|  |  |
| --- | --- |
| SỞ GD&ĐT HƯNG YÊN**TRƯỜNG THPT CHUYÊN HƯNG YÊN****ĐỀ ĐỀ XUẤT** | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **KHU VỰC DUYÊN HẢI & ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ****LẦN THỨ XIV****MÔN: TOÁN - LỚP 10***Thời gian làm bài: 180 phút,* *không kể thời gian giao đề* |

**Câu 1 (4,0 *điểm*).** Tìm tất cả các đa thức hệ số thực, không phải đa thức hằng,  sao cho 

**Câu 2 (4,0 *điểm*).** Cho ba số thực  thay đổi, thỏa mãn điều kiện: . Chứng minh rằng .

**Câu 3 (4,0 *điểm*).** Cho tam giác  nhọn  có trung tuyến . Đường thẳng  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  tại điểm thứ hai . Đường thẳng  và  cắt nhau tại , đường thẳng  và  cắt nhau tại . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  tại điểm thứ hai . Gọi  là đường tròn đi qua  và tiếp xúc với  tại ,  là đường tròn đi qua  và tiếp xúc  tại .  cắt  tại điểm thứ hai . Chứng minh rằng .

**Câu 4 (4,0 *điểm*).** Với mỗi số nguyên dương , đặt  ( tổng lấy trên các ước nguyên tố của  và  là số mũ của trong phân tích tiêu chuẩn của ). Chứng minh rằng nếu v ới  nguyên tố lẻ thì .

**Câu 5 (4,0 *điểm*).** Cho số nguyên dương  và  là các số nguyên dương . Một biểu diễn của số nguyên không âm  là một dãy các số nguyên không âm  sao cho . Chứng minh nếu số nguyên không âm  có một biểu diễn thì nó cũng có một biểu diễn mà trong các số  có ít hơn  số khác 0.

**-------- HẾT --------**

***Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.***

|  |  |
| --- | --- |
| SỞ GD&ĐT HƯNG YÊN**TRƯỜNG THPT CHUYÊN HƯNG YÊN****ĐỀ ĐỀ XUẤT** | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **KHU VỰC DUYÊN HẢI & ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ****LẦN THỨ XIV****MÔN: TOÁN - LỚP 10** |

**HƯỚNG DẪN CHẤM**

|  |  |
| --- | --- |
| **Câu 1****4.0 đ** | Tìm tất cả các đa thức hệ số thực, không phải đa thức hằng,  sao cho  |
|  | Giả sử  là các đa thức thảo mãn đề bài. Gọi bậc của lần lượt là . Khi đó từ  ta có . Suy ra . ------------------------------------------------------------------Đặt  ta có So sánh hệ số của  hai vế, ta được hệ số của  trong  bằng 1. Ta cũng có  nên ------------------------------------------------------------------Thay vào phương trình ban đầu ta được . Do  nhận vô hạn giá trị nên ta có . Đặt . Khi đó Do đó . Thử lại thỏa mãn  | ***1,0 điểm******1,0 điểm******2,0 điểm*** |
| **Câu 2****4.0 đ** | Cho ba số thực  thay đổi, thỏa mãn điều kiện: . Chứng minh rằng . |
|  | Từ giả thiết, ta có:  (1)Nếu  từ (1) suy ra  nên  vô lý.Do đó từ (1), phải có . | ***1,0 điểm*** |
| Khi đó đặt  | ***1,0 điểm*** |
| Ta có đẳng thức . Vậy  | ***1,0 điểm*** |
|  | Ta chứng minh  (2)Ta có (2) . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi . Vậy .  | ***1,0 điểm*** |
| **Câu 3****4.0 đ** | Cho tam giác  nhọn  có trung tuyến . Đường thẳng  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  tại điểm thứ hai . Đường thẳng  và  cắt nhau tại , đường thẳng  và  cắt nhau tại . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  tại điểm thứ hai . Gọi  là đường tròn đi qua  và tiếp xúc với  tại ,  là đường tròn đi qua  và tiếp xúc  tại .  cắt  tại điểm thứ hai . Chứng minh rằng . |
|  |  |  |
|  | Vì các tứ giác  nội tiếp nên ta có  hay  thẳng hàng.Ta cũng có   |  ***1,0 điểm*** |
|  | Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác  với bộ  điểm thẳng hàng  ta có: hay Tương tự, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác  với bộ  điểm thẳng hàng  ta có: Do đó , hay , suy ra  | ***1,0 điểm*** |
|  | Từ  và  ta có , hay  là tiếp tuyến của . Tương tự ta cũng có  là tiếp tuyến của  là đường đối trung trong tam giác , nên .Ta gọi  là hình chiếu của  lên , khi đó  điểm  cùng thuộc đường tròn đường kính  nên ta có biến đổi góc : | ***1,0 điểm*** |
|  | Do đó  hay  là tiếp tuyến của , tức .Chứng minh tương tự ta có , hay .Vậy , tức . | ***1,0 điểm*** |
| **Câu 4****4.0 đ** | Với mỗi số nguyên dương , đặt  ( tổng lấy trên các ước nguyên tố của  và  là số mũ của trong phân tích tiêu chuẩn của ). Chứng minh rằng nếu v ới  nguyên tố lẻ thì . |
|  | Với  thì . Bài toán đúng Với  thì . Bài toán đúng. | ***0,5 điểm*** |
| Với  và . Ta chứng minh  (\*) | ***0,5 điểm*** |
| Ta có   đúng với mọi Vậy (\*) đúng với mọi Do  và  nên tồn tại ước nguyên tố  (lẻ do  lẻ).Khi đó . Gọi  và  không là ước của , suy ra . | ***0,5 điểm*** |
| Nếu , mà  nguyên tố phân biệt nên  hay  mà , vô lý do  lẻ. Do đó . Lại có ,  nguyên tố suy ra  nên có , điều này chứng tỏ nếu  có ước nguyên tố khác  thì ước nguyên tố có dạng   . | ***0,5 điểm*** |
| Giả sử v ới  là các số nguyên tố phân biệt, . Khi đó  và . . . Do đó Áp dụng công thức. Ta có . Suy ra  | ***1,0 điểm*** |
| Vì  là số nguyên tố lớn hơn  ( hoặc ) suy ra .Từ đó có hay  (1).Mà   (2).Từ (1) và (2) ta có . Do  nên (đpcm). | ***1,0 điểm*** |
| **Câu 5** **4.0 đ** | Cho số nguyên dương  và  là các số nguyên dương . Một biểu diễn của số nguyên không âm  là một dãy các số nguyên không âm  sao cho . Chứng minh nếu số nguyên không âm  có một biểu diễn thì nó cũng có một biểu diễn mà trong các số  có ít hơn  số khác 0. |
|  | Ta xem mỗi biểu diễn của  như là một *đa tập hợp* ( có thể xem như một dãy kí tự có lặp) Với mỗi biểu diễn của số nguyên không âm , ta định nghĩa *giá* của  là tập con của  mà trong tập con đó, mỗi số trong dãy (nếu các số này xuất hiện trong đa tập đó) xuất hiện ít nhất một lần.  | ***1,0 điểm*** |
| Kết luận của bài toán tương đương với khẳng định: nếu  có 1 biểu diễn thì  sẽ có 1 biểu diễn mà *giá* của nó có số lượng phần tử nhỏ hơn . Không mất tính tổng quát, có thể giả sử  và gọi  là dãy kí tự nhỏ nhất ( tức là dãy ký tự có số lượng ký tự ít nhất) trong tất cả các biểu diễn của . Ta chứng minh  thỏa mãn bài toán. | ***1,0 điểm*** |
| Giả sử ngược lại nghĩa là *giá* của  có kích thước . Đặt  là một tập con (đa tập con) bất kỳ của *giá* của  mà chứa đúng  kí tự và với mỗi , ta tính tổng các phần tử trong . Do mỗi tổng này là một số nguyên nằm giữa  và  (tức có  giá trị )Mặt khác, tập  chỉ có đúng  tập con phân biệt. Vì  nên theo Drichle, tồn tại 2 tập con  có cùng giá trị tổng các phần tử trong chúng. | ***1,0 điểm*** |
| Vì nên chúng đều là các tập con (đa tập con) của . Đặt .Do  có tổng các phần tử trong chúng bằng nhau nên  đều là hai biểu diễn của  (vì tổng các phần tử trong  bằng tổng các phần tử trong , tức bằng ) nên  hoặc  lại là dãy kí tự nhỏ hơn  ( phụ thuộc vào  dãy nào có số kí tự ít hơn ), mâu thuẫn với cách chọn . Mâu thuẫn này khẳng định cho kết luận cảu bài toán là đúng. | ***1,0 điểm*** |
|  ***Người ra đề*** ***Hoàng Tuấn Doanh ()***  | ***Trần Thị Hằng (097210528)*** |