

Độ lệch chuẩn:

$$S_A^2 = \frac{4 \times (15 - 32,22)^2 + 5 \times (25 - 32,22)^2 + 3 \times (35 - 32,22)^2 + 4 \times (45 - 32,22)^2 + 2 \times (55 - 32,22)^2}{18}$$

$$\Rightarrow s_A = \sqrt{S_A^2} \approx 11,79$$

Khu dân cư B

$$\bar{x}_B = \frac{2 \times 15 + 5 \times 25 + 4 \times 35 + 3 \times 45 + 1 \times 55}{15} \approx 32,33$$

Số trung bình:

Độ lệch chuẩn:

$$S_B^2 = \frac{2 \times (15 - 32,33)^2 + 5 \times (25 - 32,33)^2 + 4 \times (35 - 32,33)^2 + 3 \times (45 - 32,33)^2 + 1 \times (55 - 32,33)^2}{15}$$

$$\Rightarrow S_B = \sqrt{S_B^2} \approx 11,31$$

Vậy khu dân cư B có độ lệch chuẩn nhỏ hơn so với độ lệch chuẩn của khu dân cư A, cho thấy mức tiêu thụ nước hàng tháng của khu dân cư B đồng đều hơn khu dân cư A.

Bài 10. a) Khoảng biến thiên: $R = 8.6 - 4.4 = 4.2$ điểm.

Tứ phân vị:

Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm:

4,4 4,8 5,0 5,2 5,4 5,4 5,6 5,8 5,8 6,0 6,0 6,2 6,2 6,4 6,6 6,8 7,0
7,2 7,2 7,4 7,6 7,8 8,0 8,2 8,6

Mẫu là 25 nên số trung vị là số thứ 13 nên $Q_2 = 6,2$.

Tứ phân vị thứ nhất là trung vị của nửa số liệu bên trái Q_1 :

$$Q_1 = \frac{1}{2}(x_6 + x_7) = \frac{5.4 + 5.6}{2} = 5.5$$

Tứ phân vị thứ ba là trung vị của nửa số liệu bên phải Q_3 :

$$Q_3 = \frac{1}{2}(x_{18} + x_{19}) = \frac{7.2 + 7.4}{2} = 7.3$$

Khoảng tứ phân vị: $\Delta Q = Q_3 - Q_1 = 7.3 - 5.5 = 1.8$

Số trung bình: $\bar{x} = \frac{4,4 + 4,8 + 5,0 + 5,4 + 5,4 + 5,6 + \dots + 8,0 + 8,2 + 8,6}{25} = 6,296$

Phương sai: $S^2 = \frac{1}{25} [(4,4 - 6,296)^2 + (4,8 - 6,296)^2 + \dots + (8,6 - 6,296)^2] \approx 1.32$

Độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{S} = \sqrt{1.32} \approx 1.15$

b) Lập bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là $[4;5)$ và độ dài mỗi nhóm bằng 1

Điểm	[4;5)	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)
Số học sinh (Tần số)	2	7	9	5	2

c) Khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.

Khoảng biến thiên: $R' = 9 - 4 = 5$.

Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm:

Giá trị đại diện cho mỗi nhóm

Điểm	[4;5)	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)
Giá trị đại diện	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
Số học sinh (Tần số)	2	7	9	5	2

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm $[5;6): Q'_1 = 5 + \frac{\frac{25}{4} - 2}{7} \cdot (6 - 5) \approx 5,61$.

Nhóm chứa tứ phân vị thứ hai là nhóm $[6;7): Q'_2 = 6 + \frac{2 \cdot \frac{25}{4} - (2+7)}{9} \cdot (7 - 6) \approx 6,39$.

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là nhóm $[7;8): Q'_3 = 7 + \frac{3 \cdot \frac{25}{4} - (2+7+9)}{5} \cdot (8 - 7) = 7,15$.

Khoảng tứ phân vị là: $\Delta Q' = 7,15 - 5,61 = 1,54$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm: $\bar{x} = \frac{2 \cdot 4,5 + 7 \cdot 5,5 + 9 \cdot 6,5 + 5 \cdot 7,5 + 2 \cdot 8,5}{25} = 6,42$.

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm:

$$S^2 = \frac{1}{25} (2 \cdot 4,5^2 + 7 \cdot 5,5^2 + 9 \cdot 6,5^2 + 5 \cdot 7,5^2 + 2 \cdot 8,5^2) - 6,42^2 \approx 1,22$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là: $S' = \sqrt{S^2} = \sqrt{1,22} \approx 1,10$.

Bài 11. Do mẫu $n = 40$ nên tứ phân vị thứ 2 là số thứ 20 ứng với khoảng [160;164] và số thứ 21

ứng với khoảng $[165;169]$ nên tứ phân vị thứ hai $Q_2 = \frac{164 + 165}{2} = 164,5$

Bài 12. Do mẫu $n = 20$ nên tứ phân vị thứ 1 là số thứ 5 ứng với khoảng $[11;12)$ và số thứ 6 ứng với khoảng $[12;13)$ nên tứ phân vị thứ nhất $Q_2 = 12$.

Do mẫu $n=20$ nên tứ phân vị thứ 3 là số thứ 15 ứng với khoảng $[13;14)$ và số thứ 16 ứng với khoảng $[14;15)$ nên tứ phân vị thứ nhất $Q_2=14$.

Bài 13. Cân nặng trung bình của giống A là:
$$\frac{1,05 \cdot 8 + 1,15 \cdot 28 + 1,25 \cdot 32 + 1,35 \cdot 17}{85} = 1,22$$

Cân nặng trung bình của giống B là:
$$\frac{1,05 \cdot 13 + 1,15 \cdot 14 + 1,25 \cdot 24 + 1,35 \cdot 14}{65} = 1,21$$

Vậy theo số trung bình thì cân nặng của lợn con giống A lớn hơn giống B .

Cân nặng	$[1;1,1)$	$[1,1;1,2)$	$[1,2;1,3)$	$[1,3;1,4)$
Giá trị đại diện	1,05	1,15	1,25	1,35
Số con giống A	8	28	32	17
Tần số lũy tiến nhóm A	8	36	68	85
Số con giống B	13	14	24	14
Tần số lũy tiến nhóm B	13	27	51	65

b)
$$Q_{1A} = 1,1 + \frac{\frac{85}{4} - 8}{28} (1,2 - 1,1) = 1,15$$

$$Q_{3A} = 1,2 + \frac{\frac{3 \cdot 85}{4} - 36}{32} (1,3 - 1,2) = 1,29$$

$$Q_{1B} = 1,1 + \frac{\frac{65}{4} - 13}{14} (1,2 - 1,1) = 1,12$$

$$Q_{3B} = 1,2 + \frac{\frac{3 \cdot 65}{4} - 27}{24} (1,3 - 1,2) = 1,29$$

c)
$$s_A^2 = \frac{8 \cdot (1,05 - 1,22)^2 + 28 \cdot (1,15 - 1,22)^2 + 32 \cdot (1,25 - 1,22)^2 + 17 \cdot (1,35 - 1,22)^2}{85} = 8,05 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow s_A = \sqrt{s_A^2} = 0,09$$

$$s_B^2 = \frac{13 \cdot (1,05 - 1,21)^2 + 14 \cdot (1,15 - 1,21)^2 + 24 \cdot (1,25 - 1,21)^2 + 14 \cdot (1,35 - 1,21)^2}{65} = 0,0107$$

$$\Rightarrow s_B = \sqrt{s_B^2} = 0,1$$

Bài 14. Mẫu là 25 nên tứ phân vị thứ nhất là số thứ 6 và số thứ 7 ứng với khoảng $[10;12)$

$$Q_1 = 10 + \frac{\frac{25}{4} - 4}{6}(12 - 10) = 10,75$$

Mẫu là 25 nên tứ phân vị thứ ba là số thứ 18 ứng với $[12;14)$ và số thứ 19 ứng với khoảng $[14;16)$

$$Q_3 = 14$$

Khoảng tứ phân vị $\Delta Q = Q_3 - Q_1 = 14 - 10,75 = 3,25$

Bài 15 .

a) Bảng tần số ghép nhóm:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số	Tần số tích lũy
$[100,120)$	110	1	1
$[120,140)$	130	4	5
$[140,160)$	150	7	12
$[160,180)$	170	11	23
$[180,200)$	190	7	30
		$n = 30$	

$$\bar{x} = \frac{1.110 + 4.130 + 7.150 + 11.170 + 7.190}{30} \approx 163$$

b) Số trung bình cộng: (lượt)

$$n = 30 \Rightarrow \frac{n}{2} = 15$$

Số phần tử của mẫu là .

Nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 15 .

$$M_e = 160 + \frac{15 - 12}{11} \cdot 20 \approx 165$$

Ta có số trung vị của mẫu số liệu là (lượt)

Số phần tử của mẫu là $n = 40$.

$$\frac{n}{4} = 7,5$$

Ta có: . Nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 7,5.

Ta có tứ phân vị thứ nhất là $Q_1 = 140 + \frac{7,5 - 5}{7} \cdot 20 \approx 147$ (lượt).

Ta có: $\frac{3n}{4} = 22,5$. Nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 22,5

Ta có tứ phân vị thứ ba là $Q_3 = 160 + \frac{15 - 12}{11} \cdot 20 \approx 165$ (lượt).

Vậy tứ phân vị của mẫu số liệu trên là $Q_1 = 147; Q_2 = 165; Q_3 = 165$.

Bài 16. Bảng đã hiệu chỉnh.

a) Nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là nhóm $[18; 22)$.

Do đó $u_m = 18, n_{m-1} = 78, n_m = 120, n_{m+1} = 45, u_{m+1} - u_m = 22 - 18 = 4$.

$$M_o = 18 + \frac{120 - 78}{(120 - 78) + (120 - 45)} \cdot 4 = \frac{758}{39} \approx 19,4$$

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

b) Dựa vào kết quả trên ta có thể dự đoán rằng nếu công ty xây nhà ở mức giá 19,4 triệu đồng /m² thì sẽ có nhiều người có nhu cầu mua nhất.

Bài 17. Hiệu chỉnh bảng lại như sau:

Số cuộc gọi	$[2, 5; 5, 5)$	$[5, 5; 8, 5)$	$[8, 5; 11, 5)$	$[11, 5; 14, 5)$	$[14, 5; 17, 5)$
Số ngày	5	10	3	10	2

Nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là nhóm $[5, 5; 8, 5)$ và $[11, 5; 14, 5)$.

$$[5, 5; 8, 5) M_o^A = 5,5 + \frac{10 - 5}{(10 - 5) + (10 - 3)} \cdot 3 = 6,75$$

Nhóm

$$[11, 5; 14, 5) M_o^B = 11,5 + \frac{10 - 3}{(10 - 3) + (10 - 2)} \cdot 3 = 12,9$$

Nhóm

Vậy anh An thực hiện cuộc gọi khoảng 7 cuộc gọi hoặc 13 cuộc gọi là nhiều nhất.

Bài 18. Bảng đã hiệu chỉnh nên

Nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là nhóm $[70, 8; 71, 6)$ và $[71, 6; 72, 4)$.

$$[70, 8; 71, 6): M_o^A = 70,8 + \frac{10 - 6}{(10 - 6) + (10 - 10)} \cdot 0,8 = 71,6$$

Nhóm

$$M_o^B = 71,6 + \frac{10 - 10}{(10 - 10) + (10 - 9)} \cdot 0,8 = 71,6$$

Nhóm $[71, 6; 72, 4)$:

Vậy anh Võ ném khoảng $71,6 \text{ m}$ là nhiều nhất

Bài 19. Bảng đã hiệu chỉnh nên

Nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là nhóm $[20; 25)$ nên một là

$$M_o = 20 + \frac{6 - 0}{(6 - 0) + (6 - 5)} \cdot (25 - 20) = \frac{170}{7}$$

Vậy Cô Thúy Kiều nhảy khoảng $24,3$ phút là nhiều nhất.

Bài 20. Ta có bảng thống kê chiều cao học sinh lớp 12 theo giá trị đại diện:

Chiều cao đại diện	153	159	165	171	177	183
Số học sinh	5	18	40	26	8	3

- Chiều cao trung bình của học sinh lớp 11:

$$\bar{x} = \frac{153.5 + 159.18 + 165.40 + 171.26 + 177.8 + 183.3}{100} = 166,38$$

- Ta có nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là $[162; 168)$, khi đó $u_m = 162, u_{m+1} = 168$ và $n_m = 40, n_{m+1} = 26, n_{m-1} = 18$

Một của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$\begin{aligned} M_0 &= u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot (u_{m+1} - u_m) \\ &= 162 + \frac{40 - 18}{(40 - 18) + (40 - 26)} \cdot (168 - 162) \approx 165,67 \end{aligned}$$

- Ta có $n = 100$ nên trung vị của mẫu số liệu thuộc nhóm $[162; 168)$, khi đó $u_m = 162, u_{m+1} = 168, n_m = 40, C = 5 + 18 = 23$

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m) = 162 + \frac{\frac{100}{2} - 23}{40} \cdot (168 - 162) = 166,05$$

- Xác định tứ phân vị:

Tứ phân vị thứ hai: $Q_2 = M_e = 166,05$

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$ là $x_{25} \in [162; 168)$. Do đó tứ phân vị thứ nhất của mẫu ghép nhóm là:

$$Q_1 = u_m + \frac{\frac{n}{4} - C}{n_m} (u_{m+1} - u_m) = 162 + \frac{\frac{100}{4} - 23}{40} \cdot (168 - 162) = 162,3$$

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$ là $x_{76} \in [168; 174)$, với $C = 5 + 18 + 40 = 63$. Do đó tứ phân vị thứ ba của mẫu ghép nhóm là

$$Q_3 = u_m + \frac{\frac{3n}{4} - C}{n_m} (u_{m+1} - u_m) = 168 + \frac{\frac{3 \cdot 100}{4} - 63}{26} \cdot (174 - 168) \approx 170,77$$

- Xác định phương sai và độ lệch chuẩn:

$$s^2 = \frac{5 \times (153 - 166,38)^2 + 18 \times (159 - 166,38)^2 + 40 \times (165 - 166,38)^2 + 26 \times (171 - 166,38)^2 + 8 \times (177 - 166,38)^2 + 3 \times (183 - 166,38)^2}{100}$$

$$= 42,8$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{s^2} = 6,54$$

Chủ đề 4. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

BÀI 6. DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

Bài 1:

Cách 1:

Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ mà trục đối xứng của parabol trùng với trục tung, trục hoành trùng với đường tiếp đất của cổng.

Khi đó parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + c$.

Vì (P) đi qua đỉnh $I(0; 12,5)$ nên ta có $c = 12,5$.

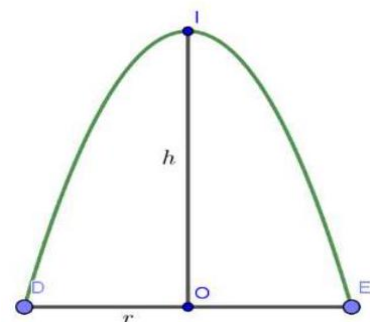
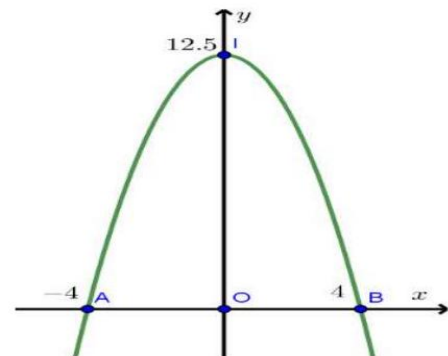
(P) cắt trục hoành tại hai điểm $A(-4; 0)$ và $B(4; 0)$ nên ta có

$$0 = 16a + c \Rightarrow a = \frac{-c}{16} = -\frac{25}{32} \quad (P): y = -\frac{25}{32}x^2 + 12,5$$

$$S = \int_{-4}^4 \left(-\frac{25}{32}x^2 + 12,5 \right) dx = \frac{200}{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích của cổng là:

Cách 2:



Ta có parabol đã cho có chiều cao là $h = 12,5 \text{ m}$ và bán kính đáy $OD = OE = 4 \text{ m}$.

$$S = \frac{4}{3}rh = \frac{200}{3} (\text{m}^2)$$

Do đó diện tích parabol đã cho là:

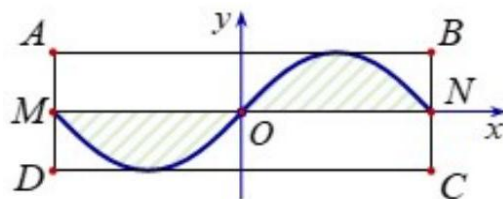
Bài 2:

Chọn hệ tọa độ Oxy (như hình bên). Khi đó

Diện tích hình chữ nhật là $S_1 = 4\pi$

Diện tích phần đất được tô màu đen là

$$S_2 = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = 4$$



Tính diện tích phần còn lại: $S = S_1 - S_2 = 4\pi - 4 = 4(\pi - 1)$

Bài 3:

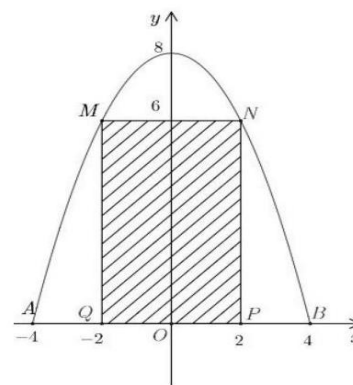
Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Phương trình parabol có dạng $(P): y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} A(-4;0) \in (P) \\ B(4;0) \in (P) \\ N(2;6) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a - 4b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = 8 \end{cases}$$

Ta có:

$$\Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$$



$$S = \int_{-4}^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 8 \right) dx - S_{MNPQ} = \frac{128}{3} - 4 \cdot 6 = \frac{56}{3}$$

Diện tích để trang trí hoa là:

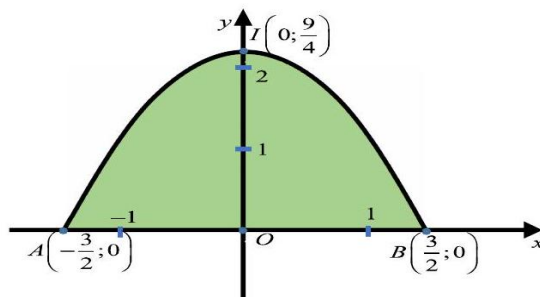
$$\frac{56}{3} \cdot 200000 \approx 3733300 \text{ đồng.}$$

Bài 4:

Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do

tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục

tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$.



$$\begin{cases} \frac{9}{4} = c, (I \in (P)) \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0 (A \in (P)) \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = 0 (B \in (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{9}{4} \\ a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình:

$$(P): y = -x^2 + \frac{9}{4}$$

Vậy

Dựa vào đồ thị, diện tích cửa parabol là:

$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx = 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx = 2 \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{9}{4}x \right) \Big|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \text{ m}^2$$

Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2} \cdot 1500000 = 6750000$ đồng.

Bài 5:

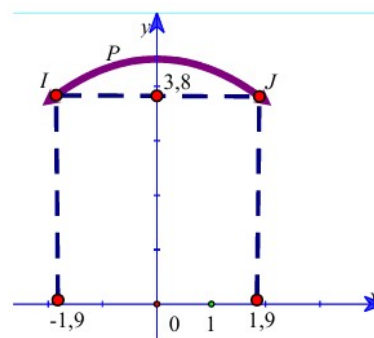
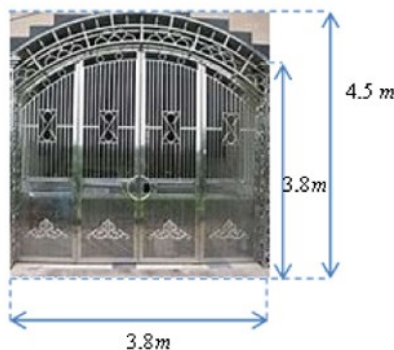
Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Trong đó

$$I \left(-\frac{19}{10}; \frac{19}{5} \right), J \left(\frac{19}{10}; \frac{19}{5} \right)$$

Đường cong phía trên là một parabol có phương trình dạng

$$y = ax^2 + b, \text{ với}$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$



Do Parabol đi qua các điểm I, J và chiều cao cổng là $\frac{9}{2}$ m nên có $y = -\frac{70}{361}x^2 + \frac{9}{2}$

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$$y = -\frac{70}{361}x^2 + \frac{9}{2}, \text{ trục hoành và hai đường thẳng } x = -\frac{19}{10}; x = \frac{19}{10}$$

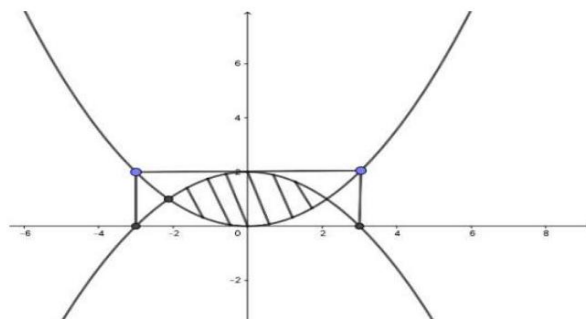
$$S = \int_{-\frac{19}{10}}^{\frac{19}{10}} \left(-\frac{70}{361}x^2 + \frac{9}{2} \right) dx = \frac{1216}{75}$$

Ta có

Vậy ông X phải trả số tiền để làm cái cửa sắt

$$\text{là: } \frac{1216}{75} \times 1300000 \approx 21077330 \text{ (đồng).}$$

Bài 6:



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Ta lập được phương trình các parabol là $y = \frac{2}{9}x^2$ và $y = -\frac{2}{9}x^2 + 2$. Khi đó mảnh vườn nằm ở

miền trong hai parabol là hình phẳng giới hạn bởi 2 đường $y = \frac{2}{9}x^2$ và $y = -\frac{2}{9}x^2 + 2$.

$$S = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \left(-\frac{4}{9}x^2 + 2 \right) dx = 4\sqrt{2} \text{ m}^2$$

Khi đó diện tích của mảnh vườn nằm trong hai parabol là:

Diện tích hình chữ nhật là: 12 m^2 .

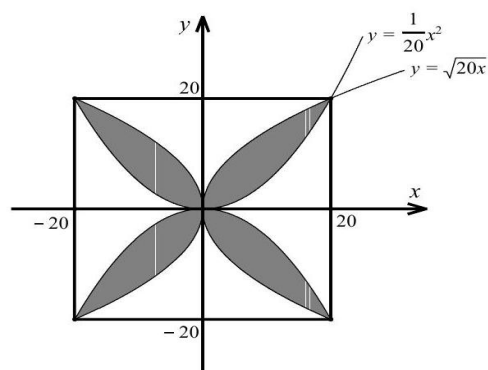
Khi đó tỉ số diện tích phần mảnh vườn nằm ở miền trong hai parabol với diện tích phần còn lại

$$\text{là: } \frac{4\sqrt{2}}{12 - 4\sqrt{2}} = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{7}$$

Bài 7:

a) Diện tích một cánh hoa là diện tích hình phẳng được tính theo công thức sau:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{20} \left(\sqrt{20x} - \frac{1}{20}x^2 \right) dx \\ &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{20}\sqrt{x^3} - \frac{1}{60}x^3 \right) \Big|_0^{20} = \frac{400}{3} (\text{cm}^2) \end{aligned}$$



b) Diện tích hoa văn trang trí bằng bốn lần diện tích một cánh hoa được tính theo công thức sau:

$$S = 4S_1 = 4 \int_0^{20} \left(\sqrt{20x} - \frac{1}{20}x^2 \right) dx = 4 \left(\frac{2}{3}\sqrt{20}\sqrt{x^3} - \frac{1}{60}x^3 \right) \Big|_0^{20} = \frac{1600}{3} (\text{cm}^2)$$

Bài 8:

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Phương trình parabol có dạng $y = a \cdot x^2 (P)$.

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6; -18)$ suy ra

$$-18 = a \cdot (-6)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}$$

Từ hình vẽ ta có:

