

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT TRIỆU SƠN 1

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**MỘT SỐ KINH NGHIỆM
VẬN DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ GIẢI MỘT LỚP
CÁC PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ**

Người thực hiện: Trần Văn Long
Chức vụ: Giáo viên
SKKN thuộc lĩnh vực (môn): Toán

THANH HÓA NĂM 2016

MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
I. MỞ ĐẦU	
1. Lý do chọn đề tài	3
2. Mục đích nghiên cứu	3
3. Đối tượng nghiên cứu	3
4. Phương pháp nghiên cứu	4
II. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM	
1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm.	4
2. Thực trạng của vấn đề	4
3. Giải pháp tổ chức thực hiện	5
4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường	20
III. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	
1. Kết luận	21
2. Kiến nghị	22
TÀI LIỆU THAM KHẢO	23

I. MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Bài toán phương trình, bất phương trình, hệ phương trình vốn dĩ là một nội dung quan trọng trong chương trình giảng dạy môn Toán ở cấp Trung học phổ thông nói chung cũng như đánh giá năng lực học sinh trong mỗi kỳ thi nói riêng.

Các bài toán thuộc dạng này đòi hỏi học sinh cần tư duy theo nhiều hướng khác nhau, sử dụng các phương pháp khác nhau để có thể tìm được mấu chốt của vấn đề, một trong các hướng đó là hướng tiếp cận bài toán bằng máy tính cầm tay (MTCT).

Với những kết quả đã đạt được, đặc biệt khóa 2012 - 2015 vừa tốt nghiệp tôi thấy tiếp cận bài toán giải phương trình vô tỷ bằng MTCT đảm bảo tính hiện đại, ứng dụng được khoa học công nghệ, phát huy năng lực tư duy của học sinh và đạt được hiệu quả rõ rệt. Với kinh nghiệm đúc kết được từ thực tiễn giảng dạy và học hỏi đồng nghiệp tôi mạnh dạn chọn đề tài: "**Một số kinh nghiệm vận dụng máy tính cầm tay để giải một lớp các phương trình vô tỷ**" làm đề tài sáng kiến kinh nghiệm của năm học 2015 - 2016.

Điểm mới trong đề tài sáng kiến kinh nghiệm lần này là: Quan điểm tiếp cận bài toán giải phương trình bằng MTCT và kinh nghiệm vận dụng MTCT để tách nhân tử và đặc biệt là hệ thống bài tập đầy đủ, đa dạng được phân theo số nghiệm và tính chất nghiệm của phương trình. Với mục đích chia sẻ bớt những khó khăn với các học trò. Rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp, sẽ chia của các thầy cô, các bạn đồng nghiệp và các độc giả để đề tài áp dụng có hiệu quả trong dạy học về giải các phương trình vô tỷ.

2. Mục đích nghiên cứu

Trong giới hạn của một sáng kiến kinh nghiệm tôi xin trình bày kinh nghiệm của mình được đúc kết trong quá trình giảng dạy cho học sinh chuẩn bị thi THPT Quốc Gia và giải quyết những vướng mắc của các em vướng phải trong quá trình tiếp cận bài toán giải phương trình. Tôi không có tham vọng giúp học sinh giải được tất cả các phương trình mà chỉ mong muốn trang bị thêm cho các em một cách nhìn, một phương pháp, một hướng tư duy... từ đó để các em có thể tự tin hơn khi tiếp cận các bài toán giải phương trình vô tỷ. Hy vọng đây là một tài liệu hữu ích cho các em học tập và các thầy cô tham khảo.

3. Đối tượng nghiên cứu

Trong các kỳ thi học sinh giỏi và kỳ thi trung học phổ thông ở giai đoạn hiện nay phương trình, bất phương trình và hệ phương trình có vị trí đặc biệt quan trọng, đó thường là câu tổng hợp nhiều kiến thức, phân loại đối tượng. Chìa khóa giải quyết tốt bài toán giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình là giải tốt các bài toán phương trình vô tỷ. Mặt khác đối với một phương trình hầu như lúc nào cũng có nghiệm, MTCT là công cụ hữu ích để tìm

ra nghiệm của phương trình. Vì vậy, MTCT có vai trò quan trọng trong việc tìm ra nghiệm, định ra hướng giải phương trình, bắt phương trình và hệ phương trình.

Trong giai đoạn hiện nay MTCT đang là một công cụ, phương tiện hữu ích cho nhiều học sinh và hầu như mỗi học sinh trung học đều có một chiếc máy tính cầm tay. Vì vậy làm sao để khai thác được các thế mạnh của MTCT vào việc giải quyết các bài toán và phát triển năng lực tư duy là một nhiệm vụ quan trọng của các thầy, các cô mà đặc biệt là các thầy cô giảng dạy bộ môn Toán.

Bên cạnh đó nghiên cứu của SKKN là tiếp cận bài toán giải phương trình vô tỷ bằng MTCT và chia sẻ một số kinh nghiệm vận dụng MTCT nhằm tháo gỡ một phần khó khăn cho các thầy cô và các em học sinh khi tiếp cận các bài toán về giải phương trình.

4. Phương pháp nghiên cứu

Xây dựng cơ sở lý luận, tóm lược các kiến thức cơ bản, xây dựng hệ thống bài tập và tổ chức triển khai thực hiện.

Kiểm tra, đánh giá và đúc rút các kinh nghiệm thu được từ thực tiễn giảng dạy, báo cáo chuyên môn ở tổ, tranh thủ các ý kiến đóng góp của tổ chuyên môn, được tổ chuyên môn đánh giá cao từ đó bổ sung để có sở lý luận hoàn thiện và tổ chức triển khai áp dụng.

II. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm.

Mục tiêu của giáo dục phải lấy người học làm trung tâm, khơi dậy đam mê, hứng thú và khát vọng của học sinh. Phải đào tạo những con người lao động tự chủ, sáng tạo, có năng lực giải quyết các vấn đề thường gặp.

Phải đổi mới phương pháp giáo dục, áp dụng các thành tựu của khoa học và công nghệ khắc phục lối truyền thụ một chiều, rèn luyện thành nếp tư duy sáng tạo của người học.

Trong các mục tiêu của bộ môn Toán, mục tiêu phát triển năng lực tư duy được đặt lên hàng đầu.

Để làm được những mục tiêu trên vai trò của người thầy, người cô là vô cùng quan trọng. Mỗi thầy giáo, cô giáo phải không ngừng học hỏi để nâng cao trình độ chuyên môn, thực sự tận tụy, tâm huyết với học trò, không ngừng đổi mới phương pháp và tìm tòi các phương pháp mới.

2. Thực trạng của vấn đề

Phương trình là một nội dung rất quan trọng và đa dạng nhưng trong chương trình Toán THPT các em chỉ được tiếp cận ở lớp 10 với thời lượng khoảng 10 tiết. Với thời lượng đó giáo viên không thể truyền tải hết cho các em

học sinh các kỹ năng và phương pháp giải các dạng phương trình và đặc biệt là phương trình vô tỷ.

Trong các kì thi học sinh giỏi và THPT thì câu giải phương trình, giải hệ phương trình, giải bất phương trình là một trong những câu thuộc diện phân loại thí sinh. Vì vậy đó là các câu hỏi mang tính tổng hợp gây rất nhiều khó khăn cho học sinh ngay cả những học sinh có học lực giỏi.

Một thực tế là đa số các học sinh lo sợ các bài toán về giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình trong các đề thi nói chung và đề thi THPT Quốc gia nói riêng. Theo thống kê thì có tới hơn 90% các em bỏ câu phương trình, bất phương trình và hệ trong các đề thi thử THPT Quốc gia cũng như đề thi chính thức THPT Quốc Gia và thực tế chỉ có khoảng 5% các em làm tốt câu này.

Mặt khác không ít các thầy cô khi dạy về phương trình, bất phương trình, hệ phương trình còn sử dụng phương pháp truyền thống mà ít quan tâm đến việc ứng dụng MTCT để phát hiện và giải quyết bài toán.

Đa số học sinh có và sử dụng máy tính Casio fx - 570VN plus một cách thành thạo. Đây là điểm mạnh của học sinh mà thầy cô chưa khai thác đúng mức.

Trong quá trình giảng dạy, qua các tiết dự giờ, qua trao đổi chuyên môn tôi thấy ít thầy cô ứng dụng MTCT để hướng dẫn học sinh giải phương trình một cách đầy đủ, hệ thống.

Chưa có một tài liệu nào chính thống, bài bản để các thầy cô và các em học sinh tham khảo và thực hành.

3. Giải pháp tổ chức thực hiện

3.1 Một số kiến thức cơ bản.

1⁰) Nếu phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm đơn $x = x_0$ thì ta phân tích $f(x)$ được về dạng: $f(x) = (x - x_0)g(x)$ trong đó $g(x_0) \neq 0$;

Từ đó suy ra:

Nếu phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm đơn $x = x_0$ thì $f(x_0) = 0$ và $f'(x_0) \neq 0$.

2⁰) Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x = x_0$ bội bậc n thì ta phân tích $f(x)$ về dạng $f(x) = (x - x_0)^n g(x)$, ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) trong đó $g(x_0) \neq 0$.

Từ đó suy ra:

a) Nếu phương trình $f(x) = 0$ nghiệm $x = x_0$ bội bậc 2 thì $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) \neq 0$;

b) Nếu phương trình $f(x) = 0$ nghiệm $x = x_0$ bội bậc 3 thì $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ và $f^{(3)}(x_0) \neq 0 \dots$

3⁰) Trên máy tính cầm tay Casio fx - 570VN PLUS ta vận dụng một số chức năng cơ bản sau:

a) Tổ hợp phím: SHIFT CALC (chức năng SOLVE) - để dò tìm nghiệm của phương trình.

b) Tổ hợp phím: SHIF $\int \square$ (chức năng tính đạo hàm tại một điểm $\frac{d}{dx} \square$)

c) Tổ hợp phím: SHIF RCL (chức năng STO) - gán giá trị vào...

Lưu ý: Trong khuôn khổ của SKKN tôi không tập trung nhiều đến quy trình bấm phím mà chỉ thực sự quan tâm đến thuật giải của bài toán.

3.2 Phương trình vô tỷ có một nghiệm đơn

Phương pháp chung:

- Dùng chức năng SOLVE để tìm nghiệm x_0 của phương trình $f(x) = 0$;

- Dùng chức năng $\frac{d}{dx} \square$ tính đạo hàm tại x_0 để khẳng định nghiệm đơn;

- Tách để nhân liên hợp.

a) Đối với nghiệm hữu tỷ đơn $x = x_0$ thì ta phân tích để sau khi nhân liên hợp xuất hiện nhân tử $(x - x_0)$. Mức độ ưu tiên tuân tự là căn của biểu thức bậc nhất (thường thêm, bớt hằng số); đến biểu thức còn lại là căn của biểu thức bậc cao và đa thức...

b) Đối với nghiệm vô tỷ thì nó sẽ là nghiệm của một phương trình bậc hai, nếu đã là nghiệm của phương trình bậc hai thì sẽ là nghiệm của phương trình vô tỷ dạng $ax + b = c\sqrt{px + q}$ (*). Khi đó thay nghiệm x_0 vào (*) từ đó ta suy ra a, b và c.

Để làm quen với phương pháp này ta xét ví dụ đầu tiên

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{2x+3} - \sqrt{13-3x} + 2x+5=0$ (*)

Phân tích:

- Nhập phương trình vào máy tính, dùng chức năng SOLVE lần lượt với $x = -1$, $x = 0 \dots$ cho ta nghiệm duy nhất $x = -1$.

- Ta có $\frac{d}{dx}(\sqrt{2x+3} - \sqrt{13-3x} + 2x+5) \Big|_{x=-1} \neq 0$ nên $x = -1$ là nghiệm đơn của phương trình.

- Vì biểu thức dưới căn là bậc nhất nên ta ưu tiên tách, nhóm liên quan đến hai căn trước (thêm, bớt hằng số) và phần còn lại là của đa thức.

- Cụ thể thay $x = -1$ vào hai căn ta được: $\sqrt{2x+3} = 1$ và $\sqrt{13-3x} = 4$ đây là cơ sở để ta tách và phân tích bài toán.

Giải: - ĐK: $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{13}{3}\right]$

$$\text{- Ta có (*)} \Leftrightarrow (\sqrt{2x+3} - 1) + (4 - \sqrt{13-3x}) + 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{\sqrt{2x+3}+1} + \frac{3(x+1)}{4+\sqrt{13-3x}} + 2(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \left(\frac{2}{\sqrt{2x+3}+1} + \frac{3}{4+\sqrt{13-3x}} + 2 \right) = 0$$

$> 0, \forall x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{13}{3}\right]$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

- **Kết luận:** Phương trình có một nghiệm $x = -1$

Nhận xét:

- Ở ví dụ đầu tiên này có rất nhiều cách giải nhưng rõ ràng cách giải trên thật đơn giản, dễ hiểu, dễ vận dụng... tạo cảm giác hứng thú, tò mò để các em bước vào các ví dụ tiếp theo.

- Ở ví dụ này ta cũng thấy việc nhằm tìm nghiệm $x = -1$ và việc khẳng định phương trình có nghiệm đơn $x = -1$ là hoàn toàn thao tác bằng máy tính cầm tay **vừa nhanh, đơn giản, dễ hiểu...** từ đó định hướng giải quyết bài toán. MTCT sẽ còn đóng vai trò quan trọng hơn nữa khi bài toán phức tạp hơn và đặc biệt nghiệm không còn "đẹp" nữa.

- Từ đây ta có thể phát triển bài toán theo hai hướng thứ nhất là tăng bậc của căn và phức tạp của phương trình; hướng thứ hai là phương trình có một nghiệm và nghiệm vô tỷ.

Ví dụ 2. Giải phương trình $3\sqrt{x^3+4x} + \sqrt[3]{x+6} + x^2 = x+16$ (*)

Phân tích:

- Nhập phương trình vào máy tính, dùng chức năng SOLVE lần lượt với $x = 0, x = 1 \dots$ cho ta nghiệm duy nhất $x = 2$.

$$\text{- Ta có } \frac{d}{dx}(3\sqrt{x^3+4x} + \sqrt[3]{x+6} + x^2 - x - 16) \Big|_{x=2} \neq 0 \text{ nên } x = 2 \text{ là nghiệm}$$

đơn của phương trình.

$$\text{- Thay } x = 2 \text{ vào hai căn ta có: } +) \sqrt[3]{x+6} = 2$$

$$+) \sqrt{x^3 + 4x} = 4 = 2x = x + 2 \dots$$

Trong bài này ta lựa chọn phép phân tích $\sqrt{x^3 + 4x} = x + 2$ là "tốt" nhất.
Trên cơ sở đó ta giải bài toán như sau

Giải: - ĐK: $x \geq 0$

$$\text{- Khi đó (*)} \Leftrightarrow 3 \left[\sqrt{x^3 + 4x} - (x + 2) \right] + (\sqrt[3]{x + 6} - 2) + x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x^3 - x^2 - 4)}{\sqrt{x^3 + 4x} + (x + 2)} + \frac{x - 2}{\sqrt[3]{x + 6} + 2} + (x - 2)(x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2) \left[\frac{3(x^2 + x + 2)}{\sqrt{x^3 + 4x} + (x + 2)} + \frac{1}{\sqrt[3]{x + 6} + 2} + (x + 4) \right] = 0$$

$> 0, \forall x \geq 0$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

- **Kết luận:** Phương trình có một nghiệm $x = 2$

Ví dụ 3. Giải phương trình $x^2 = x + 2 + \sqrt{3 - x} + \sqrt{x}$ (*)

Phân tích:

- Nhập phương trình vào máy tính, dùng chức năng SOLVE lần lượt với $x = 2, x = 3$ cho ta nghiệm duy nhất $x \approx 2,618033989$ gán vào A (SHIF RCL (-) tức là $2,618033989 \rightarrow A$)

- Ta có $\frac{d}{dx}(x^2 - x - 2 - \sqrt{3 - x} - \sqrt{x}) \Big|_{x=A} \neq 0$ nên $x \approx 2,618033989$ là nghiệm đơn của phương trình.

- Thay $x \approx 2,618033989$ vào các căn ta được:

$$+) \sqrt{3 - x} \approx 0,6180339887 \approx x - 2$$

$$+) \sqrt{x} \approx 1,618033989 \approx x - 1$$

Trên cơ sở đó ta giải bài toán như sau

Giải: - ĐK:
$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2; 3]$$

$$\text{- Ta có (*)} \Leftrightarrow (x - 2 - \sqrt{3 - x}) + (x - 1 - \sqrt{x}) + x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 2)^2 - (3 - x)}{x - 2 + \sqrt{3 - x}} + \frac{(x - 1)^2 - x}{x - 1 + \sqrt{x}} + x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2 + \sqrt{3 - x}} + \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1 + \sqrt{x}} + x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1) \left(\frac{1}{x - 2 + \sqrt{3 - x}} + \frac{1}{x - 1 + \sqrt{x}} + 1 \right) = 0$$

$>0, \forall x \in [2;3]$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

- **Kết luận:** Phương trình có một nghiệm $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x - \sqrt{2x + 2}} = 3x + 1 + \sqrt{6x + 2}$ (*)

Phân tích:

- Nhập phương trình vào máy tính, dùng chức năng SOLVE lần lượt với $x = 3, x = 4, x = 5...$ cho ta nghiệm duy nhất $x \approx 4,236067977$ gán vào A (SHIFT RCL (-) tức là $4,236067977 \rightarrow A$)

- Ta có: $\frac{d}{dx} (x^2 + \sqrt{x - \sqrt{2x + 2}} - 3x - 1 - \sqrt{6x + 2}) \Big|_{x=A} \approx 5,244678844 \neq 0$

nên $x \approx 4,236067977$ là nghiệm đơn của phương trình.

- Thay $x \approx 4,236067977$ vào các căn ta được:

+) $\sqrt{x - \sqrt{2x + 2}} = 1$

+) $\sqrt{6x + 2} \approx 5,236067977 \approx x + 1$

Trên cơ sở đó ta giải bài toán như sau

Giải: - ĐK: $\begin{cases} 6x + 2 \geq 0 \\ x - \sqrt{2x + 2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1 + \sqrt{3}$

- Ta có (*)

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x - \sqrt{2x + 2}} - 1) + (x + 1 - \sqrt{6x + 2}) + x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 1 - \sqrt{2x + 2}}{\sqrt{x - \sqrt{2x + 2}} + 1} + \frac{(x + 1)^2 - 6x - 2}{x + 1 + \sqrt{6x + 2}} + (x^2 - 4x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2 - 2x - 2}{(\sqrt{x - \sqrt{2x + 2}} + 1)(x - 1 + \sqrt{2x + 2})} + \frac{x^2 - 4x - 1}{x + 1 + \sqrt{6x + 2}} + (x^2 - 4x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x - 1) \left[\frac{1}{(\sqrt{x - \sqrt{2x + 2}} + 1)(x - 1 + \sqrt{2x + 2})} + \frac{1}{x + 1 + \sqrt{6x + 2}} + 1 \right] = 0$$

$>0, \forall x \geq 1 + \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$$

- **Kết luận:** Phương trình có một nghiệm $x = 2 + \sqrt{5}$

Nhận xét:

Rõ ràng qua ba ví dụ 2, 3 và 4 đã khẳng định được vai trò quan trọng của MTCT trong việc giải phương trình vô tỷ. Giúp học sinh tìm được nghiệm, khẳng định được nghiệm đơn một cách nhanh chóng, đơn giản, dễ hiểu và giúp cho việc tính toán định hình nhân tử. Đối với những bài phương trình nghiệm xấu nếu không có MTCT thì thực sự là khó khăn trong quá trình định hình lời giải.

Để tiếp tục khai thác các thế mạnh của MTCT trong việc giải một số phương trình vô tỷ, ta đi đến lớp phương trình thứ hai là phương trình vô tỷ có nghiệm bội.

3.3 Phương trình vô tỷ có nghiệm bội

Phương pháp chung:

- Dùng chức năng SOLVE để tìm nghiệm x_0 của phương trình $f(x) = 0$;
- Dùng chức năng $\frac{d}{dx}$ tính đạo hàm tại x_0 để khẳng định nghiệm bội;
- Tách để nhân liên hợp (đối với trường hợp kép hữu tỷ)

a) Trường hợp nghiệm bội 2 (hay gọi là nghiệm kép)

+) Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x = x_0$ bội bậc 2 thì ta phân tích $f(x)$ về dạng $f(x) = (x - x_0)^2 g(x)$, trong đó $g(x_0) \neq 0$.

+) Nếu phương trình $f(x) = 0$ nghiệm $x = x_0$ bội bậc 2 thì $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) \neq 0$ hay: $\left. \frac{d}{dx} [f(x)] \right|_{x=x_0} = 0$ và $\left. \frac{d}{dx} [f'(x)] \right|_{x=x_0} \neq 0$

+) Để tìm liên hợp nghiệm kép cho $\sqrt[n]{f(x)}$ ta làm như sau:

$$\text{Đặt: } \sqrt[n]{f(x)} = ax + b \text{ khi đó: } \begin{cases} a = \left. \frac{d}{dx} [\sqrt[n]{f(x)}] \right|_{x=x_0} \\ b = \sqrt[n]{f(x_0)} - ax_0 \end{cases}$$

b) Trường hợp nghiệm bội 3

+) Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x = x_0$ bội bậc 3 thì ta phân tích $f(x)$ về dạng $f(x) = (x - x_0)^3 g(x)$, trong đó $g(x_0) \neq 0$.

+) Nếu phương trình $f(x) = 0$ nghiệm $x = x_0$ bội bậc 3 thì $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ và $f^{(3)}(x_0) \neq 0$ hay:

$$f(x_0)=0, \quad \frac{d}{dx}[f(x)]\Big|_{x=x_0}=0, \quad \frac{d}{dx}[f'(x)]\Big|_{x=x_0}=0 \text{ và } \frac{d}{dx}[f''(x)]\Big|_{x=x_0} \neq 0$$

+) Để tìm liên hợp nghiệm bội 3 cho $\sqrt[n]{f(x)}$ ta làm như sau:

$$\text{Đặt: } \sqrt[n]{f(x)} = ax^2 + bx + c \text{ khi đó: } \begin{cases} a = \frac{d}{dx} \left[\frac{f'(x)}{2n\sqrt[n]{f(x)}^{n-1}} \right] \Big|_{x=x_0} \\ b = \frac{d}{dx} [\sqrt[n]{f(x)}] \Big|_{x=x_0} \\ c = \sqrt[n]{f(x_0)} - ax_0^2 - bx_0 \end{cases}$$

- Đối với nghiệm kép vô tỷ thì ta làm tương tự trường hợp nghiệm đơn nhưng nhân liên hợp hai lần.

Để làm quen với phương pháp này ta xét các ví dụ sau

Ví dụ 5. Giải phương trình $x + 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11$ (*)

Phân tích:

- Nhập phương trình vào máy tính, dùng chức năng SOLVE lần lượt với $x = -3, x = -2, x = -1 \dots$ cho ta nghiệm duy nhất $x = 1$.

- Kiểm tra tính chất nghiệm bội tại $x = 1$

$$+) \text{ Ta có: } \frac{d}{dx}(x + 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} - 11) \Big|_{x=1} = 0$$

$$+) \text{ Mặt khác: } \frac{d}{dx} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x+3}} - \frac{2}{\sqrt{3-2x}} \right) \Big|_{x=1} = -2.125 \neq 0$$

Do đó: $x = 1$ là nghiệm kép của phương trình.

- Tìm liên hợp nghiệm kép

$$+) \text{ Giả sử } 4\sqrt{x+3} = ax + b \text{ khi đó: } \begin{cases} a = \frac{d}{dx} [4\sqrt{x+3}] \Big|_{x=1} = 1 \\ b = 4\sqrt{1+3} - 1 = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{x+3} = x + 7$$

$$+) \text{ Tương tự: } 2\sqrt{3-2x} = -2x + 4$$

Giải:

$$- \text{ĐK: } x \in \left[-3; \frac{3}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
- \text{Ta có } (*) &\Leftrightarrow (x+7-4\sqrt{x+3})+2\left[(2-x)-\sqrt{3-2x}\right]=0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(x+7)^2-16(x+3)}{x+7+4\sqrt{x+3}}+2\frac{(2-x)^2-(3-2x)}{(2-x)+\sqrt{3-2x}}=0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{x+7+4\sqrt{x+3}}+2\frac{x^2-2x+1}{(2-x)+\sqrt{3-2x}}=0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2\left(\frac{1}{x+7+4\sqrt{x+3}}+\frac{2}{2-x+\sqrt{3-2x}}\right) \\
&\quad \quad \quad >0, \forall x \in \left[-3; \frac{3}{2}\right] \\
&\Leftrightarrow x=1
\end{aligned}$$

- **Kết luận:** Phương trình có một nghiệm $x=1$

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$x^2 - 2(x+4)\sqrt{3x+10} = 2\sqrt{2x^2+17x+35} - 14x - 38 \quad (*)$$

Phân tích:

- Nhập phương trình vào máy tính, dùng chức năng SOLVE lần lượt với $x = -3, x = -2, x = -1 \dots$ cho ta nghiệm duy nhất $x = -2$.

- Kiểm tra tính chất nghiệm bội tại $x = -2$

+) Ta có:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 - 2(x+4)\sqrt{3x+10} - 2\sqrt{2x^2+17x+35} + 14x + 38\right)\Big|_{x=-2} = 0$$

+) Mặt khác:

$$\frac{d}{dx}\left(2x+14 - 2\sqrt{3x+10} - \frac{3(x+4)}{\sqrt{3x+10}} - \frac{4x+17}{\sqrt{2x^2+17x+35}}\right)\Big|_{x=-2} \neq 0$$

Do đó: $x = -2$ là nghiệm kép của phương trình.

- Tìm liên hợp nghiệm kép

+) Giả sử: $2\sqrt{2x^2+17x+35} = ax + b$ khi đó:

$$\begin{cases} a = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{2x^2+17x+35}\right)\Big|_{x=-2} = 3 \\ b = 2\sqrt{2.(-2)^2+17.(-2)+35} - 3.(-2) = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2x^2+17x+35} = 3x + 12$$

$$+) \text{ Tương tự: } 2\sqrt{3x+10} = \frac{3}{2}x + 7$$

- Đó là cơ sở cho cách giải sau

Giải:

- ĐK: $x \geq \frac{-10}{3}$

- Ta có (*)

$$\Leftrightarrow 2 \left[(3x+12) - 2\sqrt{2x^2+17x+35} \right] + (x+4) \left[(3x+14) - 4\sqrt{3x+10} \right] - (x^2+4x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+2)^2}{(3x+12)+2\sqrt{2x^2+17x+35}} + \frac{9(x+4)(x+2)^2}{(3x+14)+4\sqrt{3x+10}} - (x+2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 \left[\frac{2}{(3x+12)+2\sqrt{2x^2+17x+35}} + \frac{9x+36}{(3x+14)+4\sqrt{3x+10}} - 1 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 \left[\frac{2}{(3x+12)+2\sqrt{2x^2+17x+35}} + \frac{6x+22-4\sqrt{3x+10}}{(3x+14)+4\sqrt{3x+10}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 \left[\frac{2}{(3x+12)+2\sqrt{2x^2+17x+35}} + \frac{2(\sqrt{3x+10}-1)^2}{(3x+14)+4\sqrt{3x+10}} \right] = 0$$

$>0, \forall x \geq \frac{-10}{3}$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

- **Kết luận:** Phương trình có một nghiệm $x = -2$

Ví dụ 7. Giải phương trình $\sqrt[3]{9x^2+9x+9} + 2\sqrt[3]{6x^2+2} = 3x+4$ (*)

(Dựa theo đề thi HSG lớp 12 Tỉnh Thanh Hóa 2015 - 2016)

Phân tích:

- Nhập phương trình vào máy tính, dùng chức năng SOLVE lần lượt với $x = -1, x = 0, x = 1 \dots$ cho ta nghiệm duy nhất $x = 1$.

- Kiểm tra tính chất nghiệm bội tại $x = 1$

+) Ta có:

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt[3]{9x^2+9x+9} + 2\sqrt[3]{6x^2+2} - 3x - 4 \right) \Big|_{x=1} = 0$$

+) Mặt khác:

$$i) \frac{d}{dx} \left(\frac{6x+3}{\sqrt[3]{(9x^2+9x+9)^2}} + \frac{8x}{\sqrt[3]{(6x^2+2)^2}} - 3 \right) \Big|_{x=1} = 0$$

$$ii) \frac{d}{dx} \left(\frac{6}{\sqrt[3]{(9x^2 + 9x + 9)^2}} - \frac{2(6x + 3)^2}{\sqrt[3]{(9x^2 + 9x + 9)^5}} + \frac{8}{\sqrt[3]{(6x^2 + 2)^2}} - \frac{64x}{\sqrt[3]{(6x^2 + 2)^5}} \right) \Bigg|_{x=1} \neq 0$$

Do đó: $x = 1$ là nghiệm bội ba của phương trình (*)

- Tìm biểu thức liên hợp bội 3

+) Đặt: $\sqrt[3]{9x^2 + 9x + 9} = ax^2 + bx + c$ khi đó:

$$\begin{cases} a = \frac{d}{dx} \left[\frac{18x + 9}{2.3\sqrt[3]{(9x^2 + 9x + 9)^2}} \right] \Bigg|_{x=1} = 0 \\ b = \frac{d}{dx} \left[\sqrt[3]{9x^2 + 9x + 9} \right] \Bigg|_{x=1} = 1 \\ c = \sqrt[3]{9 + 9 + 9} - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{9x^2 + 9x + 9} = x + 2$$

+) Tương tự: $\sqrt[3]{6x^2 + 2} = x + 1$

- Trên cơ sở đó ta có lời giải sau

Giải:

- ĐK: $x \in \mathbb{R}$

- Ta có:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \left[(x + 2) - \sqrt[3]{9x^2 + 9x + 9} \right] + 2 \left[(x + 1) - \sqrt[3]{6x^2 + 2} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x + 2)^3 - (9x^2 + 9x + 9)}{(x + 2)^2 + (x + 2)M + M^2} + 2 \frac{(x + 1)^3 - 6x^2 - 2}{(x + 1)^2 + (x + 1)N + N^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x - 1)^3}{(x + 2)^2 + (x + 2)M + M^2} + \frac{2(x - 1)^3}{(x + 1)^2 + (x + 1)N + N^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^3 \left[\frac{1}{\underbrace{(x + 2)^2 + (x + 2)M + M^2}_{>0, \forall x}} + \frac{2}{(x + 1)^2 + (x + 1)N + N^2} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \quad (\text{Trong đó: } N = \sqrt[3]{6x^2 + 2} \text{ và } M = \sqrt[3]{9x^2 + 9x + 9}) \end{aligned}$$

- **Kết luận:** Phương trình có một nghiệm $x = 1$

Ví dụ 8. Giải phương trình $\sqrt{x + 3} - 2 = \sqrt{2x^2 - 6x + 14} - x$ (*)

Phân tích:

- Nhập phương trình vào máy tính, dùng chức năng SOLVE lần lượt với $x = -2, x = -1, x = 0...$ cho ta nghiệm duy nhất $x \approx 4,791287886$ gán vào A (SHIFT RCL (-) tức là $4,791287886 \rightarrow A$)

- Kiểm tra tính chất nghiệm bội tại $x \approx 4,791287886$

$$+) \text{ Ta có: } \frac{d}{dx} (\sqrt{x+3} - 2 - \sqrt{2x^2 - 6x + 14} + x) \Big|_{x=A} = 0$$

$$+) \text{ Mặt khác: } \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+3}} - \frac{2x-3}{2\sqrt{2x^2 - 6x + 14}} + 1 \right) \Big|_{x=A} \neq 0$$

Do đó: $x \approx 4,791287886$ là nghiệm kép của phương trình.

- Tìm liên hợp: Thay $x \approx 4,791287886$ vào căn hai căn ta được:

$$+) \sqrt{x+3} \approx x - 2$$

$$+) \sqrt{2x^2 - 6x + 14} \approx 2(x - 2)$$

Giải:

- ĐK: $x \geq -3$

$$- \text{ Ta có } (*) \Leftrightarrow [(x-2) - \sqrt{x+3}] + [\sqrt{2x^2 - 6x + 14} - 2(x-2)] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2 - x - 3}{(x-2) + \sqrt{x+3}} + \frac{2x^2 - 6x + 14 - 4(x-2)^2}{\sqrt{2x^2 - 6x + 14} + 2(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 1}{(x-2) + \sqrt{x+3}} - \frac{2(x^2 - 5x + 1)}{\sqrt{2x^2 - 6x + 14} + 2(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 1) \left[\frac{1}{(x-2) + \sqrt{x+3}} - \frac{2}{\sqrt{2x^2 - 6x + 14} + 2(x-2)} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 1)(\sqrt{2x^2 - 6x + 14} - 2\sqrt{x+3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 1) \frac{2x^2 - 6x + 14 - 4(x+3)}{\sqrt{2x^2 - 6x + 14} + 2\sqrt{x+3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 1)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2x^2 - 6x + 14} + 2\sqrt{x+3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

- Thay lại ta có phương trình có một nghiệm $x = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$

Nhận xét:

Qua các ví dụ trên ta thấy việc tìm được nghiệm của một phương trình, khẳng định được tính chất nghiệm là một khâu quan trọng và là cơ sở để định hướng cách giải mà MTCT có thể giúp chúng ta làm tốt được điều đó. Đặc biệt chức năng đạo hàm tại điểm của MTCT cho phép ta tính đạo hàm tại mọi giá trị của x và giúp ta tìm biểu thức liên hợp một cách hiệu quả.

Một vấn đề đặt ra là nếu phương trình có nhiều nghiệm thì sẽ làm như thế nào? Ta sẽ nghiên cứu tiếp trong mục sau.

3.4 Phương trình vô tỷ có nhiều nghiệm

Phương pháp chung:

- Dùng chức năng SOLVE để tìm các nghiệm x_0 của phương trình $f(x)=0$;

- Dùng chức năng $\frac{d}{dx}$ tính đạo hàm tại x_0 để khẳng định tính chất nghiệm;

- Căn cứ vào tính chất nghiệm để ta tách nhân liên hợp;
- Có ba loại chính: Các nghiệm đều là các số hữu tỷ, các nghiệm đều là các số vô tỷ và các nghiệm có cả hữu tỷ lẫn vô tỷ.

+) Để tìm liên hợp cho $\sqrt[n]{f(x)}$ trong trường hợp có hai nghiệm đơn x_0 và x_1 làm như sau: Đặt: $\sqrt[n]{f(x)} = ax + b$ khi đó:
$$\begin{cases} ax_1 + b = \sqrt[n]{f(x_1)} \\ ax_2 + b = \sqrt[n]{f(x_2)} \end{cases} \Rightarrow a, b.$$

+) Trường hợp một nghiệm hữu tỷ và một nghiệm vô tỷ ta áp dụng cách làm cho nghiệm hữu tỷ đơn và vô tỷ đơn...

Áp dụng phương pháp trên ta xét qua các ví dụ sau

Ví dụ 9. Giải phương trình $\sqrt{3x-5} + 2\sqrt[3]{19x-30} = 2x^2 - 7x + 11$ (*)

Phân tích:

- Nhập phương trình vào máy tính, dùng chức năng SOLVE lần lượt với $x = 2, x = 3, x = 4...$ cho ta hai nghiệm $x = 2, x = 3$. Dự đoán phương trình có hai nghiệm trên.

- Kiểm tra tính chất nghiệm tại $x = 2, x = 3$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{d}{dx}(\sqrt{3x-5} + 2\sqrt[3]{19x-30} - 2x^2 + 7x - 11) \Big|_{x=2} &\neq 0 \\ \frac{d}{dx}(\sqrt{3x-5} + 2\sqrt[3]{19x-30} - 2x^2 + 7x - 11) \Big|_{x=3} &\neq 0 \end{aligned}$$

Do đó hai nghiệm trên là hai nghiệm đơn.

- Tìm biểu thức liên hợp cho các căn

+) Giải sử: $\sqrt[3]{19x-30} = ax + b$. Thay 2 và 3 vào ta có

$$\begin{cases} 2a + b = 2 \\ 3a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{19x - 30} = x.$$

$$+) \text{ Tương tự: } \sqrt{3x - 5} = x - 1$$

Giải:

$$\text{- ĐK: } x \geq \frac{5}{3}$$

- Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow [(x - 1) - \sqrt{3x - 5}] + 2[x - \sqrt[3]{19x - 30}] + 2x^2 - 10x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2 - 3x + 5}{(x - 1) + \sqrt{3x - 5}} + \frac{2(x^3 - 19x + 30)}{x^2 + x\sqrt[3]{19x - 30} + \sqrt[3]{(19x - 30)^2}} + 2x^2 - 10x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 1) + \sqrt{3x - 5}} + \frac{2(x - 2)(x - 3)(x + 5)}{x^2 + x\sqrt[3]{19x - 30} + \sqrt[3]{(19x - 30)^2}} + 2(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) \left[\frac{1}{(x - 1) + \sqrt{3x - 5}} + \frac{2(x + 5)}{x^2 + x\sqrt[3]{19x - 30} + \sqrt[3]{(19x - 30)^2}} + 2 \right] = 0$$

$> 0, \forall x \geq \frac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

- **Kết luận:** Phương trình có hai nghiệm $x = 2, x = 3$.

Ví dụ 10. Giải phương trình $4\sqrt{x + 3} + \sqrt{4 - x} = x^2 - 4$ (*)

Phân tích:

- Nhập phương trình vào máy tính, dùng chức năng SOLVE lần lượt với $x = -3, x = -2, x = -1 \dots$ cho ta hai nghiệm

+) $x \approx -2,854101966$ gán vào A (**SHIF RCL (-)** tức là $-2,854101966 \rightarrow A$)

+) $x \approx 3,854101966$ gán vào B (**SHIF RCL (")** tức là $3,854101966 \rightarrow B$)

và Dự đoán phương trình có hai nghiệm trên.

- Kiểm tra tính chất nghiệm tại $x = A, x = B$

$$\text{Ta có: } \frac{d}{dx} (4\sqrt{x + 3} + \sqrt{4 - x} - x^2 + 4) \Big|_{x=A} \neq 0$$

$$\frac{d}{dx} (4\sqrt{x + 3} + \sqrt{4 - x} - x^2 + 4) \Big|_{x=B} \neq 0$$

Do đó hai nghiệm trên là hai nghiệm đơn.

- Tìm biểu thức liên hợp cho các căn

+) *Giải sử:* $\sqrt{x+3} = ax + b$. Thay A và B vào ta có

$$\begin{cases} Aa + b = \sqrt{A+3} \\ Ba + b = \sqrt{B+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+3} = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}.$$

+) *Tương tự:* $\sqrt{4-x} = -\frac{x}{3} + \frac{5}{3}$

Giải: - ĐK: $x \in [-3; -2] \cup [2; 4]$

- Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow 12\sqrt{x+3} + 3\sqrt{4-x} = 3x^2 - 12$$

$$\Leftrightarrow 4[(x+4) - 3\sqrt{x+3}] + [(5-x) - 3\sqrt{4-x}] + 3x^2 - 3x - 33 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4[(x+4)^2 - 9(x+3)]}{(x+4) + 3\sqrt{x+3}} + \frac{(5-x)^2 - 9(4-x)}{(5-x) + 3\sqrt{4-x}} + 3(x^2 - x - 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 11) \left[\frac{4}{\underbrace{(x+4) + 3\sqrt{x+3}}_{>0, \forall x \in [-3; -2] \cup [2; 4]}} + \frac{1}{\underbrace{(5-x) + 3\sqrt{4-x}}_{>0, \forall x \in [-3; -2] \cup [2; 4]}} + 3 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

- **Kết luận:** Phương trình có hai nghiệm $x = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

Nhận xét:

Như vậy, nhờ công cụ hỗ trợ đặc lực là MTCT đã hình thành các cách giải ngắn gọn cho nhiều bài toán. Qua các ví dụ trên phần nào giúp học sinh có thêm kiến thức, kỹ năng, sự tự tin trong việc vận dụng MTCT để giải quyết các bài toán về phương trình vô tỷ trong các kỳ thi THPT Quốc Gia, thi HSG các cấp. Ví dụ sau đây được lấy trong đề thi THPT Quốc Gia năm 2015 mà vận dụng MTCT ta có thể có một cách nhìn mới và hình thành cách giải tự nhiên và đẹp.

Ví dụ 11. Giải phương trình $\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x + 3} = (x+1)(\sqrt{x+2} - 2)$ (*)

(Đề thi THPT Quốc Gia 2015)

Phân tích:

- Nhập phương trình vào máy tính, dùng chức năng SOLVE lần lượt với $x = -1, x = 0, x = 1 \dots$ cho ta hai nghiệm

+) $x \approx 3,302775638$ gán vào A (**SHIF RCL (-)** tức là $3,302775638 \rightarrow A$)

+) $x = 2$

và Dự đoán phương trình có hai nghiệm trên.

- Kiểm tra tính chất nghiệm tại $x = A, x = 2$

$$\text{Ta có: } \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x + 3} - (x+1)(\sqrt{x+2} - 2) \right) \Bigg|_{x=A} \neq 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x + 3} - (x+1)(\sqrt{x+2} - 2) \right) \Bigg|_{x=2} \neq 0$$

Do đó hai nghiệm trên là hai nghiệm đơn.

- Tìm biểu thức liên hợp cho căn $\sqrt{x+2}$

+) Thay $x = 2$ vào căn $\sqrt{x+2}$ được: $\sqrt{x+2} = 2$

+) Thay $x \approx 3,302775638$ vào căn $\sqrt{x+2} \approx 2,302775638 \approx x - 1$

- Đó là cơ sở cho cách giải sau

Giải:

- ĐK: $x \geq -2$

- Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{(x+4)(x-2)}{x^2 - 2x + 3} = (x+1) \frac{x-2}{\sqrt{x+2} + 2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ (x+4)(\sqrt{x+2} + 2) - (x+1)(x^2 - 2x + 3) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

- Giải (2): $(x^2 - 2x + 3)(x+1) - (\sqrt{x+2} + 2)(x+4) = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - x - 5 - (x+4)\sqrt{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 3x - 1) - (x+4)(x - 1 - \sqrt{x+2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x - 1 - \sqrt{x+2})(x - 1 + \sqrt{x+2}) - (x+4)(x - 1 - \sqrt{x+2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1 - \sqrt{x+2}) \left[(x+1)(x - 1 + \sqrt{x+2}) - (x+4) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1 - \sqrt{x+2}) \left[x^2 + x + 3 + (x+1)\sqrt{x+2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1 - \sqrt{x+2}) \left[2x^2 + 2x + 6 + 2(x+1)\sqrt{x+2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1 - \sqrt{x+2}) \left[(x+1+\sqrt{x+2})^2 + x^2 - x + 3 \right] = 0$$

$> 0, \forall x \geq -2$

$$\Leftrightarrow x - 1 - \sqrt{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

- **Kết luận:** Phương trình có hai nghiệm $x = 2, x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$.

Nhận xét:

Đây là một bài toán hay, sâu sắc đòi hỏi ở học sinh phải có kiến thức tổng hợp. Vận dụng MTCT đã cho ta cách giải đơn giản hơn, hướng đi mạch lạc hơn và tư duy bài toán nhẹ nhàng hơn.

3.5 Một số bài toán chọn lọc

Giải các phương trình sau

$$1) x^2 - x + 4 = (x-1)\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3 + x^2 - 4x + 6} \quad \text{ĐS: } x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

$$2) x^3 - x^2 + x - 2 - 2(x-1)\sqrt{x^2 + x} + 2x\sqrt{1-x} = 0 \quad \text{ĐS: } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$3) \frac{3x+3}{\sqrt{x}} = 4 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \quad \text{ĐS: } x = 1$$

$$4) 2x + 3 = \sqrt[3]{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt[3]{6x^2 + 12x + 8} \quad \text{ĐS: } x = 0$$

$$5) \frac{(x-6)\sqrt{x-1} + 8 - 2x}{x-3+\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{2x-1} - 5}{2} \quad \text{ĐS: } x = 5$$

$$6) x^2 + 4x + 3 = (x+1)\sqrt{8x+5} + \sqrt{6x+2} \quad \text{ĐS: } x = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$7) 50x + 124 + (59x + 18)\sqrt{x-1} - (66x + 48)\sqrt{x+2} = 0$$

$$\text{ĐS: } x = 2, x = \frac{146}{25}$$

$$8) x^2 + 14x + 45 - 4(x+7)\sqrt{x+3} + \frac{8}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = 0$$

$$\text{ĐS: } x = 1, x = -\frac{1}{3}$$

$$9) (x\sqrt{2x-1} + 5\sqrt{x-1})(\sqrt[3]{7x-8} + 2) = 2x^3 - x^2 - 25x + 25$$

$$\text{ĐS: } x = 1, x = 5$$

$$10) \sqrt{2x^2 + 16x + 18} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 4 \quad \text{ĐS: } x = \pm 1, x = \frac{3\sqrt{57} - 32}{7}$$

4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường

- Qua thực tế giảng dạy đối với học sinh lớp 11 và 12 tại trường THPT Triệu Sơn 1, bản thân tôi đã áp dụng trực tiếp đề tài này cho lớp 12A2 và có

giảng dạy cho lớp 11C2 đã đạt được hiệu quả rất khả quan: Các em vận dụng được MTCT để tư duy tìm cách giải; vận dụng được các kĩ năng tìm nghiệm, xét được tính chất nghiệm và tìm được các biểu thức liên hợp tương ứng từ đó giải quyết được nhiều bài toán giải phương trình và bất phương trình vô tỷ trong các kỳ thi thử THPT Quốc Gia, thi HSG cấp tỉnh từ đó các em tự tin hơn khi tiếp cận với các bài toán dạng trên. Đặc biệt trong năm học trước 2014 - 2015 lần đầu áp dụng đề tài này giảng dạy cho 48 em học sinh lớp 12 không phải là lớp chọn 1 của nhà trường thì đa số các em đã giải được câu phương trình vô tỷ trong đề thi THPT Quốc Gia 2015 và kết quả là có tới 9 em đạt từ 9 điểm Toán trở lên và điểm trung bình môn Toán của lớp cả lớp là 7,8. Đó là những kết quả bước đầu rất khả quan của SKKN.

- Đặc biệt trong năm học 2015 - 2016 qua kỳ thi Học sinh giỏi cấp tỉnh do Sở giáo dục và đào tạo Thanh Hóa tổ chức học sinh của tôi đã vận dụng giải được câu hệ trong đề thi (liên qua đến ví dụ 7 trong đề tài). Đây là một bài toán khó, đa số học sinh tham gia kỳ thi hoặc không làm được hoặc thêm bớt một hằng số dẫn đến không xử lý được phần còn lại mặc dù các học sinh tham gia đều là các học sinh khá giỏi của các trường THPT trong tỉnh.

- Đề tài được báo cáo dạng chuyên đề trong sinh hoạt chuyên môn của tổ Toán trường THPT Triệu Sơn 1 và được các thầy cô góp ý cũng như đánh giá cao. Dùng làm tài liệu chuyên môn của tổ và áp dụng vào giảng dạy ôn thi THPT Quốc Gia cũng như giảng dạy cho các em học sinh cuối lớp 11 trong trường.

- So sánh giữa các lớp, giữa các học sinh có áp dụng và không áp dụng đề tài để đánh giá tác dụng của SKKN. Tôi đã chọn hai lớp 12 là 12A2 là lớp thực nghiệm và lớp 12 A1 làm lớp đối chứng cùng giảng dạy về phương trình vô tỷ và lớp 12A2 áp dụng đề tài còn lớp 12A1 dạy thông thường. Sau thời gian ba buổi dạy bồi dưỡng, tôi tổ chức kiểm tra đánh cả hai lớp với thời lượng 45 phút với nội dung như sau

Câu 1. Giải phương trình $\sqrt[3]{x-9} + 2x^2 + 3x = \sqrt{5x-1} + 1$

Câu 2. Giải phương trình $3x^2 - x + 3 = \sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4}$

Câu 3. Giải phương trình $\sqrt{9x^3 - 18x^2} + \sqrt{36x^2 - 9x^3} = x^2 + 9$

Kết quả thu được sau kiểm tra

Lớp	Số học sinh làm bài kiểm tra	Khá giỏi		Trung bình		Yếu kém	
		SL	TL%	SL	TL%	SL	TL%
12A1	42	16	38,09	20	47,63	6	14,28
12A2	42	27	64,28	13	30,95	2	4,77

+) Qua bảng kết quả trên ta thấy việc áp dụng đề tài SKKN đã đem lại kết quả rõ rệt.

+) Qua theo dõi tinh thần học tập trên lớp tôi thấy không khí học tập của lớp 12A2 sôi nổi, tích cực hơn, các em phấn khởi và rất hứng thú học. Học sinh dễ tiếp thu và dễ vận dụng từ đó tự tin hơn, qua chấm bài tôi thấy việc trình bày bài của học sinh lớp 12A2 mạch lạc hơn, rõ ràng hơn.

III. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Kết luận

- Qua quá trình áp dụng vào thực tế giảng dạy tại trường THPT Triệu Sơn 1 từ năm học 2014 - 2015, bản thân tôi nhận thấy bước đầu có những kết quả khả quan thể hiện ở hiệu quả giúp học sinh giải quyết được đa số các bài toán giải phương trình vô tỷ. Giúp các em nắm vững phương pháp và vận dụng thành thạo cũng như đơn giản trong cách trình bày. Tạo sự tự tin cho các em trong khi học và giải toán.

- Đề tài được tổ chuyên môn đánh giá cao và định hướng áp dụng giảng dạy cho học sinh khối 11, khối 12 đặc biệt là ôn tập lại cho các em học sinh chuẩn bị tham dự kỳ thi THPT Quốc Gia 2016 và các năm tiếp theo.

- Trong phạm vi một SKKN nên tôi mới chỉ quan tâm đến lớp các phương trình vô tỷ. Đề tài này có thể phát triển để áp dụng vào giải bất phương trình cũng như hệ phương trình. Đó là những hướng phát triển tiếp theo của đề tài mà tôi dự định hoàn thiện tiếp trong thời gian tới.

- Trên đây là kinh nghiệm thực tế qua quá trình giảng dạy nhiều năm tôi rút ra cho bản thân và bước đầu được áp dụng có kết quả khả quan. Do kinh nghiệm chưa nhiều nên đề tài không tránh được những hạn chế, tôi tiếp tục bổ sung và hoàn thiện dần trong những năm học tới, rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của quý vị và các bạn đồng nghiệp để đề tài đi vào thực tiễn được áp dụng nhiều hơn và đạt hiệu quả cao hơn trong giảng dạy.

2. Kiến nghị

- Kiến nghị với sở GD - ĐT Thanh Hóa phổ biến những đề tài nghiên cứu có chất lượng được áp dụng rộng rãi trong các trường. Nhà trường và tổ bộ môn nên có kế hoạch tổ chức những buổi hội thảo trao đổi chuyên môn nâng cao chất lượng giảng dạy, các phong trào viết sáng kiến kinh nghiệm, báo cáo khoa học.

- Tăng cường bồi dưỡng cho giáo viên về kinh nghiệm giảng dạy cũng như các chuyên đề bồi dưỡng cho học sinh, quan tâm và tạo điều kiện cho thể hệ trẻ phát huy tốt nhất năng lực của mình, nâng cao chất lượng giảng dạy. Đảm bảo đội ngũ giáo viên kế cận.

XÁC NHẬN CỦA HIỆU TRƯỞNG

Thanh Hóa, ngày 15 tháng 05 năm 2016
Tôi xin cam đoan đây là SKKN của
mình viết không sao chép nội dung
của người khác

Trần Văn Long

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Sách giáo khoa Đại số và Giải tích lớp 10 nâng cao của BGD-ĐT
- [2]. Đề thi đại học, cao đẳng và THPT Quốc Gia môn Toán của Bộ giáo dục và đào tạo.
- [3]. Đề thi thử đại học của một số trường THPT trên toàn quốc năm 2014 - 2015 và 2015 - 2016.
- [4]. Đề thi HSG các năm của tỉnh Thanh Hoá.
- [5]. Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi của một số trường trong tỉnh, ngoài tỉnh năm 2014 - 2015 và năm học 2015 - 2016.
- [6]. Tạp chí toán học và tuổi trẻ.
- [7]. Bài tập chuyên đề trên trang web: www.vnmath.vn
- [8]. Bài tập chuyên đề trên trang web: www.violet.vn
- [9]. Nguyễn Thái Sơn (2014), Hướng dẫn giải toán trên máy tính CASIO fx - 570VN PLUS.

