

1. PHẦN MỞ ĐẦU

1.1/ Lý do chọn đề tài

Mục đích của việc giảng dạy môn toán ở trường trung học là dạy học sinh về kiến thức toán, cách giải bài tập, rèn luyện kỹ năng giải toán, giúp học sinh khai thác được các hoạt động tiềm ẩn trong nội dung môn toán và hình thành tư duy logic cho học sinh.

Trong sách giáo khoa lớp 12 Giải tích đã trình bày cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số. Vì vậy, một số dạng bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức chứa một biến trở nên đơn giản.

Bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất là một bài toán bất đẳng thức và đây là một trong những bài toán dạng khó ở trường trung học phổ thông. Trong các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức dành cho học sinh khá, giỏi thì biểu thức cần tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất thường chứa không ít hơn hai biến. Không những thế, các bài toán khó thường có giả thiết ràng buộc giữa các biến. Tuy nhiên trong chương trình giảng dạy và học tập bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất luôn là chủ đề hấp dẫn đối với người dạy lẫn người học. Việc giải các bài toán này đòi hỏi người làm phải vận dụng kiến thức hợp lý, nhiều khi khá độc đáo và bất ngờ. Nó đưa chúng ta xích gần lại với các bài toán thường gặp trong thực tế là đi tìm cái “nhất” trong những điều kiện nhất định (nhiều nhất, ít nhất, nhanh nhất, chậm nhất,...). Chính điều đó làm cho học sinh thấy được tính thiết thực của toán học trong cuộc sống. Đồng thời, nó cũng tạo nên sự thích thú cho học sinh trong quá trình giải toán.

Để chứng minh Bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức có nhiều phương pháp, và không có phương pháp nào là vạn năng để giải được mọi bài toán mà chỉ có những phương pháp giải được một nhóm các bài toán mà thôi. Trong quá trình giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi và ôn thi đại học, cao đẳng bản thân đã rút ra được một trong những phương pháp khá hiệu quả là sử dụng đạo hàm bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. Vấn đề đặt ra là những dạng bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất nào thì chuyển về được dạng bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số chứa một ẩn, chặn miền của ẩn như thế nào cho đúng.

Với những lý do như trên tôi chọn đề tài:

“CÁCH CHUYỂN BÀI TOÁN GIÁ TRỊ LỚN NHẤT- GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC NHIỀU BIẾN QUY VỀ MỘT BIẾN”

1.2/ Mục đích nghiên cứu:

Tìm tòi thêm cách chuyển (giảm biến) của biểu thức chứa nhiều biến.

Phát huy kỹ năng vận dụng các bất đẳng thức cơ bản vào giải các bài toán khó trong kì thi THPT Quốc Gia.

Tạo và định hướng giải bài toán Min- Max một cách dễ nhất không gây áp lực khó với học sinh.

1.3/ Đối tượng nghiên cứu:

Là học sinh có lực học từ trung bình khá môn toán trở lên trong chương trình THPT áp dụng cho học sinh khối 12

1.4/ Phương pháp nghiên cứu:

Tổng hợp nghiên cứu các tài liệu liên quan và các bài tập phần tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

2. NỘI DUNG

2.1/Cơ sở lý luận của vấn đề.

- Bất đẳng thức Cô – si, định lý Viét
- Một số kiến thức cơ sở về đạo hàm.
- Định nghĩa giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.
- Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số f trên đoạn $[a;b]$, trên khoảng, nửa khoảng.

2.2/Thực trạng của vấn đề cần nghiên cứu

2.2.1/Thực trạng

Bài toán giá trị lớn nhất, nhỏ nhất là một trong những lĩnh vực khó và khá phức tạp thường xuyên được đề cập trong các đề thi học sinh giỏi, đại học - cao đẳng. Đối với loại toán này học sinh thường hay lúng túng và không tìm ra con đường giải quyết và thường sợ dẫn đến không chịu làm và hay có những kết luận sai lầm. Trong quá trình giảng dạy của mình, có một lần tôi đưa ra cho học sinh của mình giải hai bài toán sau :

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = x\sqrt{(5-x)^3} \text{ trên đoạn } [0;5].$$

Bài 2. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 5$.

Chứng minh rằng: $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \geq -4$

2.2.2/Kết quả thu được

Khi chấm bài của các em, tôi thấy nhiều em không làm xong bài toán. Các em đa số giải được câu 1 mà không giải được câu 2 một cách hoàn chỉnh.

Thực ra đây là bài toán tôi thấy tâm đắc, là bài toán không khó nếu ta chỉ cần một chút về óc quan sát, linh cảm tinh tế “*cách nhìn*” là có thể tìm ra mối liên hệ giữa bài 1 và bài 2 và từ đó nhận được cách giải bài 2 một cách dễ dàng .

Cụ thể như sau :

Bài 1. $f(x) = x\sqrt{(5-x)^3}$ hàm số liên tục trên đoạn $[0; 5]$;

$$f(x) = x(5-x)^{3/2} \quad \forall x \in (0;5)$$

$$f'(x) = \sqrt{5-x} \left(5 - \frac{5}{2}x\right); f'(x) = 0 \Rightarrow x=5; x=2$$

$$\text{Ta có: } f(2) = 6\sqrt{3}, f(0) = f(5) = 0$$

$$\text{Vậy: } \max_{x \in [0;5]} f(x) = f(2) = 6\sqrt{3}, \min_{x \in [0;5]} f(x) = f(0) = 0$$

Bài 2.

Ta có: $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \geq -4 \Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca) \leq 4$

(*). Đặt về trái của (*) là P

Nếu: $ab+bc+ca < 0$ thì $P \leq 0$ suy ra BĐT được chứng minh.

Nếu: $ab+bc+ca \geq 0$, đặt $ab+bc+ca = x \geq 0$

$$(a-b)(b-c) \leq \left(\frac{a-b+b-c}{2}\right)^2 = \frac{(a-c)^2}{4} \Rightarrow (a-b)(b-c)(a-c) \leq \frac{(a-c)^3}{4} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) &= 2(a-c)^2 + 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2 \\ &\geq 2(a-c)^2 + [(a-b) + (b-c)]^2 = 2(a-c)^2 + (a-c)^2 = 3(a-c)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } 4(5-x) \geq 3(a-c)^2, \text{ từ đây ta có } x \leq 5 \text{ và } a-c \leq \sqrt{\frac{4}{3}(5-x)} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } P \leq \frac{1}{4}x \cdot \sqrt{\left[\frac{4}{3}(5-x)\right]^3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}x\sqrt{(5-x)^3} \quad (3)$$

Theo câu a ta có: $f(x) = x\sqrt{(5-x)^3} \leq 6\sqrt{3}$ với x thuộc đoạn $[0; 5]$

nên suy ra $P \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot 6\sqrt{3} \Rightarrow P \leq 4$. Vậy (*) được chứng minh.

Như vậy đưa bài toán nhiều biến về bài toán giá trị lớn nhất, nhỏ nhất một biến quen thuộc đã phát huy có hiệu quả.

Trong quá trình giảng dạy ở các lớp khối 12 và ôn thi đội tuyển tỉnh, ôn thi vào các trường Đại học, cao đẳng tôi đã vận dụng “**Cách chuyển bài toán tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất của biểu thức nhiều biến quy về một biến**” vào học sinh trường THPT Trần Phú - Nga Sơn, các em tiếp thu phát triển rất cao về óc quan sát, linh cảm tinh tế, kết quả thu được rất khả quan. Từ đó tôi mạnh dạn đưa ra chuyên đề này gồm hai bài toán:

Bài toán 1 : Kỹ thuật giảm biến trong bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức chứa hai biến.

Bài toán 2: Kỹ thuật giảm biến trong bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức chứa ba biến.

2.3./ Giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề.

Bài toán 1: Kỹ thuật giảm biến trong bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức chứa hai biến.

- Trong phần này tôi trình bày chi tiết các dạng toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức chứa hai biến mà điều kiện ràng buộc của hai biến hoặc biểu thức thể hiện tính đối xứng hoặc tính đẳng cấp.

Ví dụ 1. Cho x, y là số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$

Hướng dẫn học sinh cách chuyển

Từ giả thiết $x^2 + y^2 = 2$. Có thể đưa bài toán về một ẩn không?

- Ta nghĩ tới hằng đẳng thức $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$; $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.
- Khai triển biểu thức P cố gắng làm xuất hiện $x^2 + y^2$ để sử dụng giả thiết.
- Biến đổi biểu thức P và thế vào $x^2 + y^2 = 2$ ta có :

$$\begin{aligned} P &= 2(x + y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy \\ &= 2(x + y)(2 - xy) - 3xy \end{aligned}$$

- Từ giả thiết $(x + y)^2 - 2xy = 2 \Rightarrow xy = \frac{(x + y)^2 - 2}{2}$.

Vậy đến đây ta có thể nghĩ đến việc có thể đưa P về hàm một biến số nếu ta đặt : $t = x + y$.

Cần chặn biến t bằng cách sử dụng bất đẳng thức: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2}$.

Lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned} P &= 2(x + y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy \\ &= 2(x + y)(2 - xy) - 3xy \end{aligned}$$

Ta có : $xy = \frac{(x + y)^2 - 2}{2}$, vì thế sau khi đặt $t = x + y$ thì:

$$P(t) = 2t\left(2 - \frac{t^2 - 2}{2}\right) - 3\frac{t^2 - 2}{2} = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$$

Ta có $x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2} \Rightarrow (x + y)^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq t \leq 2$.

Xét hàm số $P(t) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$ với $-2 \leq t \leq 2$.

Ta có $P'(t) = -3t^2 - 3t + 6$.

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

Ta có : $f(-2) = -7; f(1) = \frac{13}{2}; f(2) = 1$

Vậy

$$\min_{[-2;2]} P(t) = P(-2) = -7 \quad \text{khí } x = y = -1$$

$$\max_{[-2;2]} P(t) = P(1) = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}; y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}; y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ví dụ 2. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2)$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

Hướng dẫn học sinh cách chuyển

- Biến đổi giả thiết:

$$\begin{aligned} 2(a^2 + b^2) + ab &= (a+b)(ab+2) \\ \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) + ab &= a^2b + ab^2 + 2(a+b) \\ \Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 &= (a+b) + 2(a+b) \\ \Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 &= (a+b) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

- Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta được:

$$(a+b) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)}$$

$$\text{Suy ra: } 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 \geq 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)} + 2 \Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq \frac{5}{2}.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}, \quad t \geq \frac{5}{2}. \text{ Ta được : } P = 4(t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18.$$

Xét hàm số: $f(t) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$

$$f'(t) = 6(2t^2 - 3t - 2) \geq 0, \quad \forall t \geq \frac{5}{2}$$

$$\text{Suy ra } \min_{\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)} f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{23}{4}.$$

Vậy $\min P = -\frac{23}{4}$ đạt được khi và chỉ khi $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{5}{2}$ và $a+b = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

$$(a;b)=(2;1) \text{ hoặc } (a;b)=(1;2)$$

Ví dụ 3: cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = y(x + y)$$

Hướng dẫn học sinh cách chuyển

- nhận thấy biểu thức và điều kiện đều là đẳng cấp bậc 2
- Đặt: $y = tx$ điều kiện $t > 0$
- Khi đó $P = \frac{t^2 + t}{t^2 + 1}$ với $t > 0$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + t}{t^2 + 1}$ và tìm giá trị lớn nhất trên $t > 0$

(bài toán này là bài cơ bản lớp 12)

Bài toán 2: Kỹ thuật giảm biến trong bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức chứa ba biến.

- Trong phần này tôi trình bày chi tiết các dạng toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức ba biến bằng cách đặt ẩn phụ hoặc thế hai biến qua một biến còn lại.

Ví dụ 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = 3(x^4 + y^4 + x^2 y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$.

với x, y là các số thỏa mãn điều kiện : $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$.

Hướng dẫn học sinh cách chuyển

- Vì giả thiết là biểu thức khá phức tạp nên ta khai thác nó trước cho gọn để sử dụng dễ dàng hơn. Chú ý hằng đẳng thức :

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Và $(x + y)^2 \geq 4xy$. Khi đó điều kiện bài toán trở thành : $x + y \geq 1$

Ta biến đổi được A như sau :

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2 y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$= \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^4 + y^4) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$\geq \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3(x^2 + y^2)^2}{4} - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$\left(\text{do } x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} \right)$$

$$\text{Hay } A \geq \frac{9}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1.$$

- Vì vậy ta có thể nghĩ đến việc đưa A về hàm một biến bằng cách đặt $t = x^2 + y^2$.

- Tìm điều kiện của biến t ta sử dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$.

Lời giải.

Ta luôn có kết quả : $(x+y)^2 \geq 4xy$, từ đó ta có :

$$\begin{aligned}(x+y)^3 + 4xy &\geq 2 \Rightarrow (x+y)^3 + (x+y)^2 \geq (x+y)^3 + 4xy \geq 2 \\ &\Rightarrow (x+y)^3 + (x+y)^2 \geq 2 \\ &\Rightarrow [(x+y) - 1][(x+y)^2 + (x+y) + 2] \geq 0 \\ &\Rightarrow (x+y) - 1 \geq 0\end{aligned}$$

$$\text{Do } [(x+y)^2 + (x+y) + 2] = \left[(x+y) + \frac{1}{2} \right]^2 + \frac{7}{4} \geq 0, \forall x, y$$

Bài toán được đưa về tìm max, min của :

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

Với x, y thỏa mãn $x+y \geq 1$.

Ta biến đổi biểu thức A như sau :

$$\begin{aligned}A &= 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1 \\ &= \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^4 + y^4) - 2(x^2 + y^2) + 1 \\ &\geq \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3(x^2 + y^2)^2}{4} - 2(x^2 + y^2) + 1 \\ &\quad \left(\text{do } x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\text{Hay } A \geq \frac{9}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1.$$

$$\text{Vì } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \text{ (do } x+y \geq 1) \text{ nên } x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + y^2. \text{ Ta có hàm số } f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1 \text{ với } t \geq \frac{1}{2}.$$

(Đây là bài toán quen thuộc với học sinh 12)

Ví dụ 5: Cho a, b, c là ba số thực không đồng thời bằng 0 thỏa mãn:

$$(a+b+c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của : } P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

Hướng dẫn học sinh cách chuyển

Ta nhận thấy P là biểu thức đối xứng ba biến có điều kiện của các biến do đó để chuyển P chỉ chứa một biến chúng ta sẽ đi từ điều kiện của các biến thật vậy ta có :

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{4}(a+b+c)^2$$

Thế vào P Khi đó $P = \frac{4(a^3 + b^3 + c^3)}{(a+b+c)^3} = 4\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^3 + 4\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^3 + 4\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^3$

Bây giờ ta dùng đặt ẩn : Đặt $x = \frac{4a}{a+b+c}$; $y = \frac{4b}{a+b+c}$; $z = \frac{4c}{a+b+c}$

từ phép đặt ta có : $\begin{cases} x+y+z=4 \\ xy+yz+xz=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=4-x \\ yz=4-x(y+z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=4-x \\ yz=x^2-4x+4 \end{cases} (*)$

Từ đó $16P = x^3 + y^3 + z^3 = x^3 + (y+z)^3 - 3yx(y+z) = 3x^3 - 12x^2 + 12x + 16$

$$P = \frac{3}{16}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1$$

Từ (*) để tồn tại y và z (theo viet) khi và chỉ khi : $(4-x)^2 \geq 4(4-4x+x^2) \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{8}{3}\right]$

Như vậy bài toán trở thành tìm GTLN và GTNN $P = \frac{3}{16}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1$ trên $x \in \left[0; \frac{8}{3}\right]$ đây là bài toán cực kỳ quen thuộc với bất kì học sinh lớp 12 và giải một cách dễ dàng.

Nhận xét : Qua ví dụ 6 ta nhận thấy để chuyển không khó đối với nhiều các em học sinh tuy nhiên trong quá trình chuyển đổi miền xác định của biến cực kì quan trọng ,ở trên có một phương pháp chặn biến rất hay :

Từ $\begin{cases} y+z=4-x \\ yz=x^2-4x+4 \end{cases}$ để tồn tại y

và z (Theo vi-est) khi và chỉ khi : $(4-x)^2 \geq 4(4-4x+x^2) \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{8}{3}\right]$ từ việc chặn

được x và chuyển P như vậy ta thấy việc nắm bắt bài toán ví dụ 1 một cách dễ dàng

Ví dụ 6. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 6 \\ ab + bc + ca = -3. \end{cases} \text{ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức } P = a^6 + b^6 + c^6.$$

Hướng dẫn học sinh cách chuyển

Tiếp tục gặp một bài toán đối xứng ba biến sau đây ta sẽ nhìn cách chuyển biểu thức P :

Từ giả thiết suy ra : $a + b + c = 0 \Rightarrow P = a^6 + b^6 + c^6 \Rightarrow P - 3(abc)^2$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2)$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)^3 - 3(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 216 - 18.9 = 54.$$

Suy ra $P = 3(abc)^2 + 54$. Đặt $t = abc$ thì việc chặn t như thế nào, rất hay như sau :

Ta có: a, b, c là ba nghiệm thực của phương trình: $(x - a)(x - b)(x - c) = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x - abc = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = abc + 1 \quad (3)$$

Từ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$, suy ra pt (3) có ba nghiệm thực a, b, c khi và chỉ khi $-1 \leq abc + 1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq abc \leq 2$.

$abc = -2$, khi trong ba số a, b, c có hai số bằng 1 và một số bằng -2.

$abc = 2$, khi trong ba số a, b, c có hai số bằng -1 và một số bằng 2.

Như vậy bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất: $P = 3t^2 + 54$ trên đoạn $[-2; 2]$

Ví dụ 7. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ xyz = 3 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $183 - 165\sqrt{5} \leq x^4 + y^4 + z^4 \leq 18$

Hướng dẫn học sinh cách chuyển

- Biểu thức $P = x^4 + y^4 + z^4$ đối xứng với ba ẩn x, y, z . Biến đổi P theo $x + y + z$; xyz ; $xy + yz + zx$ như thế nào?

- Ta có

$$P = x^4 + y^4 + z^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

$$= (4^2 - 2(xy + yz + zx))^2 - 2(xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x + y + z)$$

- Với mỗi quan hệ như trên thì chuyển P về biến mới như thế nào?

$$\text{Đặt } t = xy + yz + zx \text{ và từ giả thiết } \begin{cases} x + y + z = 4 \\ xyz = 3 \end{cases} \text{ ta có } P = 2(t^2 - 32t + 144)$$

- Tìm điều kiện cho ẩn mới như thế nào?

Từ các điều kiện đối với x, y, z ta được $y + z = 4 - x$; $yz = \frac{2}{x}$ do đó $t = x(4 - x) + \frac{2}{x}$

- Tìm điều kiện đối với ẩn x và chuyển điều kiện đó theo ẩn t .

áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương y, z ta có:

$$(y + z)^2 \geq 4yz \Leftrightarrow (4 - x)^2 \geq \frac{8}{x} \Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + 16x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 6x + 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} \leq x \leq 2.$$

Xét hàm số $t(x) = x(4 - x) + \frac{2}{x}$ trên đoạn $[3 - \sqrt{5}; 2]$, ta có:

$$t'(x) = \frac{-2(x - 1)(x^2 - x - 1)}{x^2}.$$

Từ việc xét dấu $t'(x)$ trên đoạn $[3 - \sqrt{5}; 2]$ ta được $5 \leq t \leq \frac{5\sqrt{5} - 1}{2}$

Khảo sát hàm số $P = 2(t^2 - 32t + 144)$ trên $5 \leq t \leq \frac{5\sqrt{5} - 1}{2}$ và suy ra :

$$183 - 165\sqrt{5} \leq x^4 + y^4 + z^4 \leq 18$$

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của : $P = \frac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$ với $x^2 - xy + y^2 = 1$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của : $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ với $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của : $P = \frac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x + y + z)^3}$ với $x + y + z > 0; x, y, z \geq 0$

Bài 4. Cho x, y thỏa mãn : $x^2 + xy + y^2 \leq 3$ chứng minh rằng :

$$-(4\sqrt{3} + 3) \leq x^2 - xy - 3y^2 \leq 4\sqrt{3} - 3$$

Bài 5. Cho $x, y, z \in [-1; 1]$ và $x + y + z = 0$ Tìm giá trị nhỏ nhất

$$A = \sqrt{1 + x + \frac{7}{9}y^2} + \sqrt{1 + y + \frac{7}{9}z^2} + \sqrt{1 + z + \frac{7}{9}x^2}$$

Bài 6. Cho ba số thực $x, y, z \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

Bài 7. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $M = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Bài 8. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = 3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc$$

Bài 9. Cho $x, y \in [2014; 2015]$ tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x+y}{xy^2} (x^2 + y^2)$$

Bài 10. Cho x, y, z là số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức :

$$P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

Bài 11. Cho $x > 0; y > 0; z > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Tìm GTLN của biểu thức :

$$T = xy + yz + zx - 2xyz$$

3. KẾT LUẬN

3.1/ Kết quả thu được

Trên đây là những cách chuyển từ những bài toán khó về bài toán quen thuộc trong quá trình giảng dạy tìm tòi và nghiên cứu tôi đã hệ thống lại các phương pháp và đưa ra các bài tập có tính minh họa .

Trong thực tế ngoài những vấn đề tôi trình bày bày còn có rất nhiều các phương pháp khác như “ dồn biến bằng kỹ thuật hàm số “ hay “ dồn biến bằng hàm lồi”.Tuy nhiên sau nhiều năm áp dụng sáng kiến này trong việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh trường THPT Trần Phú - Nga Sơn đã thu được kết quả như sau :

- Làm cho các em yêu thích hơn về môn học.
- Có cách giải hợp lý, hay, ngắn gọn trong suy luận và tư duy chặt chẽ
- Số học sinh giỏi, học sinh thi vào Đại học, Cao đẳng ở các năm ngày càng tăng.
- Năm học 2015 -2016 giảng dạy lớp 12A sáng kiến đạt kết quả như sau:

Khi chưa áp dụng			Đã áp dụng sáng kiến	
Sĩ số : 45	Số lượng	%	Số lượng	%
Hiểu và vận dụng	2	4%	15	34%
Hiểu và chưa biết vận dụng	10	22%	20	44%
Không vận dụng được	23	74%	10	22%

3.2/ Bài học kinh nghiệm rút ra .

Sau một thời gian đưa vào áp dụng , bồi dưỡng học sinh tôi tự rút ra một số kinh nghiệm sau :

- Giáo viên phải nghiên cứu kỹ kiến thức sách giáo khoa, tài liệu tham khảo .
- Lựa chọn đúng phương pháp bộ môn phù hợp với đối tượng học sinh.
- Để áp dụng và làm bài tập tốt cần cho học sinh nắm vững cơ sở lý thuyết của vấn đề tránh những thiếu sót và không chặt chẽ trong quá trình giải của học sinh.
- Khi cho làm tiết luyện tập cần lưu ý kỹ thuật kỹ năng của các em.

sau mỗi bài tập cần chốt lại phần cơ bản của vấn đề và nhận xét nhằm lồi cuốn học sinh có lòng say mê toán học .

3.3/ Kiến nghị , đề xuất .

Với đề tài: “**Cách chuyển bài toán tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất của biểu thức nhiều biến quy về một biến**” tôi đã cố gắng hệ thống một số dạng cơ bản. Trong mỗi giờ dạy có đưa ra cơ sở lý thuyết và những ví dụ có các hoạt động khám phá rất cụ thể nhằm giúp học sinh có thể tự tìm ra lời giải cho mình, từ đó hình thành cho mình phương pháp giải toán nói chung để giải quyết các bài toán này.

Các bài tập đưa ra từ dễ đến khó, có những bài tập có lời giải chi tiết nhưng có những bài tập chỉ có hướng dẫn học sinh phải biết chiếm lĩnh tri thức, phát triển khả năng tư duy cho học sinh. Hệ thống các bài tập trong đề tài này chủ yếu là các

bài tập trong các đề thi Đại học và Cao đẳng những năm gần đây nên khi học sinh hiểu bài và làm được thì tạo nên hứng thú và động lực học tập rất tốt cho các em.

Tuy nhiên trong quá trình giảng dạy vẫn có nhiều học sinh còn bỡ ngỡ trong quá trình giải bài toán cực trị, lập luận còn thiếu căn cứ, suy diễn chưa hợp lý logic và đặc biệt một số dạng chưa phù hợp với học sinh trung bình và yếu.

Mặc dù có rất nhiều cố gắng nhưng do trình độ bản thân và tài liệu tham khảo còn hạn chế lại chưa có kinh nghiệm trong lĩnh vực nghiên cứu khoa học nên trong cách trình bày không tránh khỏi sơ xuất thiếu sót. Rất mong được sự giúp đỡ, góp ý của các thầy, cô và bạn bè đồng nghiệp để tôi rút kinh nghiệm trong quá trình giảng dạy của mình trong thời gian sau.

Tôi xin chân thành cảm ơn !

Nga Sơn, ngày 5 tháng 5 năm 2016

Tôi xin cam đoan sáng kiến trên đây do tôi tự nghiên cứu không sao chép .

Xác nhận của cơ quan đơn vị

Người viết

Nguyễn Văn Hôi