f'\left(\left|ax^3 + bx\right| + 2m + 3\right) = \dfrac{x\left(3ax^2 + b\right)\left(ax^2 + b\right)}{\left|ax^3 + bx\right|} . f'\left(\left|ax^3 + bx\right| + 2m + 3\right)$.

Rõ ràng $g'(x)$ không xác định tại $x = 0$ và đổi dấu khi x đi qua 0 nên $x = 0$ là 1 điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(\left|ax^3 + bx\right| + 2m + 3\right)$.

Ta có: $f'\left(\left|ax^3 + bx\right| + 2m + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|ax^3 + bx\right| + 2m + 3 = 7 \\ \left|ax^3 + bx\right| + 2m + 3 = 3 \\ \left|ax^3 + bx\right| + 2m + 3 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|ax^3 + bx\right| = 4 - 2m \\ \left|ax^3 + bx\right| = -2m \\ \left|ax^3 + bx\right| = -6 - 2m \end{array}\right.$.

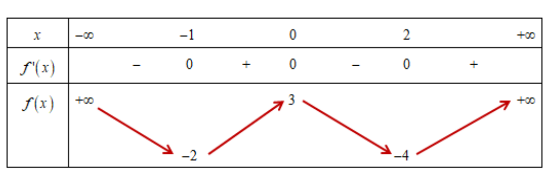
Để hàm số $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì phương trình $g'(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt khác 0 và $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua ít nhất 2 trong số các nghiệm đó.

Từ BBT ta có $4 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 2$

Vì m nguyên dương nên $m = 1$

Vậy có 1 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 50. **[2D1-2.6-4] (PHÁT TRIỂN ĐỀ 101 BGD NĂM 2021 CÂU 50)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(|6x-5|\right)+2021+m\right|$ có 3 điểm cực đại?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

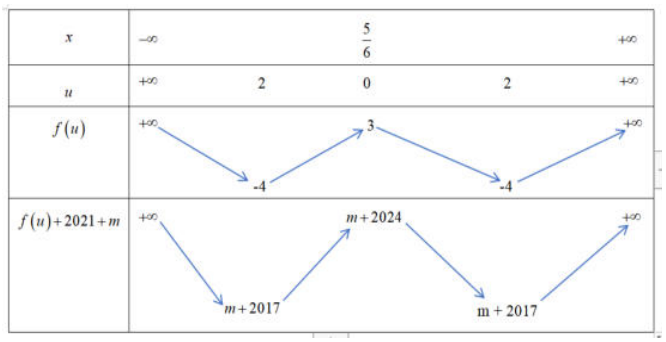
FB tác giả: Nam du

Xét hàm số $y=f\left(|6x-5|\right)+2021+m$

Đặt $u=|6x-5|=\sqrt{(6x-5)^2} \Rightarrow u'=\dfrac{6(6x-5)}{\sqrt{(6x-5)^2}}$

Hàm u đạt cực trị tại $x=\dfrac{5}{6}$

Bảng biến thiên



Suy ra hàm số $y=\left|f(u)+2021+m\right|$ có 3 điểm cực đại

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2017<0 \\ m+2024>0 \end{cases} \Leftrightarrow -2024<m<-2017$$

Do $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\left\{-2023,-2022,-2021,-2020,-2019,-2018\right\}$.

HẾT