

BÀI 12. CÂU TOÁN CHUYỂN ĐỘNG THEO QUÃNG ĐƯỜNG LÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

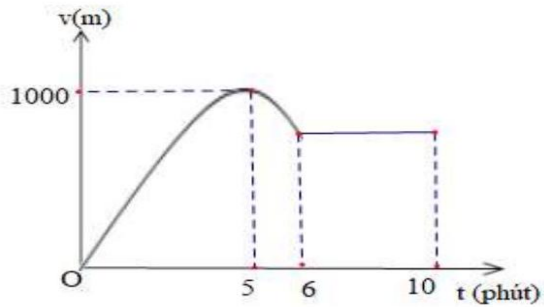
PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Lý thuyết : Xác định hàm số bậc hai ta làm như sau :

Gọi hàm số cần tìm là $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Căn cứ theo giả thiết Câu toán để thiết lập và giải hệ phương trình với ẩn a, b, c từ đó suy ra hàm số cần tìm.

Phương pháp: Xác định hàm số của các dạng đồ thị quen thuộc dựa vào các yếu tố đã cho sau đó tính tích phân.

Ví dụ: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/ phút và bắt đầu giảm tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều (hình vẽ).



Hỏi quãng đường xe đã đi được trong 10 phút đầu tiên kể từ lúc bắt đầu là bao nhiêu mét?

Lời giải

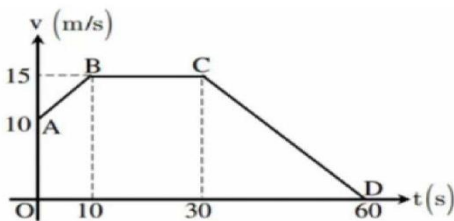
Giả sử trong 5 phút đầu vận tốc của ô tô đã biểu diễn bởi phương trình $v(t) = at^2 + bt + c$. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} c = 0 \\ \frac{-b}{2a} = 5 \\ 25a + 5b + c = 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a + b = 0 \\ 25a + 5b = 1000 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -40 \\ b = 400 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -40t^2 + 400t$$

Khi $t = 6$ ta có $v(6) = 960 \text{ m/ phút}$. Suy ra trong 10 phút đầu xe ô tô chuyển động được quãng đường là $S = \int_0^5 (-40t^2 + 400t) dt + 960 \cdot 4 = 4320 + 3840 = 8160 \text{ (m)}$.

PHẦN B. CÂU TẬP ÁP DỤNG

Câu 1: Một vật chuyển động thẳng có đồ thị vận tốc - thời gian như hình vẽ sau:



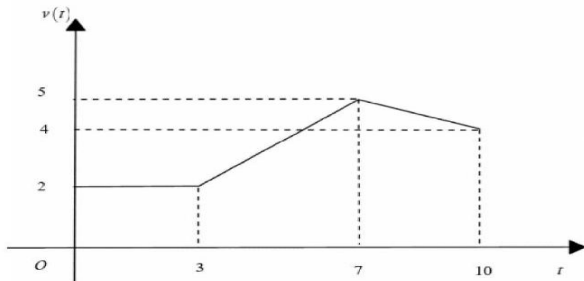
Tính quãng đường vật chuyển động trong 60 s.

Lời giải

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên trục Ot . Ta có:

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^{60} v(t) dt = \int_0^{10} v(t) dt + \int_{10}^{30} v(t) dt + \int_{30}^{60} v(t) dt \\
 &= S_{OABH} + S_{HBCK} + S_{KCD} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (10 + 15) \cdot 10 + 20 \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 15 = 650(m)
 \end{aligned}$$

Câu 2: Một vật chuyển động trong 10 giây với vận tốc $v \text{ (m/s)}$ phụ thuộc vào thời gian $t \text{ (s)}$ có đồ thị như hình vẽ.

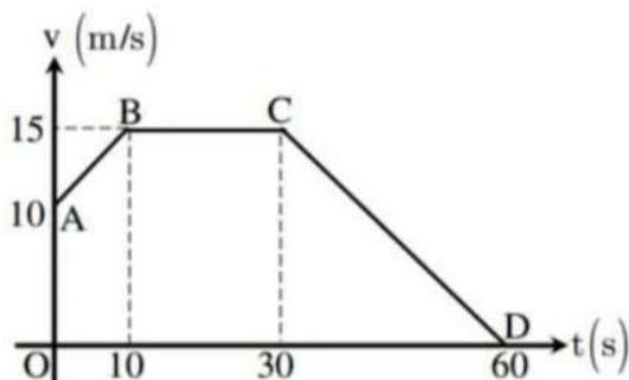


Quãng đường vật chuyển động được trong 10 giây bằng bao nhiêu?

Lời giải

Vận tốc chuyển động của vật trong 3 giây đầu là $v_1(t) = 2$.

Vận tốc chuyển động của vật từ giây thứ 3 đến giây thứ 7 là $v_2(t) = \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}$.

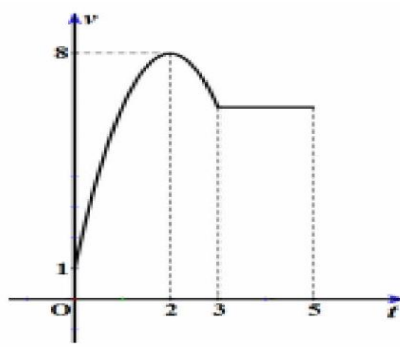


Vận tốc chuyển động của vật từ giây thứ 7 đến giây thứ 10 là $v_3(t) = -\frac{1}{3}t + \frac{22}{3}$.

Ta có $S'(t) = v(t)$, suy ra

$$S = \int_0^3 v_1(t) dt + \int_3^7 v_2(t) dt + \int_7^{10} v_3(t) dt = \int_0^3 2 dt + \int_3^7 \left(\frac{3}{4}t - \frac{1}{4} \right) dt + \int_7^{10} \left(-\frac{1}{3}t + \frac{22}{3} \right) dt = \frac{67}{2}.$$

Câu 3: Một vật chuyển động trong 5 giờ với vận tốc v phụ thuộc thời gian t có đồ thị của vận tốc như hình dưới. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;8)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường S mà vật di chuyển được trong 5 giờ đó.

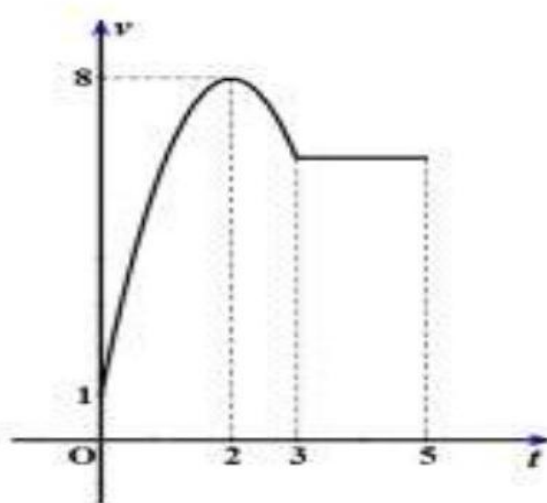


Lời giải

Gọi $(P): v(t) = at^2 + bt + c$

Vì (P) qua $A(0;1)$ và có đỉnh $I(2;8)$ nên ta có

$$\begin{cases} 1 = c \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ 8 = 4a + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = c \\ 4a + b = 0 \\ 4a + 2b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = 7 \\ a = -\frac{7}{4} \end{cases}$$



được phương trình là $v(t) = -\frac{7}{4}t^2 + 7t + 1$

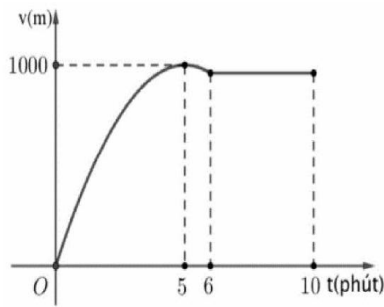
Ngoài ra tại $t=3$ ta có $v = \frac{25}{4}$

$$s = \int_0^3 \left(-\frac{7}{4}t^2 + 7t + 1 \right) dt + \int_3^5 \frac{25}{4} dt = 31,25(km)$$

Vậy quãng đường cần tìm là:

Câu 4: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động được (tham khảo hình vẽ).

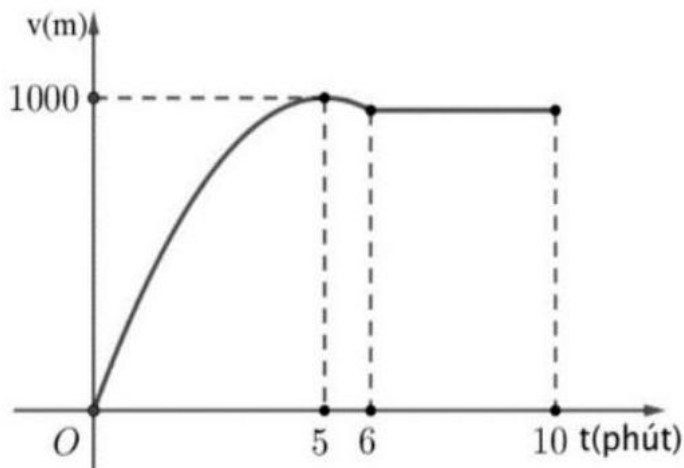
Quãng đường xe đi được sau 10 phút đầu tiên kể từ khi hết đèn đỏ là bao nhiêu mét?



Lời giải

Phương trình vận tốc của ô tô là:

Trong khoảng thời gian 6 phút đầu đồ thị của vận tốc là một đường parabol đi qua điểm $(0;0), (5;1000)$ và có hoành độ đỉnh bằng 5, do đó:



$$\begin{cases} c=0 \\ 25a+5b+c=1000 \\ -\frac{b}{2a}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 5a+b=200 \\ 10a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-40 \\ b=400 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow v(t) = \begin{cases} -40t^2 + 400t & \text{khi } 0 \leq t \leq 5 \\ 960 & \text{khi } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

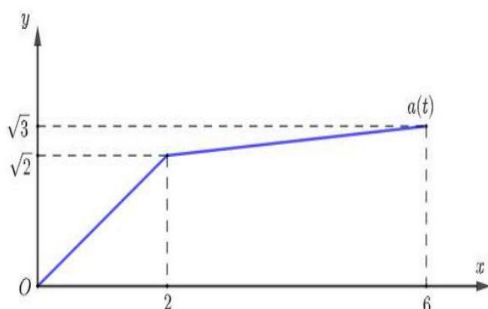
Vậy quãng đường ô tô đi được trong 10 phút đầu là:

$$S = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^5 (-40t^2 + 400t) dt + \int_5^{10} 960 dt = 8160 \text{ (m)}$$

Câu 5: Tại một nơi không có gió, một chiếc khinh khí cầu đang đứng yên ở độ cao 243 mét so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khinh khí cầu đã chuyển động

theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 12t - t^2$ trong đó t tính bằng phút là

thời gian tính từ lúc khinh khí cầu bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút. Nếu vận tốc v của khinh khí cầu khi tiếp đất là $v = x$ mét/phút thì giá trị của x bằng bao nhiêu?



Lời giải

Gọi thời điểm khinh khí cầu bắt đầu chuyển động là $t=0$, thời điểm khinh khí cầu bắt đầu tiếp đất là t_1 .

Quãng đường khinh khí cầu đã di chuyển được từ lúc chuyển động tới khi tiếp đất là

$$\int_0^{t_1} (12t - t^2) dt = 243 \Leftrightarrow -\frac{t_1^3}{3} + 6t_1^2 - 243 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \approx -5,56 \\ t_1 \approx 14,56 \\ t_1 = 9 \end{cases}$$

Vì $v(t) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 12$ nên $t_1 = 9$.

Vận tốc của khinh khí cầu lúc tiếp đất là: $v(9) = 27$ (mét/phút).

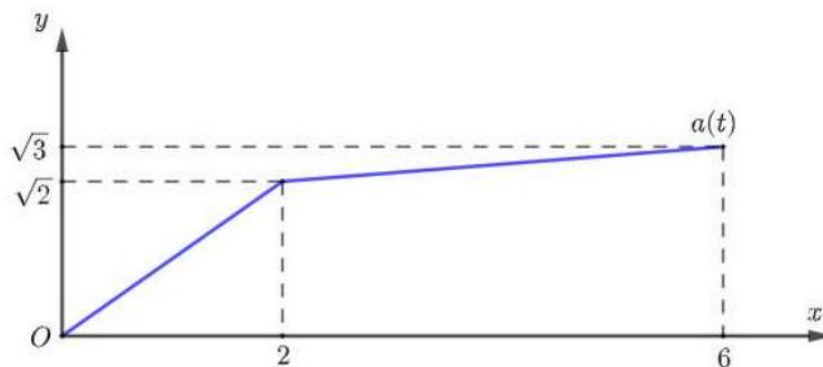
Câu 6: Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t=0$ là $v(0) = 1$ (m/s).

Tại thời điểm $t=6$ giây, vận tốc của vật là bao nhiêu?

Lời giải

Từ đồ thị ta có

$$a(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}t & , 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}t + \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} & , 2 \leq t \leq 6 \end{cases}$$



$$v(t) = \int a(t) dt = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 + 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{8}t^2 + \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}t + C, & 2 \leq t \leq 6 \end{cases}$$

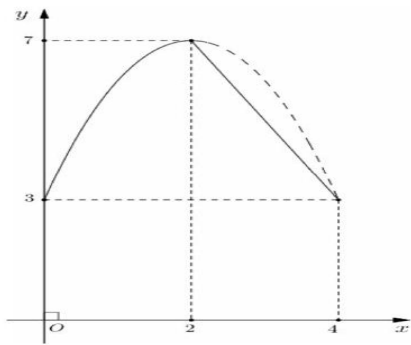
Mà $v(0) = 1$ (m/s) nên

Vì vận tốc là hàm số liên tục nên

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} v(t) \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} + C \Leftrightarrow C = \frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2}{2}$$

Do đó $v(6) = 1 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ (m/s).

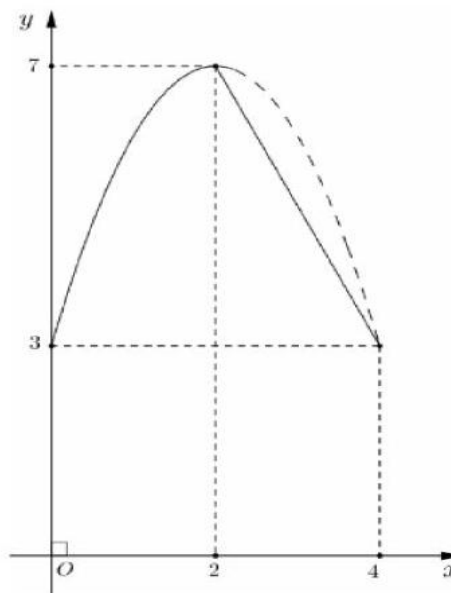
Câu 7: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 2 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là mô phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 7)$ và trục đối xứng của parabol song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là đoạn thẳng IA . Tính quãng đường S mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



Lời giải

Parabol $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $(0; 3)$ và có đỉnh $I(2; 7)$ nên có

$$\begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow y = -x^2 + 4x + 3$$



Đường thẳng IA đi qua $A(4; 3)$ nhận vector $\vec{IA} = (2; -4)$ làm vector chỉ phương, suy ra có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (4; 2)$

Phương trình đường thẳng IA là $4(x - 4) + 2(y - 3) = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 11$

Quãng đường S mà vật di chuyển được trong 4 giờ là:

$$s = \int_0^2 (-t^2 + 4t + 3) dt + \int_2^4 (-2t + 11) dt = \frac{64}{3} (km)$$