|  |  |
| --- | --- |
| SỞ GD&ĐT HƯNG YÊN  **TRƯỜNG THPT CHUYÊN HƯNG YÊN**  **ĐỀ ĐỀ XUẤT** | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI**  **KHU VỰC DUYÊN HẢI & ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**  **LẦN THỨ XIV**  **MÔN: TOÁN - LỚP 10**  *Thời gian làm bài: 180 phút,* *không kể thời gian giao đề* |

**Câu 1 (4,0 *điểm*).** Tìm tất cả các đa thức hệ số thực, không phải đa thức hằng,  sao cho 

**Câu 2 (4,0 *điểm*).** Cho ba số thực  thay đổi, thỏa mãn điều kiện: . Chứng minh rằng .

**Câu 3 (4,0 *điểm*).** Cho tam giác  nhọn  có trung tuyến . Đường thẳng  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  tại điểm thứ hai . Đường thẳng  và  cắt nhau tại , đường thẳng  và  cắt nhau tại . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  tại điểm thứ hai . Gọi  là đường tròn đi qua  và tiếp xúc với  tại ,  là đường tròn đi qua  và tiếp xúc  tại .  cắt  tại điểm thứ hai . Chứng minh rằng .

**Câu 4 (4,0 *điểm*).** Với mỗi số nguyên dương , đặt  ( tổng lấy trên các ước nguyên tố của  và  là số mũ của trong phân tích tiêu chuẩn của ). Chứng minh rằng nếu v ới  nguyên tố lẻ thì .

**Câu 5 (4,0 *điểm*).** Cho số nguyên dương  và  là các số nguyên dương . Một biểu diễn của số nguyên không âm  là một dãy các số nguyên không âm  sao cho . Chứng minh nếu số nguyên không âm  có một biểu diễn thì nó cũng có một biểu diễn mà trong các số  có ít hơn  số khác 0.

**-------- HẾT --------**

***Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.***

|  |  |
| --- | --- |
| SỞ GD&ĐT HƯNG YÊN  **TRƯỜNG THPT CHUYÊN HƯNG YÊN**  **ĐỀ ĐỀ XUẤT** | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI**  **KHU VỰC DUYÊN HẢI & ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**  **LẦN THỨ XIV**  **MÔN: TOÁN - LỚP 10** |

**HƯỚNG DẪN CHẤM**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Câu 1**  **4.0 đ** | Tìm tất cả các đa thức hệ số thực, không phải đa thức hằng,  sao cho | | |
|  | Giả sử  là các đa thức thảo mãn đề bài. Gọi bậc của lần lượt là . Khi đó từ  ta có . Suy ra .  ------------------------------------------------------------------  Đặt  ta có  So sánh hệ số của  hai vế, ta được hệ số của  trong  bằng 1.  Ta cũng có  nên  ------------------------------------------------------------------  Thay vào phương trình ban đầu ta được    .  Do  nhận vô hạn giá trị nên ta có .  Đặt . Khi đó  Do đó . Thử lại thỏa mãn | | ***1,0 điểm***  ***1,0 điểm***  ***2,0 điểm*** |
| **Câu 2**  **4.0 đ** | Cho ba số thực  thay đổi, thỏa mãn điều kiện: . Chứng minh rằng . | | |
|  | Từ giả thiết, ta có:  (1)  Nếu  từ (1) suy ra  nên  vô lý.  Do đó từ (1), phải có . | | ***1,0 điểm*** |
| Khi đó đặt | | ***1,0 điểm*** |
| Ta có đẳng thức .  Vậy | | ***1,0 điểm*** |
|  | Ta chứng minh  (2)  Ta có (2)  .  Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  . Vậy . | | ***1,0 điểm*** |
| **Câu 3**  **4.0 đ** | Cho tam giác  nhọn  có trung tuyến . Đường thẳng  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  tại điểm thứ hai . Đường thẳng  và  cắt nhau tại , đường thẳng  và  cắt nhau tại . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  tại điểm thứ hai . Gọi  là đường tròn đi qua  và tiếp xúc với  tại ,  là đường tròn đi qua  và tiếp xúc  tại .  cắt  tại điểm thứ hai . Chứng minh rằng . | | |
|  |  | |  |
|  | Vì các tứ giác  nội tiếp nên ta có  hay  thẳng hàng.  Ta cũng có | | ***1,0 điểm*** |
|  | Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác  với bộ  điểm thẳng hàng  ta có:  hay  Tương tự, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác  với bộ  điểm thẳng hàng  ta có:  Do đó , hay , suy ra | | ***1,0 điểm*** |
|  | Từ  và  ta có , hay  là tiếp tuyến của . Tương tự ta cũng có  là tiếp tuyến của  là đường đối trung trong tam giác , nên .  Ta gọi  là hình chiếu của  lên , khi đó  điểm  cùng thuộc đường tròn đường kính  nên ta có biến đổi góc : | | ***1,0 điểm*** |
|  | Do đó  hay  là tiếp tuyến của , tức .  Chứng minh tương tự ta có , hay .  Vậy , tức . | | ***1,0 điểm*** |
| **Câu 4**  **4.0 đ** | Với mỗi số nguyên dương , đặt  ( tổng lấy trên các ước nguyên tố của  và  là số mũ của trong phân tích tiêu chuẩn của ). Chứng minh rằng nếu v ới  nguyên tố lẻ thì . | | |
|  | Với  thì . Bài toán đúng  Với  thì . Bài toán đúng. | | ***0,5 điểm*** |
| Với  và  .  Ta chứng minh  (\*) | | ***0,5 điểm*** |
| Ta có  đúng với mọi  Vậy (\*) đúng với mọi  Do  và  nên tồn tại ước nguyên tố  (lẻ do  lẻ).  Khi đó .  Gọi  và  không là ước của , suy ra . | | ***0,5 điểm*** |
| Nếu , mà  nguyên tố phân biệt nên  hay  mà , vô lý do  lẻ.  Do đó . Lại có ,  nguyên tố suy ra  nên có  , điều này chứng tỏ nếu  có ước nguyên tố khác  thì ước nguyên tố có dạng   . | | ***0,5 điểm*** |
| Giả sử v ới  là các số nguyên tố phân biệt, . Khi đó  và .  .    .  Do đó      Áp dụng công thức    .  Ta có .  Suy ra | | ***1,0 điểm*** |
| Vì  là số nguyên tố lớn hơn  ( hoặc ) suy ra .  Từ đó có      hay  (1).  Mà  (2).  Từ (1) và (2) ta có    .  Do  nên  (đpcm). | | ***1,0 điểm*** |
| **Câu 5**  **4.0 đ** | Cho số nguyên dương  và  là các số nguyên dương . Một biểu diễn của số nguyên không âm  là một dãy các số nguyên không âm  sao cho . Chứng minh nếu số nguyên không âm  có một biểu diễn thì nó cũng có một biểu diễn mà trong các số  có ít hơn  số khác 0. | | |
|  | Ta xem mỗi biểu diễn của  như là một *đa tập hợp* ( có thể xem như một dãy kí tự có lặp)    Với mỗi biểu diễn của số nguyên không âm , ta định nghĩa *giá* của  là tập con của  mà trong tập con đó, mỗi số trong dãy (nếu các số này xuất hiện trong đa tập đó) xuất hiện ít nhất một lần. | | ***1,0 điểm*** |
| Kết luận của bài toán tương đương với khẳng định: nếu  có 1 biểu diễn thì  sẽ có 1 biểu diễn mà *giá* của nó có số lượng phần tử nhỏ hơn .  Không mất tính tổng quát, có thể giả sử  và gọi  là dãy kí tự nhỏ nhất ( tức là dãy ký tự có số lượng ký tự ít nhất) trong tất cả các biểu diễn của . Ta chứng minh  thỏa mãn bài toán. | | ***1,0 điểm*** |
| Giả sử ngược lại nghĩa là *giá* của  có kích thước . Đặt  là một tập con (đa tập con) bất kỳ của *giá* của  mà chứa đúng  kí tự và với mỗi , ta tính tổng các phần tử trong . Do mỗi tổng này là một số nguyên nằm giữa  và  (tức có  giá trị )  Mặt khác, tập  chỉ có đúng  tập con phân biệt. Vì  nên theo Drichle, tồn tại 2 tập con  có cùng giá trị tổng các phần tử trong chúng. | | ***1,0 điểm*** |
| Vì nên chúng đều là các tập con (đa tập con) của .  Đặt .  Do  có tổng các phần tử trong chúng bằng nhau nên  đều là hai biểu diễn của  (vì tổng các phần tử trong  bằng tổng các phần tử trong , tức bằng ) nên  hoặc  lại là dãy kí tự nhỏ hơn  ( phụ thuộc vào  dãy nào có số kí tự ít hơn ), mâu thuẫn với cách chọn . Mâu thuẫn này khẳng định cho kết luận cảu bài toán là đúng. | | ***1,0 điểm*** |
| ***Người ra đề***  ***Hoàng Tuấn Doanh ()*** | | ***Trần Thị Hằng (097210528)*** | |