PHÒNG GD&ĐT QUẬN CẦU GIẤY
TRƯỜNG THCS CẦU GIẤY

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ KIỂM TRA CLB VĂN HÓA LỚP 9 VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂ HỌC SINH GIỎI LỚP 9
VÒNG II_2023-2024
Môn kiểm tra: Toán
Ngày thi: 21/09/2023
Thời gian làm bài: 120 phút
(Không tính thời gian phát đề)

Bài 1. (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}+1}-\dfrac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}\right):\dfrac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ với $x>0, x\neq 4$.

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

2. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $2a^2-3ab+2b^2=1, b^2-3bc+4c^2=2$ và $c^2+3ca-a^2=3$. Tính giá trị của biểu thức $B=a^4+b^4+c^4$.

Bài 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $4x^2-9=5x+6\sqrt{x+1}$.

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a;b)$ thỏa mãn $7a^2-1$ chia hết cho $7ab-1$ và a^2+b+2 là số chính phương.

Bài 3. (4,0 điểm)

1. Cho các số hữu tỉ x,y thỏa mãn $x^3-2x=y^3-2y$. Chứng minh rằng $x=y$.

2. Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=3a+ab+abc$.

Bài 4. (6,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. E là điểm bất kì thuộc đoạn OB, trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho $OF=OC$. Đường thẳng qua F vuông góc với FO cắt đường thẳng BD tại S. Kẻ FH vuông góc với $BD\ (H\in BD)$.

1. Chứng minh $\Delta SFB\backsim\Delta SDF$ và $SB.SD=SH.SO$.

2. Chứng minh rằng FE là phân giác của $\angle BFD$. Từ đó suy ra $\dfrac{1}{BE^2}+\dfrac{1}{DE^2}=\dfrac{2}{EF^2}$.

3. Kẻ ET vuông góc với FD tại T. Chứng minh rằng FO, AH và ST đồng quy.

Bài 5. (1 điểm)

1. Xét tập $T=\{1,2,3,...,10\}$. Chỉ ra một tập con U có 4 phần tử của T thỏa mãn với mọi $x,y\in U, x\neq y$ thì $x+y$ không chia hết cho $x-y$.

2. Cho M là tập con chứa n phần tử của $S=\{1,2,3,...,2023\}$. Tìm n lớn nhất để mọi $x,y\in M, x\neq y$ thì $x+y$ không chia hết cho $x-y$.

----------HẾT----------

Họ và tên thí sinh: ....Số báo danh:..............

PHÒNG GD&ĐT QUẬN CẦU GIẤY
TRƯỜNG THCS CẦU GIẤY

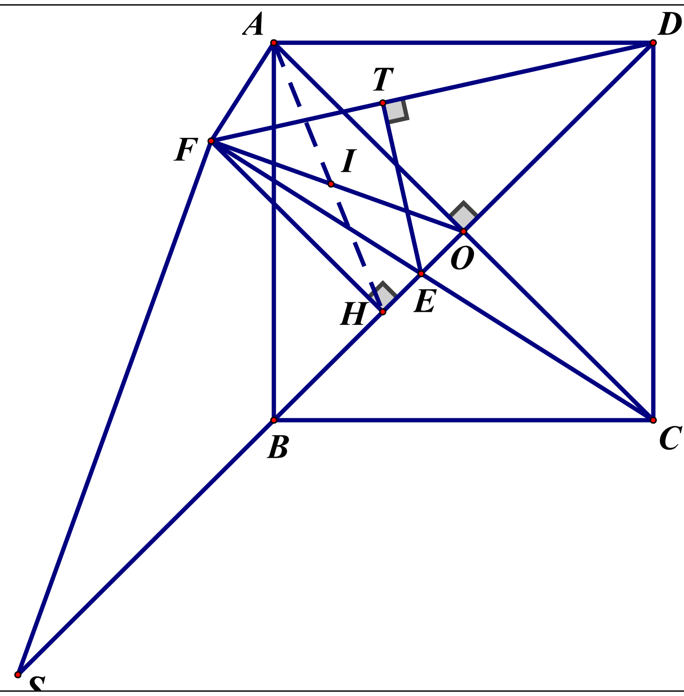
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐÁP ÁN
ĐỀ KIỂM TRA CLB VĂN HÓA LỚP 9 VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂ HỌC SINH GIỎI LỚP 9
VÒNG II
Môn kiểm tra: Toán
Ngày thi: 21/09/2023
Thời gian làm bài: 120 phút
(Không tính thời gian phát đề)

BÀI	**Ý**	**HƯỚNG DẪN CHẤM**	**ĐIỂM**
1	**1**	**Cho biểu thức** $A=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}+1}-\dfrac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}\right):\dfrac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ **với** $x>0, x\neq 4$. **a. Rút gọn biểu thức** A. **b. Tìm** x **sao cho** A **nhận giá trị là một số nguyên.**	1,5 1,5
		$A=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}+1}-\dfrac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}\right):\dfrac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ $=\dfrac{2(2\sqrt{x}+1)+3(\sqrt{x}-2)-(5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)}.\dfrac{5x-10\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+3}$ $=\dfrac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)}.\dfrac{5x-10\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+3}=\dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$	1,5
		Vì $x>0\Rightarrow 5\sqrt{x}>0; 2\sqrt{x}+1>0\Rightarrow A>0$ Mặt khác, xét $A-3=\dfrac{5\sqrt{x}-3(2\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}+1}=\dfrac{-\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}+1}<0\ \forall x>0\Rightarrow A<3$ Vậy $0<A<3$	0,5 0,5
		Do đó A nguyên $\Leftrightarrow A=1$ hoặc $A=2$. $A=1\Leftrightarrow\dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}=1\Leftrightarrow 5\sqrt{x}=2\sqrt{x}+1\Leftrightarrow 3\sqrt{x}=1\Leftrightarrow\sqrt{x}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{9}$ (thỏa mãn) $A=2\Leftrightarrow\dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}=2\Leftrightarrow 5\sqrt{x}=2(2\sqrt{x}+1)\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$ (loại)	0,5

		Vậy $A\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{9}$	
	2	**Cho các số thực** a,b,c **thỏa mãn** $2a^2-3ab+2b^2=1, b^2-3bc+4c^2=2$ **và** $c^2+3ca-a^2=3$**. Tính giá trị của biểu thức** $B=a^4+b^4+c^4$**.**	2,0
		Ta có: $\begin{cases}2a^2-3ab+2b^2=1\\ b^2-3bc+4c^2=2\\ c^2+3ca-a^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a^2-3ab+2b^2=1\\ b^2-3bc+4c^2=2\\ -c^2-3ca+a^2=-3\end{cases}$ $\rightarrow 3a^2+3b^2+3c^2-3(ab+bc+ca)=0$	1,0
		$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ $\Leftrightarrow a=b=c$	0,5
		$\Rightarrow\begin{cases}2a^2-3ab+2b^2=1\\ b^2-3bc+4c^2=2\\ c^2+3ca-a^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1\\ b^2=1\Rightarrow B=3\\ c^2=1\end{cases}$	0,5
2	**1**	**Giải phương trình** $4x^2-9=5x+6\sqrt{x+1}$**.**	
		ĐK: $x\geq -1$ $Pt\Leftrightarrow(2x+1)^2=\left(3\sqrt{x+1}+1\right)^2$	1,0
		TH1: $2x+1=3\sqrt{x+1}+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\ (TM)\\ x=-\dfrac{3}{4}\ (TM)\end{array}\right.$	0,5
		TH2: $2x+1=-3\sqrt{x+1}-1\Leftrightarrow x=-1\ (TM)$ Vậy $x\in\left\{-1;-\dfrac{3}{4};3\right\}$	0,5
		Chú ý: có thể giải bằng cách đặt $y=\sqrt{x+1}\geq 0$ và đưa về phương trình bậc 4 phân tích được.	
	2	**Tìm tất cả các cặp số nguyên dương** $(a;b)$ **thỏa mãn** $7a^2-1$ **chia hết cho** $7ab-1$ **và** a^2+b+2 **là số chính phương.**	
		Vì a,b là các số nguyên dương nên $7a^2-1$ và $7ab-1$ là các số nguyên dương. Vì $(7a^2-1)\vdots(7ab-1)$ nên $7a^2-1\geq 7ab-1\Rightarrow 7a^2\geq 7ab\Rightarrow a\geq b$	0,5

		Lại có $\left[7a^2-1-(7ab-1)\right] \vdots (7ab-1)$ nên $(7a^2-7ab) \vdots (7ab-1) \Rightarrow 7a(a-b) \vdots (7ab-1)$, mà $(7a,7ab-1)=1$ nên $(a-b) \vdots (7ab-1)$	
		Nếu $a>b$ thì $a-b \ge 7ab-1 \Rightarrow a(1-7b)+1-b \ge 0$ điều này là vô lý do $1-7b<0, 1-b<0$. Vậy nên chỉ có thể xảy ra $a=b$.	0,5
		Ta cần tìm a để a^2+a+2 là số chính phương. Nếu $a>1$ thì $a^2<a^2+a+2<a^2+2a+1$ nên a^2+a+2 không thể là số chính phương Với $a=1$ thì $a^2+a+2=4=2^2$ là số chính phương. Vậy $a=b=1$ là giá trị cần tìm	0,5
3	**1**	**Cho các số hữu tỉ x,y thỏa mãn $x^3-2x=y^3-2y$. Chứng minh rằng $x=y$.**	2,0
		Giả sử $x \ne y \Rightarrow x^2+xy+y^2=2$ $x=\frac{a}{b}, y=\frac{c}{d}$ với $a,b,c,d \in \mathbb{N}^*, (a,b)=(c,d)=1$	0,5
		$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}.\frac{c}{d}+\left(\frac{c}{d}\right)^2=2 \Leftrightarrow a^2d^2+abcd+c^2b^2=2b^2d^2$ $u=(b,d) \Rightarrow b=ux, d=uy, (x,y)=1$. Có $\begin{cases}(a,b)=1 \Rightarrow (a,x)=1\\(c,d)=1 \Rightarrow (c,y)=1\end{cases}$	0,5
		$a^2y^2+acxy+c^2x^2=2x^2y^2 \Rightarrow \begin{cases}x \vdots y\\y \vdots x\end{cases} \Rightarrow x=y \Rightarrow b=d=u$ $a^2+ac+c^2=2u^2$	
		Nếu a chia hết cho 2 thì c chia hết cho 2 và ngược lại Nếu a và c cùng không chia hết cho 2 thì VT lẻ và VP chẵn, vô lý	0,5
		Vậy a và c cùng chia hết cho 2. Khi đó $2u^2=a^2+ac+c^2$ chia hết cho 4. Suy ra u chia hết cho 2. Điều này trái với $(a,u)=(a,b)=1$. Vậy $x=y$	0,5
	2	**Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=3a+ab+abc$.**	2,0
		$P=a(3+b)+abc \le \frac{(a+3+b)^2}{4}+abc=\frac{(7-c)^2}{4}+abc$ $\Rightarrow P \le \frac{c^2+2(2ab-7)c+49}{4}=\frac{f(c)}{4}$	0,5

		Chứng minh nếu $f(x)$ là đa thức bậc hai với hệ số cao nhất dương và $m \le x \le n$ thì $\max f(x) = \max\{f(m); f(n)\}$	0,5
		Áp dụng $\max f(c) = \max\{f(0); f(4)\} = \{49; f(4)\}$ $f(4) = 9 + 8ab \le 9 + 2(a+b)^2 = 9 + 2(4-c)^2 \le 41$	0,5
		$\Rightarrow \max\{f(0); f(4)\} = 49$ $P_{\max} = \frac{49}{4}$ khi $a = \frac{7}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 0$	0,5
4	**1**		
		Ta có $OF = OC = OB = OD \Rightarrow \widehat{BFD} = 90^o$ Suy ra $\widehat{SFB} = \widehat{SDF}$ (cùng phụ với $\widehat{BFO} = \widehat{OBF}$)	1,0
		$\Rightarrow \Delta SBF \backsim \Delta SFD$ (g.g) $\Rightarrow SB.SD = SF^2$	1,0
		Lại có $SH.SO = SF^2$ (hệ thức lượng) $\Rightarrow$(ĐPCM)	1,0
	2	Có $\widehat{OFD} = \frac{1}{2}\widehat{FOB}$ và $\widehat{OFE} = \frac{1}{2}\widehat{FOA}$ (góc ngoài tại đỉnh cân của tam giác cân) Suy ra $\widehat{EFD} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 45^o$ Suy ra FE là phân giác $\widehat{BFD}$	1,0
		Suy ra $\frac{EF^2}{BE^2} + \frac{EF^2}{DE^2} = \frac{DF^2}{BC^2} + \frac{BF^2}{BC^2} = \frac{BD^2}{BC^2} = 2$ (ĐPCM)	1,0
	3	Gọi I là giao của FO và ST.	0,5

		Từ câu a) $\Rightarrow \widehat{SFB}=\widehat{SDF}\Rightarrow \widehat{SEF}=\widehat{SFE}$ $\Rightarrow SE=SF$ mà $TE=TF$ (do ΔETF vuông cân) $\Rightarrow TS$ trung trực EF mà I thuộc ST. $\Rightarrow \widehat{IFS}=\widehat{IES}=90^o \Rightarrow IE//FH$	
		Xét hình thang $AOHF\ (AO//FH)$ $\frac{FI}{IO}=\frac{HE}{EO}=\frac{FH}{OC}(Talet\ CO//FH)=\frac{AO}{FH}$ $\Rightarrow A, I, H$ thẳng hàng $\Rightarrow$ ĐPCM	0,5
5		**1.** Xét tập $T=\{1,2,3,...,10\}$. Chỉ ra một tập con U có 4 phần tử của T thỏa mãn với mọi $x,y\in U, x\neq y$ thì $x+y$ không chia hết cho $x-y$. **2.** Cho M là tập con chứa n phần tử của $S=\{1,2,3,...,2023\}$. Tìm n lớn nhất để mọi $x,y\in M, x\neq y$ thì $x+y$ không chia hết cho $x-y$.	
	1	$U=\{1,4,7,10\}$	0,25
	2	Xét $M=\{3k+1$ với $k=0, 1, 2, ..., 674\}$ thì A là tập con của S và A có 675 phần tử. Dễ thấy hiệu 2 số bất kì của A là bội của 3 còn tổng của 2 số bất kì của M không chia hết cho 3. Do đó với 2 số bất kỳ trong M thì tổng của chúng không chia hết cho hiệu của chúng.	0,25
		Xét N là tập con của S có ít nhất 676 phần tử. Chia S thành 675 tập con như sau {1,2,3} {4,5,6} ... {2020,2021,2022} {2023}. Khi đó sẽ có ít nhất hai phần tử của N, giả sử là a và b, thuộc 1 trong các tập con 3 phần tử kể trên.	0,25
		Chú ý rằng hiệu 2 phần tử bất kỳ trong mỗi tập 3 phần tử kể trên không lớn hơn 2. Vậy ta có a – b =1 hoặc 2. Nếu a – b = 1 thì a + b chia hết cho a – b, nếu a – b = 2 thì a và b cùng tính chẵn lẻ nên a + b chẵn và chia hết cho a – b. vậy N không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do đó n lớn nhất = 675	0,25