

Bài 20. Phép tính Logarit

Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

PHẦN E. CÂU HỎI TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Rút gọn biểu thức sau: $Q = \sqrt{\log_a^2(ab) - \frac{2 \ln b}{\ln a} - 1}$ với a, b là các số thực dương và a khác 1.

Lời giải**Lời giải**Ta có: $Q = \sqrt{(\log_a a + \log_a b)^2 - 2 \log_a b - 1}$

$$= \sqrt{(1 + \log_a b)^2 - 2 \log_a b - 1}$$

$$= \sqrt{1 + 2 \log_a b + \log_a^2 b - 2 \log_a b - 1} = \sqrt{\log_a^2 b} = |\log_a b|.$$

Câu 2. Cho $a, b > 0$ và đều khác 1 thỏa mãn $\ln a + \ln(8b) = 2 \ln(a + 2b)$.

$$P = \log_b(2a) + \log_{\frac{a}{2}}(2b) - \frac{1}{\log_8 b}$$

Rút gọn biểu thức:

Lời giải**Lời giải**Với a, b là các số thực dương khác 1, ta có:

$$\begin{aligned} \ln a + \ln(8b) = 2 \ln(a + 2b) &\Leftrightarrow \ln(8ab) = \ln(a + 2b)^2 \Leftrightarrow 8ab = (a + 2b)^2 \\ &\Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2b. \end{aligned}$$

$$P = \log_b(2a) + \log_{\frac{a}{2}}(2b) - \frac{1}{\log_8 b} = \log_b(4b) + \log_b(2b) - \log_b 8$$

Khi đó:

$$= \log_b \frac{8b^2}{8} = \log_b b^2 = 2.$$

Câu 3. Cho a, b là các số thực dương khác 1 và thỏa mãn $ab \neq 1$.

Rút gọn biểu thức $P = (\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \log_b a - 1$.**Lời giải****Lời giải**

$$\begin{aligned} P &= (\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \log_b a - 1 \\ &= \left(\log_a b + \frac{1}{\log_a b} + 2 \right) \left(\log_a b - \frac{\log_a b}{\log_a(ab)} \right) \log_b a - 1 \\ &= \frac{\log_a^2 b + 2 \log_a b + 1}{\log_a b} \left(\log_a b - \frac{\log_a b}{1 + \log_a b} \right) \log_b a - 1 \\ &= \frac{(\log_a b + 1)^2}{\log_a b} \frac{\log_a^2 b}{1 + \log_a b} \log_b a - 1 = (\log_a b + 1) \log_a b \log_b a - 1 = \log_a b \end{aligned}$$

Câu 4. Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $Q = \log_a(b^2 c^3)$.

Lời giải**Lời giải**Ta có: $Q = \log_a(b^2 c^3) = \log_a b^2 + \log_a c^3 = 2 \log_a b + 3 \log_a c = 2.2 + 3.3 = 13$

$$T = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}} \right)$$

Câu 5. Cho số thực a thỏa mãn $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức

Lời giải

Lời giải

$$T = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}} \right) = \log_a \frac{a^{2 + \frac{2}{3} + \frac{4}{5}}}{a^{\frac{7}{15}}} = \log_a a^{2 + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} - \frac{7}{15}} = \log_a a^3 = 3$$

Ta có:

$$P = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{b}}{c^3} \right)$$

Câu 6. Cho $\log_a b = 3$ và $\log_a c = 4$ với $a; b; c > 0; a \neq 1$. Tính giá trị của

Lời giải

Lời giải

$$P = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{b}}{c^3} \right) = \log_a a^2 + \log_a \sqrt{b} - \log_a c^3 = 2 + \log_a b^{\frac{1}{2}} - 3 \log_a c$$

Ta có:

$$= 2 + \frac{1}{2} \log_a b - 3 \log_a c = 2 + \frac{3}{2} - 12 = -\frac{17}{2}.$$

$$B = \log \frac{1}{1000} + 3 \cdot \log_{\frac{1}{10}} 100 - 10^{1+\log 2}$$

Câu 7. Tính giá trị biểu thức:

Lời giải

Lời giải

$$\log \frac{1}{1000} = \log \frac{1}{10^3} = \log 10^{-3} = -3$$

$$\log_{\frac{1}{10}} 100 = \log_{10^{-1}} 10^2 = \frac{2}{-1} \log_{10} 10 = -2$$

$$10^{1+\log 2} = 10^{\log 10 + \log 2} = 10^{\log(10 \cdot 2)} = 10 \cdot 2 = 20$$

$$\text{Vậy } B = -3 + 3(-2) - 20 = -29$$

Câu 8. Cho $a = \log_2 5, b = \log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log_6 5$ theo a và b .

Lời giải

Lời giải

$$\log_6 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 6} = \frac{a}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{a}{1 + \log_2 5 \log_3 5} = \frac{a}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{ab}{b+a}$$

Ta có:

Câu 9. Cho $a = \log 2, b = \ln 2$. Hãy biểu diễn $\ln 800$ theo a và b .

Lời giải

Lời giải

$$\ln 800 = \ln(2^3 \cdot 10^2) = 3 \ln 2 + 2 \ln 10 = 3 \ln 2 + 2 \ln 2 \cdot \log_2 10$$

Ta có:

$$= 3 \ln 2 + \frac{2 \ln 2}{\log 2} = 3b + \frac{2b}{a}.$$

Câu 10. Cho $a = \log_3 4, b = \log_5 4$. Hãy biểu diễn $\log_{12} 80$ theo a và b .

Lời giải

Lời giải

$$\log_{12} 80 = \frac{\log_4 80}{\log_4 12} = \frac{\log_4 (4^2 \cdot 5)}{\log_4 (4 \cdot 3)} = \frac{2 + \log_4 5}{1 + \log_4 3} = \frac{2 + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{\frac{2b+1}{b}}{\frac{a+1}{a}} = \frac{a(2b+1)}{(a+1)b}$$

Ta có:

Câu 11. Cho $a = \log_2 3, b = \log_5 2, c = \log_2 7$. Hãy biểu diễn $\log_{42} 15$ theo a, b, c .

Lời giải

Lời giải

$$\log_{42} 15 = \frac{\log_2 15}{\log_2 42} = \frac{\log_2 3 + \log_2 5}{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 7} = \frac{a + \frac{1}{b}}{1 + a + c} = \frac{ab + 1}{b(a + c + 1)}$$

Ta có:

Câu 12. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 14xy$. Khi đó:

$$\log_2(x + y) = a + \frac{\log_2 xy}{a}. \text{ Tìm } a$$

Lời giải

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 = 14xy \Leftrightarrow (x + y)^2 = 16xy \Leftrightarrow \log_2(x + y)^2 = \log_2(16xy)$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_2(x + y) = 4 + \log_2(xy) \Leftrightarrow \log_2(x + y) = 2 + \frac{\log_2(xy)}{2}.$$

Câu 13. Số tự nhiên 3^{2023} có bao nhiêu chữ số?

Lời giải

Lời giải

$$\text{Đặt } n = 3^{2023} \Rightarrow \log n = 2023 \log 3 \approx 965,216$$

$$\text{Suy ra } 965 < \log n < 966 \Rightarrow 10^{965} < n < 10^{966}$$

Ta biết 10^{965} có 966 chữ số, 10^{966} có 967 chữ số mà n nằm trong khoảng $(10^{965}; 10^{966})$ nên n có tất cả 966 chữ số.

Lưu ý:

Từ cách giải trên ta rút ra cách tính nhanh số các chữ số của n là: $[A] + 1 = [2023 \log 3] + 1 = 965 + 1 = 966$ trong đó $[A] = [2023 \log 3]$ là phần nguyên của A (hay phần nguyên của $\log 3^{2023}$).

Kĩ năng bấm máy:

VINACAL [®] 680EX PLUS	ẤN PHÍM	HIỂN THỊ
	ALPHA, +	Int(...)
	, 2, 0, 2, 3, log, 3, =	965

Vậy số đã cho có 966 chữ số.

Câu 14. Dung dịch A có nồng độ H^+ là $0,00001 \text{ mol/L}$ và dung dịch B có nồng độ H^+ là $0,00000001 \text{ mol/L}$.

Tìm độ pH của mỗi dung dịch trên. Độ pH của dung dịch nào lớn hơn?

Lời giải

Lời giải

$$\text{Độ } pH \text{ của dung dịch } A \text{ là } pH_A = -\log[H^+]_A = -\log 0,00001 = 5$$

Độ pH của dung dịch B là $pH_B = -\log[H^+]_B = -\log 0,00000001 = 8$.

Nồng độ pH của dung dịch B là lớn hơn của dung dịch $A(8 > 5)$.

Câu 15. Trong nông nghiệp bèo hoa dâu được dùng làm phân bón, nó rất tốt cho cây trồng. Mới đây, các nhà khoa học Việt Nam đã phát hiện ra bèo hoa dâu có thể dùng để chiết xuất ra chất có tác dụng kích thích hệ miễn dịch và hỗ trợ điều trị bệnh ung thư. Bèo hoa dâu được thả nuôi trên mặt nước. Một người đã thả một lượng bèo hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bèo phát triển thành 3 lần số lượng đã có và giả sử tốc độ phát triển của bèo ở mọi thời điểm như nhau. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày bèo sẽ vừa phủ kín mặt hồ?

Lời giải

Lời giải

Số lượng bèo ban đầu chiếm 0,04 diện tích mặt hồ.

Sau 1 tuần số lượng bèo là $0,04 \times 3$ diện tích mặt hồ.

Sau 2 tuần số lượng bèo là $0,04 \times 3^2$ diện tích mặt hồ.

Sau n tuần số lượng bèo là $0,04 \times 3^n$ diện tích mặt hồ.

Để bèo phủ kín mặt hồ thì: $0,04 \times 3^n = 1 \Rightarrow 3^n = 25 \Rightarrow n = \log_3 25$ (tuần).

Số ngày tương ứng là $7n = 7 \log_3 25 \approx 20,51$ (ngày).

Vậy sau ít nhất 21 ngày thì bèo hoa dâu sẽ phủ kín mặt hồ.

Câu 16. Cho $a = \log_{25} 11, b = \log_2 5$. Hãy biểu diễn $\log_{625} \frac{121}{16}$ theo a và b .

Lời giải

Lời giải

Ta có:
$$\log_{625} \frac{121}{16} = \log_{5^4} \frac{121}{16} = \frac{1}{4} \log_5 \frac{121}{16} = \frac{1}{4} (\log_5 11^2 - \log_5 2^4)$$
$$= \frac{1}{4} (2 \log_5 11 - 4 \log_5 2) = \frac{1}{2} \log_5 11 - \log_5 2.$$
312

Theo giả thiết, ta có: $a = \log_{25} 11 = \frac{1}{2} \log_5 11; b = \log_2 5 \Rightarrow \log_5 2 = \frac{1}{b}$.

Vậy $\log_{625} \frac{121}{16} = a - \frac{1}{b}$.

Câu 17. Cho $a = \log_3 5, b = \log_2 7, c = \log_2 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 1260$ theo a, b, c .

Lời giải

Lời giải

Ta có:
$$\log_6 1260 = \log_6 (6^2 \cdot 35) = 2 + \log_6 35 = 2 + \frac{\log_2 35}{\log_2 6}$$
$$= 2 + \frac{\log_2 5 + \log_2 7}{1 + \log_2 3} = 2 + \frac{\log_2 3 \cdot \log_3 5 + b}{1 + c} = 2 + \frac{ca + b}{1 + c}.$$

Câu 18. Cường độ một trận động đất M (độ Richter) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỉ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, một trận động đất khác ở Nam Mỹ có biên độ rung chấn mạnh hơn gấp 4 lần. Hỏi cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là bao nhiêu (kết quả được làm tròn đến hàng phần chục)?

Lời giải

Lời giải

Gọi M_1, M_2 lần lượt là cường độ của trận động đất ở San Francisco và ở Nam Mỹ. Trận động đất ở San Francisco có cường độ là 8 độ Richter nên:

$M_1 = \log A - \log A_0 \Leftrightarrow 8 = \log A - \log A_0$. Trận động đất ở Nam Mỹ có biên độ là $4A$, khi đó cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là:

$$M_2 = \log(4A) - \log A_0 = \log 4 + (\log A - \log A_0) = \log 4 + 8 \approx 8,602. \quad (\text{độ Richter})$$

Câu 19. Cho $a = \log_5 18$ và $b = \log_5 60$. Tính $\log_3 2$ theo a và b .

Lời giải

Lời giải

Đầu tiên ta có hệ
$$\begin{cases} a = \log_5 18 = \log_5 2 + 2\log_5 3 \\ b = \log_5 60 = 2\log_5 2 + \log_5 3 + 1 \end{cases}$$

Đặt $x = \log_5 2$ và $y = \log_5 3$ từ đó ta có hệ phương trình bậc nhất hai ẩn:

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + y = b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_5 2 = \frac{-a + 2b - 2}{3} \\ y = \log_5 3 = \frac{2a - b + 1}{3} \end{cases}$$

$$\log_3 2 = \frac{\log_5 2}{\log_5 3} = \frac{-a + 2b - 2}{2a - b + 1}$$

Nên

Câu 20. Đặt $\log_{27} 5 = a, \log_8 7 = b$ và $\log_2 3 = c$. Hãy biểu diễn $\log_6 35$ theo a, b, c .

Lời giải

Lời giải

Ta có
$$\log_{27} 5 = \log_{3^3} 5 = \frac{1}{3} \log_3 5 = a \Rightarrow 3a = \log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \Rightarrow \log_2 5 = 3ac$$

$$\log_8 7 = \log_{2^3} 7 = \frac{1}{3} \log_2 7 = b \Rightarrow \log_2 7 = 3b$$

Suy ra
$$\log_6 35 = \frac{\log_2 (7 \cdot 5)}{\log_2 (2 \cdot 3)} = \frac{\log_2 5 + \log_2 7}{1 + \log_2 3} = \frac{3ac + 3b}{1 + c}$$

Câu 21. Để xác định tính axit (hay tính bazơ) của một dung dịch, người ta đã dựa vào độ pH của dung dịch: $pH = -\log [H^+]$ với $[H^+]$ là nồng độ của ion hydro (mol/L hay M).

Dung dịch với độ pH bằng 7 sẽ được coi là trung hòa, độ $pH < 7$ là acid, độ $pH > 7$ là bazơ. Giả sử một dung dịch có nồng độ của ion hydrogen là $[H^+] = 0,00001M$. Hãy xác định xem dung dịch đó có tính axit, bazơ hay trung hòa?

Lời giải

Lời giải

Độ pH của dung dịch trên là: $pH = -\log [H^+] = -\log 10^{-5} = 5 < 7$ nên dung dịch trên là axit.

Câu 22. Cho $\log 3 = a, \log 5 = b$. Tính $\log_{450} 15$.

Lời giải

Lời giải

$$\log_{450} 15 = \frac{\log 15}{\log 450} = \frac{\log(3 \cdot 5)}{\log(3^2 \cdot 5 \cdot 10)} = \frac{\log 3 + \log 5}{\log 3^2 + \log 5 + \log 10} = \frac{\log 3 + \log 5}{2\log 3 + \log 5 + \log 10} = \frac{a + b}{2a + b + 1}$$

Câu 23. Cho $\log_2 x = a$. Tính $\log_2 4x + \log_4 \frac{x}{8} - \log_{\sqrt{2}} 16x^3$ theo a .

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned}\log_2 4x + \log_4 \frac{x}{8} - \log_{\sqrt{2}} 16x^3 &= \log_2 4 + \log_2 x + \log_4 x - \log_4 8 - \log_{2^{1/2}} 16 - \log_{2^{1/2}} x^3 \\ &= 2 + a + \frac{1}{2} \log_2 x - \log_{2^2} 2^3 - 2 \log_2 2^4 - 2.3 \log_2 x \\ &= 2 + a + \frac{1}{2} a - \frac{3}{2} - 8 - 6a = -\frac{9}{2} a - \frac{15}{2}\end{aligned}$$

Câu 24. Một dung dịch có nồng độ H^+ gấp 17 lần nồng độ H^+ của cà phê đen. Tính độ pH của dung dịch đó.

Lời giải

Lời giải

$$pH_{dd} = -\log(17 \cdot 10^{-5}) = -[\log 17 + \log 10^{-5}] = -[\log 17 - 5] \simeq 3,77$$

----HẾT---