ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

Chương I. Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác

1. Tính tuần hoàn của hàm số lượng giác.

– Hàm số: $\begin{cases} y = \sin(ax+b) \\ y = \cos(ax+b) \end{cases} \longrightarrow$ tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$.

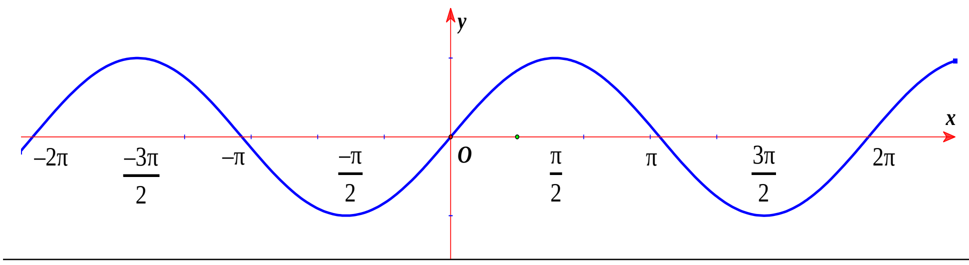
– Hàm số: $\begin{cases} y = \tan(ax+b) \\ y = \cot(ax+b) \end{cases} \longrightarrow$ tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{\pi}{|a|}$.

– Cho hàm số $y = f(x)$ và hàm số $y = g(x)$ lần lượt tuần hoàn với chu kì T_1 và T_2.

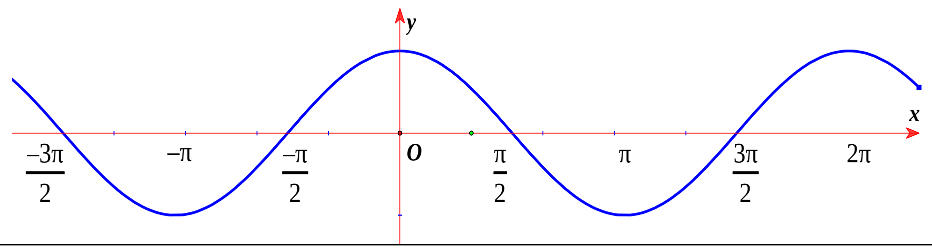
+) Nếu $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ với $\dfrac{p}{q}$ tối giản thì hàm số $y = f(x) \pm g(x)$ tuần hoàn với chu kì $T = qT_1 = pT_2$.

+) Nếu $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{p}{q} \notin \mathbb{Q}$ thì hàm số $y = f(x) \pm g(x)$ không tuần hoàn.

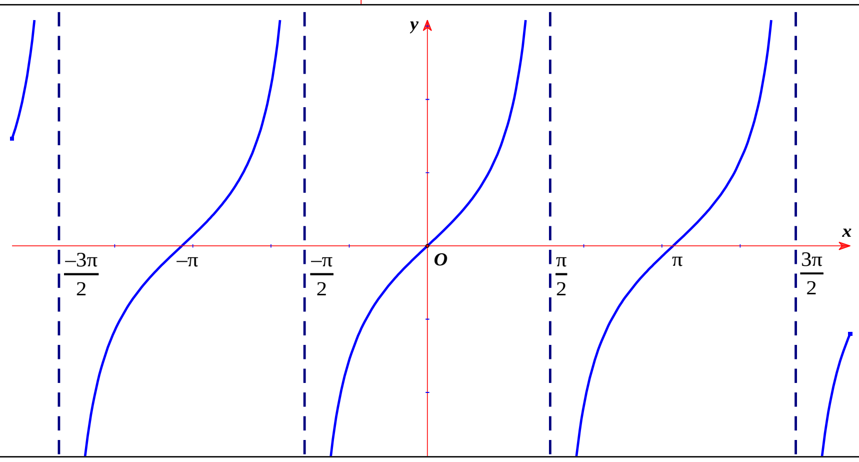
2. Đồ thị hàm số lượng giác, tính đơn điệu của hàm số lượng giác.



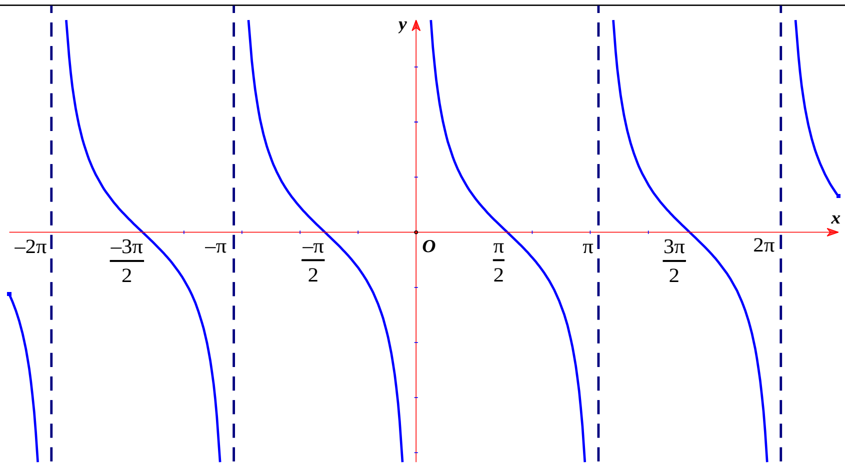
x	$-\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{3\pi}{2}$
$y = \sin$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1



x	$-\pi$		0		π
$y = \cos x$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1



Hàm số $y = \tan x$ luôn đồng biến trên $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$



Hàm số $y = \cot x$ luôn nghịch biến trên $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$

3. Tính chẵn lẻ của hàm số.

– Hàm số $y = f(x)$ xác định trên *D* gọi là hàm số chẵn khi: $\forall x \in D$ thì $\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

– Hàm số $y = f(x)$ xác định trên *D* gọi là hàm số lẻ khi: $\forall x \in D$ thì $\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

4. Phương trình lượng giác.

$\sin x$	$\sin x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$ (với $\alpha = \sin^{-1} a = \arcsin a$) $\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$
$\cos x$	$\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ (với $\alpha = \cos^{-1} a = \arccos a$) $\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$
$\tan x$	$\tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (với $\alpha = \tan^{-1} a = \arctan a$) $\tan f(x) = \tan g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k\pi \\ f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + m\pi \end{cases} \quad (m, k \in \mathbb{Z})$
$\cot x$	$\cot x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (với $\alpha = \tan^{-1} \dfrac{1}{a} = \operatorname{arccot} a$) $\cot f(x) = \cot g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k\pi \\ f(x) \neq m\pi \end{cases} \quad (m, k \in \mathbb{Z})$

5. Phương trình bậc nhất đối với và .

a) Biến đổi $a\sin x + b\cos x$

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}.\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x\right)$$

$= \sqrt{a^2+b^2}.(\cos\alpha.\sin x + \sin\alpha.\cos x) = \sqrt{a^2+b^2}.\sin(\alpha + x)$ với

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

* Chú ý: $\begin{cases} (a\sin x + b\cos)_{\max} = \sqrt{a^2+b^2} \\ (a\sin x + b\cos)_{\min} = -\sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \tan x = \dfrac{a}{b}$.

b) Phương trình: $a\sin x + b\cos x = c$

– Điều kiện để phương trình có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$

– TH1: Nếu $c = 0 \longrightarrow a\sin x + b\cos x = 0 \Leftrightarrow a\tan x + b = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\dfrac{b}{a}$.

– TH2: Nếu $c \neq 0 \longrightarrow a\sin x + b\cos x = c \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}.\sin(x+\alpha) = c \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

6. Phương trình đẳng cấp với và .

Cách 1:

Phương trình: $a\sin^2 x + b\sin x.\cos x + c\cos^2 = d.$ (1)

Trường hợp 1: Nếu $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1 \longrightarrow a = d$. Thì nghiệm của phương trình (1) là: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Trường hợp 2: Nếu $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ không là nghiệm của phương trình).

Khi đó chia cả 2 vế của phương trình (1) cho $\cos^2 x$ thì ta được: $a\tan^2 x + b\tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$.

Cách 2:

$$\begin{aligned} &\text{Ta có: } a\sin^2 x + b\sin x.\cos x + c\cos^2 x = d \\ &\Leftrightarrow a.\frac{1-\cos 2x}{2} + b.\frac{\sin 2x}{2} + c.\frac{1+\cos 2x}{2} = d \\ &\Leftrightarrow b\sin 2x + (c-a)\cos 2x = 2d - a - c \longrightarrow \end{aligned}$$

Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$.

7. Phương trình đối xứng và gần đối xứng với và .

a) Phương trình đối xứng: $a(\sin x + \cos x) + b(\sin x.\cos x) + c = 0.$ (*)

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ với $|t| \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin x\cos x = \dfrac{t^2-1}{2}$.

Do đó: $(*) \Leftrightarrow at + b.\dfrac{t^2-1}{2} + c = 0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{2}t^2 + at + \left(c - \dfrac{b}{2}\right) = 0.$

b) Phương trình gần đối xứng: $a(\sin x - \cos x) + b(\sin x.\cos x) + c = 0.$ (**)

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ với $|t| \le \sqrt{2}$ $\Rightarrow \sin x\cos x = \frac{1 - t^2}{2}.$

Do đó: $(**) \Leftrightarrow at + b.\frac{1 - t^2}{2} + c = 0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2}t^2 + at + \left(\frac{b}{2} + c\right) = 0.$

CHƯƠNG II. TỔ HỢP – XÁC SUẤT

1. Quy tắc cộng, quy tắc nhân.

QUY TẮC CỘNG

Một công việc
- Có m cách thực hiện — Hành động 1
- Có n cách thực hiện — Hành động 2

$\Rightarrow$ Có $(m+n)$ cách thực hiện công việc

QUY TẮC NHÂN

1 công việc $\xrightarrow{\text{Có } m \text{ cách}}$ Hành động 1 $\xrightarrow{\text{Có } n \text{ cách}}$ Hành động 2

$\Rightarrow$ Có $m.n$ cách thực hiện công việc

2. Hoán vị.

a) Cho A gồm n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi kết quả của sự sắp xếp n phần tử của tập A gọi là sự hoán vị.

$$P_n = n! = n(n-1)....2.1$$

b) Hoán vị vòng quanh.

Có n vật khác nhau mà xếp vào bàn tròn (xếp vòng quanh) $\Rightarrow$ Ta có $(n-1)!$ cách xếp.

c) Hoán vị lặp.

Cho k phần tử khác nhau từ $a_1, a_2, ..., a_k$. Một cách xếp n phần tử trong đó gồm n_1 là phần tử của a_1; n_2 là phần tử của a_2; ... ; n_k là phần tử của a_k (với $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$) gọi là một hoán vị lặp.

Khi đó số hoán vị lặp là: $P_{n(n_1+n_2+...+n_k)} = \dfrac{n!}{n_1!.n_2!.....n_k!}$

3. Chỉnh hợp.

Cho tập A gồm n phần tử $(n \geq 1)$. Lấy k phần tử khác nhau từ tập A rồi *sắp xếp* theo một thứ tự nào đó ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử *A.*

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)....(n-k+1)$$

4. Tổ hợp.

Cho tập hợp A gồm n phần tử phân biệt. Mỗi tập con gồm k $(1 \leq k \leq n)$ phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

5. Tính chất của các số .

– Từ định lí về công thức tính số các tổ hợp chập k của n phần tử, ta có các tính chất sau:

+) Tính chất 1: $C_n^k = C_n^{n-k}$ $\quad (0 \leq k \leq n)$.

+) Tính chất 2: $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k \quad (1 \le k < n)$ (Công thức Pascal).

+) Tính chất 3: $k.C_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

6. Nhị thức Niutơn.

a) Công thức:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{C_n^k a^{n-k} b^k}_{\text{Số hạng tổng quát}} \qquad \left(n \in \mathbb{N}^*, k \le n\right)$$

b) Tính chất

– Trong khai triển $(a+b)^n$ thì:

+) Khai triển có $(n+1)$ số hạng.

+) Số hạng thứ $(k+1)$ trong khai triển được kí hiệu $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.

+) Với $a = b = 1$ ta có: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$

+) Với $a = 1, b = -1$ ta có: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k.(-1)^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0.$

$$\Rightarrow C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}.$$

– Trong khai triển $(a+bx)^n = C_n^k a^{n-k} b^k x^k$ với $a > 0,\ b > 0,\ 0 \le k \le n,\ k \in \mathbb{N}.$

Thì để $\left(C_n^k a^{n-k} b^k\right)_{\max} \Leftrightarrow \dfrac{(n+1)b}{a+b} - 1 \le k \le \dfrac{(n+1)b}{a+b}.$

– Bổ sung: $1.C_n^1 + 2.C_n^2 + \ldots + (n-1).C_n^{n-1} + n.C_n^n = n.2^{n-1}$.

7. Xác suất của biến cố.

a) Công thức

Xác suất của biến cố: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}.$

+) $n(A)$: Số khả năng xảy ra của biến cố *A*.

+) $n(\Omega)$: Số khả năng xảy ra của phép thử.

b) Tính chất của xác suất.

– Tính chất:

+) $P(\varnothing) = 0$ và $P(\Omega) = 1.$

+) $\forall A \subset \Omega:\ \ 0 \le P(A) \le 1.$

+) $P(\overline{A}) = 1 - P(A).$

– Công thức cộng xác suất: Nếu *A* và *B* xung khắc $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$ thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B).$

– Công thức nhân xác suất: Với hai biến cố *A* và *B* độc lập ta có $P(A \cap B) = P(A.B) = P(A).P(B)$.

(Hai biến cố độc lập là sự xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới xác suất của biến cố kia).

8. Bổ sung kiến thức về đa giac đều

– Số vectơ được tạo thành từ đa giác: A_n^2 (vectơ).
– Số đoạn thẳng được tạo từ đa giác: C_n^2 (đoạn).
– Số đường chéo của đa giác: $C_n^2 - n$ (đường).
– Số tam giác được tạo bởi *n* đỉnh: C_n^3 (tam giác).
– Số tứ giác được tạo bởi *n* đỉnh: C_n^4 (tứ giác).
– Số tam giác có 2 cạnh là cạnh của đa giác: n (tam giác).
– Số tam giác có 1 cạnh là cạnh của đa giác: $n(n-4)$ (tam giác).
– Số tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác: $C_n^3 - n(n-3)$ (tam giác).
– Số hình chữ nhật được tạo bởi *n* đỉnh: $\begin{cases} C_{\frac{n}{2}}^2 & \text{khi } n \vdots 2 \\ 0 & \text{khi } n \not\vdots 2 \end{cases}$ (hình chữ nhật).
– Số tam giác vuông được tạo thành từ *n* đỉnh: $\begin{cases} 4C_{\frac{n}{2}}^2 & \text{khi } n \vdots 2 \\ 0 & \text{khi } n \not\vdots 2 \end{cases}$ (tam giác).
– Số tam giác tù được tạo thành từ *n* đỉnh: $\begin{cases} nC_{\frac{n-2}{2}}^2 & \text{khi } n \vdots 2 \\ nC_{\frac{n-1}{2}}^2 & \text{khi } n \not\vdots 2 \end{cases}$ (tam giác).
– Số tam giác nhọn được tạo thành từ *n* đỉnh: Số tam giác tùy ý trừ đi số tam giác vuông và tù.
– Số tam giác đều được tạo thành từ *n* đỉnh: $\begin{cases} \frac{n}{3} & \text{khi } n \vdots 3 \\ 0 & \text{khi } n \not\vdots 3 \end{cases}$ (tam giác).
– Số tam giác cân không đều được tạo thành từ *n* đỉnh: $\begin{cases} \frac{n}{3}\left(\dfrac{\frac{n}{3}-2}{2}-1\right) & \text{khi } \frac{n}{3} \vdots 2 \\ \frac{n}{3}\left(\dfrac{\frac{n}{3}-1}{2}-1\right) & \text{khi } \frac{n}{3} \not\vdots 2 \end{cases}$ (tam giác).

CHƯƠNG III. DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

1. Quy nạp toán học.

Để chứng minh một bài toán liên quan tới tập số tự nhiên bằng phương pháp quy nạp ta thực hiện các bước sau:

– Bước 1: (Bước cơ sở): kiểm tra bài toán với giá trị nhỏ nhất *p* thỏa mãn.

– Bước 2: (Bước quy nạp)"

+) Nêu giả thiết quy nạp (giả sử bài toán đúng với $n = k \geq p$).

+) Kết luận quy nạp: Chứng minh bài toán tiếp tục đúng với $n = k + 1$.

– Bước 3: Kết luận.

2. Dãy số tăng, dãy số giảm.

– Tính tăng, giảm của dãy số:

+) (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^* : u_n < u_{n+1} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} - u_n > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* : \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \quad (u_n > 0) \end{array}\right.$

+) (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^* : u_n > u_{n+1} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} - u_n > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* : \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad (u_n > 0) \end{array}\right.$

– Công thức giải nhanh một số dạng dãy số:

+) Dãy số (u_n) có $u_n = an + b$ tăng khi $a > 0$ và giảm khi $a < 0$.

+) Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$:

- Không tăng, không giảm khi $q < 0$.
- Giảm khi $0 < q < 1$.
- Không tăng không giảm khi $q > 1$.

+) Dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{an+b}{cn+d}$ với điều kiện $cn + d > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$:

- Tăng khi $ad - bc > 0$.
- Giảm khi $ad - bc < 0$.

3. Dãy số bị chặn.

– Tính bị chặn của dãy số:

+) (u_n) là dãy số bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists M, \forall n \in \mathbb{N}^* : u_n \leq M$.

+) (u_n) là dãy số bị chặn dưới $\Leftrightarrow \exists m, \forall n \in \mathbb{N}^* : u_n \geq m$.

+) (u_n) là dãy số bị chặn $\Leftrightarrow \exists m, M : u_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

4. Cấp số cộng, cấp số nhân.

	Cấp số cộng	**Cấp số nhân**
1. Định nghĩa	(u_n) là dãy cấp số cộng khi: $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} = u_n + d$ (d: công sai)	(u_n) là dãy cấp số nhân khi: $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} = u_n.q$ (q: công bội)
2. Số hạng tổng quát	$u_n = u_1 + (n-1)d$ với $n \geq 2$	$u_n = u_1.q^{n-1}$ với $n \geq 2$
3. Tính chất	$u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ với $k \geq 2$	$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}$ với $k \geq 2$

4. Tổng n số hạng đầu tiên	$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{(u_1+u_n)n}{2} = \frac{n\left[2u_1+(n-1)d\right]}{2}$	$\begin{cases} S_n = nu_1 & \text{khi } q=1 \\ S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} & \text{khi } q \neq 1 \\ S_n = \frac{u_1}{1-q} & \text{khi } \lvert q\rvert < 1 \end{cases}$

CHƯƠNG IV. GIỚI HẠN

1. Giới hạn của dãy số.

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0; \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \; (k \in \mathbb{Z}^+)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0 \quad (\lvert q\rvert < 1)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} C = C$ **2. Định lí:** a) Nếu $\lim u_n = a$; $\lim v_n = b$ thì • $\lim(u_n + v_n) = a + b$ • $\lim(u_n - v_n) = a - b$ • $\lim(u_n.v_n) = a.b$ • $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} (b \neq 0)$ b) Nếu $u_n \geq 0; \forall n$ và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$ c) Nếu $\lvert u_n\rvert \leq v_n; \forall n$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$ d) Nếu $\lim u_n = a$ thì $\lim \lvert u_n\rvert = \lvert a\rvert$	**1. Giới hạn đặc biệt:** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad \lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty (k \in \mathbb{Z}^+)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty (q > 1)$ **2. Định lí:** a) Nếu $\lim \lvert u_n\rvert = +\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$. b) Nếu $\lim u_n = a$; $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$ c) Nếu $\lim u_n = a \neq 0, \lim v_n = 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = \begin{cases} +\infty & (a.v_n > 0) \\ -\infty & (a.v_n < 0) \end{cases}$ d) Nếu $\lim u_n = +\infty$, $\lim v_n = a$ thì $\lim(u_n.v_n) = \begin{cases} +\infty & (a > 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$

Dạng 1: Dãy số có giới hạn 0.

1. Định nghĩa dãy số có giới hạn 0:

– Định nghĩa: $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : n > n_0 \Rightarrow \lvert u_n\rvert < \varepsilon\right)$.

– Nhận xét:

+) Dãy số (U_n) có giới hạn 0 khi và chỉ khi dãy số $\lvert(U_n)\rvert$ có giới hạn 0.

+) Dãy số không đổi (U_n), với $U_n = 0$ thì dãy số có giới hạn 0 (hay $\lim 0 = 0$).

2. Một số dãy số có giới hạn 0:

$$\begin{cases} \lim \frac{1}{n} = 0 \quad \lim \frac{1}{n^2} = 0 \quad \lim \frac{1}{n^\alpha} = 0 \\ \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad \lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim \frac{k}{n^\alpha} = 0, k = \text{const}.$$

3. Định lí:

– Định lí 1: Cho hai dãy số: $u_n, v_n : \begin{cases} \lvert u_n\rvert \leq v_n \\ \lim(v_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim u_n = 0$.

– Định lí 2: Nếu $\lvert q\rvert < 1 \to \lim q^n = 0$.

– Định lí 3: Nếu $\begin{cases} u_n \le v_n \le w_n, \forall n \\ \lim u_n = \lim w_n = a \end{cases} \Rightarrow \lim v_n = a$.

Dạng 2. Dãy số có giới hạn hữu hạn.

1. Định lí:

– Cho (u_n) mà $u_n = c, \forall n : \lim u_n = c$.

– Nếu $\lim u_n = L$ thì $\lim (u_n - L) = 0$.

– Nếu $u_n \ge 0$ thì $L \ge 0$ thì $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{\lim u_n}$.

– Nếu $\lim u_n = L$ thì $\begin{cases} \lim |u_n| = |L| \\ \lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L} \end{cases}$

– Giả sử $\lim u_n = L$ và $\lim v_n = M$ và c là một hằng số. Khi đó:

+) $\lim (u_n + v_n) = L + M$

+) $\lim (u_n - v_n) = L - M$

+) $\lim (u_n . v_n) = L.M$

+) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{M}$

+) $\lim (c.u_n) = c.L$

2. Các dạng toán thường gặp:

a) Tính $\lim \frac{P(n)}{Q(n)}$.

– Cách giải:

+) Nếu $\deg P(n) \ge \deg Q(n)$ thì $\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim \frac{n^{\deg P(n)} . \frac{P(x)}{n^{\deg P(n)}}}{n^{\deg Q(n)} . \frac{Q(x)}{n^{\deg Q(n)}}}$.

+) Nếu $\deg P(n) \le \deg Q(n)$ thì $\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim \frac{\frac{P(x)}{n^{\deg Q(n)}}}{\frac{Q(x)}{n^{\deg Q(n)}}}$.

– Nhận xét:

+) Nếu $\deg P(n) = \deg Q(n)$ thì giới hạn đó bằng hệ số cao nhất của tử chia cho hế số cao nhất của mẫu.

+) Nếu $\deg P(n) > \deg Q(n)$ thì giới hạn đó bằng $+\infty$ hoặc $-\infty$.

+) Nếu $\deg P(n) < \deg Q(n)$ thì giới hạn đó bằng 0.

b) Tính $\sqrt{P(n) \pm Q(n)}$.

– Nếu hệ số của $n^{\deg P(n)} \pm n^{\deg Q(n)} \ne 0$ ($\pm$ theo đề bài)

Thì $\lim \left[\sqrt{P(n) + a} + \sqrt{Q(n) + b} \right] = \lim \left[n^k . \sqrt{\frac{P(n) + a}{n^k}} + \sqrt{\frac{Q(n)}{n^k}} \right]$ với $k = \max \{ \deg P(n); \deg Q(n) \}$

– Nếu hệ số của $n^{\deg P(n)} \pm n^{\deg Q(n)} = 0$ ($\pm$ theo đề bài)

Thì $\lim \left[\sqrt{P(n) + a} - \sqrt{Q(n) + b} \right] = \lim \frac{P(n) + a - Q(n) - b}{\sqrt{P(n) + a} + \sqrt{Q(n) + b}}$.

– Một số các nhân chia với lượng liên hợp:

+) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ lượng liên hợp là $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

+) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ lượng liên hợp là $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

+) $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ lượng liên hợp là $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}$.

+) $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ lượng liên hợp là $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}$.111Equation Chapter (Next) Section 1

c) Tính $\lim u_n$ là một phân thức mà tử và mẫu của có các lũy thừa dạng $a^n, b^n\left(n\in\mathbb{N}\right)$...với $a,b=\text{const}$.

– Bước 1: Chia tử và mẫu cho a^n trong đó a là cơ số có trị tuyệt đối lớn nhất trong các lũy thừa.

– Bước 2: Áp dụng $\lim q^n=0\ \left(|q|<1\right)$ và các quy tắc để tính.

d) Giới hạn của dãy xác định bởi một công thức truy hồi.

– Cách 1: Tìm công thức tính u_n theo n, từ đó tìm $\lim u_n$.

– Cách 2: Tính $\lim u_n=a\Rightarrow \lim u_{n+1}=\lim u_{n+2}=a$. Sau đó thế vào biểu thức truy hồi để tính.

Dạng 3. Tổng cấp số nhân lùi vô hạn.

Cấp số nhân $\left(u_n\right)$ có công bội $|q|<1\Rightarrow S=u_1+u_2+...+u_n+...=\dfrac{u_1}{1-q}$.

2. Giới hạn của hàm số.

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm.

a) Định nghĩa: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên K hoặc $K\setminus\left\{x_0\right\}$. Khi đó

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=L\Leftrightarrow \forall\left(x_n\right),\ x_n\in K\setminus\left\{x_0\right\}$$ sao cho $x\to x_0$ thì $f\left(x\right)\to L$.

b) Giới hạn đặc biệt.

$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$. $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ với $c=\text{const}$.

c) Định lí về giới hạn hữu hạn của hàm số.

– Cho $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=M$ thì:

+) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]=L+M$. +) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]=L-M$.

+) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f\left(x\right).g\left(x\right)\right]=L.M$. +) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\dfrac{L}{M}$ với $M\neq 0$.

– Nếu $\begin{cases} f\left(x\right)\geq 0\\ \lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L\end{cases}$ thì $\begin{cases} L\geq 0\\ \lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f\left(x\right)}=\sqrt{L}\end{cases}$

– Cho ba hàm số $f(x), g(x), h(x)$ xác định trên K chứa điểm x_0.

Nếu $\begin{cases} g(x)\leq f(x)\leq h(x), \forall x\in K\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=L\end{cases}$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$.

d) Giới hạn một bên: $\lim f\left(x\right)=a\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=a.$

2. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực.

a) Định nghĩa.

– Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\left(a;+\infty\right)$. Khi đó

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=L\Leftrightarrow \forall\left(x_n\right),\ x_n>a: x_n\to+\infty\Rightarrow f\left(x_n\right)\to L.$$

– Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\left(-\infty;a\right)$. Khi đó

$$\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=L\Leftrightarrow \forall\left(x_n\right),\ x_n<a: x_n\to-\infty\Rightarrow f\left(x_n\right)\to L$$

b) Giới hạn đặc biệt.

– Với $c = \text{const}$ và $k \in \mathbb{N}^*$ ta có: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} c = c$ và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$

– Với $k \in \mathbb{N}$ ta có: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} x^{2k+1} = +\infty \ (-\infty) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ (-\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{k}{f(x)} = 0 \ \ (k \neq 0) \end{cases}$

– Định lí về giới hạn hữu hạn của hàm số tại $x \to x_0$ vẫn đúng khi $x \to \pm\infty$

3. Giới hạn vô cực của hàm số.

a) Định nghĩa.

– Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Khi đó

+) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n > a : x_n \to +\infty \Rightarrow f(x_n) \to -\infty$.

+) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n > a : x_n \to +\infty \Rightarrow f(x_n) \to +\infty$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left[-f(x) \right] = -\infty$

– Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; a)$. Khi đó

+) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n < a : x_n \to -\infty \Rightarrow f(x_n) \to -\infty$.

+) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n < a : x_n \to -\infty \Rightarrow f(x_n) \to +\infty$.

b) Giới hạn đặc biệt.

+) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ với $k \in \mathbb{N}^*$. +) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{khi } k \vdots 2 \\ -\infty & \text{khi } k \not\vdots 2 \end{cases}$. +) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$.

c) Quy tắc về giới hạn vô cực.

– Định lí: $\lim\limits_{x \to x_0} \left| f(x) \right| = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

– Một vài quy tắc tính giới hạn

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim \left[f(x).g(x) \right]$	$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$
L	M	$L.M$	$\frac{L}{M} \ (M \neq 0)$
$L > 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
	0		$\begin{cases} +\infty \text{ khi } g(x) > 0 \\ -\infty \text{ khi } g(x) < 0 \end{cases}$
$L < 0$	0		$\begin{cases} -\infty \text{ khi } g(x) > 0 \\ +\infty \text{ khi } g(x) < 0 \end{cases}$
	$\pm\infty$	$\mp\infty$	0

4. Giới hạn vô định

a) Tìm giới hạn hàm số có dạng $\frac{0}{0}$.

Nếu $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x), Q(x)$ là hai đa thức của x, ta biến đổi $f(x) = \frac{(x - x_0) P_1(x)}{(x - x_0) Q_1(x)}$. Rút gọn thừa số $x - x_0$ sẽ khử được dạng vô định. $f(x)$ là biểu thức có chứa x dưới dấu căn thì ta nhân, chia biểu thức liên hợp của biểu thức chứa căn tiến về 0, sau đó rút $(x - x_0)$ là nhân tử chung rồi rút gọn sẽ khử được dạng vô định.

b) Tìm giới hạn hàm số có dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Giới hạn dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ là giới hạn của hàm số dạng $\frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó khi $x \to x_0$ (hay $\pm\infty$) thì $P(x) \to \infty, Q(x) \to \infty$. Chia tử và mẫu cho x^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất (hoặc là rút x^k làm nhân tử) sau đó áp dụng các định lí về giới hạn hữu hạn.

c) Tìm giới hạn hàm số có dạng $\infty - \infty$.

Nếu $x \to x_0$ thì ta quy đồng mẫu số đưa về dạng $\frac{0}{0}$.

Nếu $x \to \pm\infty$ thì ta nhân và chia cho lượng liên hợp để đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

d) Tìm giới hạn hàm số có dạng $0.\infty$.

– Giả sử cần tìm giới hạn của hàm số $F(x) = f(x).g(x)$ khi $x \to x_0$ hay $x \to \pm\infty$, trong đó $f(x) \to 0$ và $g(x) \to \pm\infty$. Ta thường biến đổi theo các hướng sau:

+) Nếu là giới hạn khi $x \to x_0$ thì ta thường viết $f.g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ sẽ đưa giới hạn về dạng $\frac{0}{0}$.

+) Nếu là giới hạn khi $x \to \pm\infty$ thì ta thường viết $f.g = g : \frac{1}{f}$ sẽ đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

+) Tuy nhiên ở nhiều bài giới hạn loại này, ta chỉ cần thực hiện một số biến đổi như đưa thừa số vào trong dấu căn, quy đồng mẫu số,... ta có thể đưa giới hạn về dạng quen thuộc.

3. Hàm số liên tục.

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm.

– Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K và $x_0 \in K$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

– Hàm số $f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại x_0.

– Chú ý:

+) Nếu hàm số liên tục tại x_0 thì trước hết hàm số phải xác định tại điểm đó.

+) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$.

+) Hàm số $f(x) = \begin{cases} A(x), & khi\ x \neq x_0 \\ B(x), & khi\ x = x_0 \end{cases}$ liên tục tại x_0 khi $\lim\limits_{x \to x_0} A(x) = B(x_0)$.

+) Hàm số $f(x) = \begin{cases} A(x), & khi\ x \geq x_0 \\ B(x), & khi\ x < x_0 \end{cases}$ liên tục tại x_0 khi $\lim\limits_{x \to x_0^+} A(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} B(x) = A(x_0)$.

2. Giới hạn liên tục trên một khoảng.

– Định nghĩa:

+) Hàm số $f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

+) Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $[a;b]$ nếu nó liên tục trên $(a;b)$ và $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a) \\ \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b) \end{cases}$.

+) Khái niệm trên tương tự với nửa khoảng như $(a;b]; [a;b); [a;+\infty); (-\infty;a];...$.

– Nhận xét: Đồ thị hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.

3. Một số định lí cơ bản.

– Định lí 1:

+) Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.

+) Hàm số phân thức, các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

– Định lí 2: Giả sử $y=f(x), y=g(x)$ liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

+) Các hàm số $y=f(x)+g(x), y=f(x)-g(x), y=f(x).g(x)$ liên tục tại x_0

+) Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0)\neq 0$.

– Định lí 3: Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì $\exists c\in(a;b): f(c)=0$.

4. Phương pháp xét tính liên tục của hàm số trên $\mathbb{R}$:

– Hàm số được cho bởi 1 công thức: Tìm tập xác định rồi dựa vào định lí 1, 2 để kết luận.

– Hàm số được cho bởi 2 công thức:

+) Tìm tập xác định và điểm nối *a* giữa 2 công thức.

+) Xét tính liên tục của hàm số khi $x=a$ và khi $x\neq a$.

+) Kết luận.

4. Ứng dụng của đạo hàm để tính giới hạn.

– Công thức đạo hàm: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$.

– Định lí L'Hopital (Lô-pi-tan): Nếu $\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0\\ \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0\end{array}\right.$ và $g'(x)\neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

5. Cách tính giới hạn bằng CASIO fx-580

a. Cách nhập.

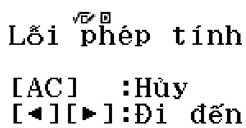
– Bước 1: Nhập hàm số biểu thức cần tính.

– Bước 2: Ấn r.

– Bước 3: Nhìn xuống dưới chữ lim.

Các trường hợp	Nhập
Không có gì	99999…
$x\to+\infty$	
$x\to-\infty$	$-99999\cdots$
$x\to x_0$	$x_0+0,00001$
$x\to x_0^+$	
$x\to x_0^-$	$x_0-0,00001$

Lưu ý: Trong trường hợp "không có gì" khi ấn máy mà kết quả hiển thị là *lỗi phép tính* thì ta chỉ cần g*iảm bớt* số 9 khi nhập.



– Bước 4: Ấn =.

b. Cách đọc kết quả.

Các trường hợp	Đọc
Số đẹp	Kết quả
Một số dương lớn	$+\infty$
$a\times10^n$ với $a,n>0$	
Một số âm nhỏ	$-\infty$

$-a \times 10^n$ với $a, n > 0$	
10^n với $n < 0$	0

CHƯƠNG V. ĐẠO HÀM

1. Định nghĩa đạo hàm.

a) Định nghĩa: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Trong đó: +) $\Delta x=x-x_0$ là số gia của đối số tại x_0.

+) $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ là số gia của hàm số.

b) Đạo hàm một bên

– Công thức: $\begin{cases} f'(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ f'(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\end{cases}$

– Hệ quả: Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì sẽ tồn tại $\exists f'(x_0^+), f'(x_0^-): f'(x_0^+)=f'(x_0^-)$.

c) Mối liên hệ giữa đạo hàm và tính liên tục.

– Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $y=f(x)$ liên tục tại x_0.

– Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục tại x_0 thì $y=f(x)$ có thể có hoặc không có đạo hàm tại x_0.

– Nếu hàm số $y=f(x)$ gián đoạn tại x_0 thì $y=f(x)$ không có đạo hàm tại x_0.

– Nếu hàm số $y=f(x)$ không có đạo hàm tại x_0 thì $y=f(x)$ có thể gián đoạn hoặc liên tục tại x_0.

d) Đạo hàm trên một khoảng, một đoạn

– Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a;b)$.

– Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[a;b]$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a;b)$ đồng thời tồn tại $f'(a^+)$ và $f'(b^-)$.

2. Quy tắc, công thức đạo hàm.

– Đạo hàm của tổng tích thương:

+) $(u\pm v\pm w+\ldots)'=u'\pm v'\pm w'\pm ..$

+) $(u.v)'=u'v+v'u$

+) $(u.v.w)'=u'v+u.v'w+uvw'$

+) $(ku)'=ku'$

+) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}\Rightarrow\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$

+) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

+) $y=\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}\Rightarrow y'=\dfrac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2}$

+) $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\Rightarrow y'=\dfrac{amx^2+2anx+bn-cm}{(mx+n)^2}$

– Tính đạo hàm của hàm số hợp: Cho hàm số $y=f(u)$ với $u=u(x)$ thì $y'=u'(x).f'(u)$.

– Tổng hợp đạo hàm cơ bản:

Hàm số	Đạo hàm
$y=c$ (c là hằng số)	$y'=0$
$y=x$	$y'=1$
$y=x^n$	$y'=n.x^{n-1}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=\dfrac{1}{x}$	$y'=-\dfrac{1}{x^2}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=\tan x$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y=\cot x$	$y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y=\lvert x\rvert$	$y'=\dfrac{x}{\lvert x\rvert}$

Hàm số	Đạo hàm
$y=u$	$y'=u'$
$y=u^n$	$y'=n.u^{n-1}.u'$
$y=\sqrt{u}$	$y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y=\dfrac{1}{u}$	$y'=-\dfrac{u'}{u^2}$
$y=\sin u$	$y'=u'.\cos u$
$y=\cos u$	$y'=-u'.\sin u$
$y=\tan u$	$y'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$y=\cot u$	$y'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$y=\lvert u\rvert$	$y'=\dfrac{u'.u}{\lvert u\rvert}$

3. Ý nghĩa của đạo hàm.

a) Bài toán chuyển động:

– Vận tốc tức thời của chuyển động $s=s(t)$ tại thời điểm t_0 là $v(t_0)=s'(t_0)$.

– Gia tốc chuyển động tại thời điểm t_0 là $a(t_0)=v'(t_0)=s''(t_0)$.

b) Bài toán về điện lượng: Cường độ tức thời của điện lượng $Q=Q(t)$ tại thời điểm t_0 là $I(t_0)=Q'(t_0)$.

4. Vi phân.

– Vi phân của hàm số $y=f(x)$ là: $\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$.

– Ứng dụng của vi phân (tính gần đúng): $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$.

5. Đạo hàm cấp cao.

– Bấm Casio đạo hàm:

+) Đạo hàm cấp 1 tại điểm x_0: $y'=\dfrac{d}{dx}f(x)| x=x_0$

+) Đạo hàm cấp 2 tại điểm x_0:

Cách 1: $y''=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)|_{x=X}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)|_{x=x_0}}{X-x_0}$ với r: $X=x_0+0,00001$.

Cách 2: Gán các giá trị: $\begin{cases} 10^{-7} & \xrightarrow{STO} C \\ \frac{d}{dx}\left(f(x)\right)\Big|_{x=x_0} & \xrightarrow{STO} A \\ \frac{d}{dx}\left(f(x)\right)\Big|_{x=x_0+C} & \xrightarrow{STO} B \end{cases} \Rightarrow y'' = \frac{B-A}{C}$

+) Đạo hàm cấp 3: $y^{(3)} = \dfrac{\left(\frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0+X} + \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0-X} - 2.\frac{d}{dx} f(x)\,|\, x = x_0\right)}{X^2}$ với r: $X = x_0 + 0{,}00001$.

– Công thức đạo hàm cấp cao:

+) $f^{(n)}(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}$.

+) $(uv)^{(n)} = u^{(n)} + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \ldots + C_n^p u^{(n-p)}v^{(p)} + \ldots + C_n^{n-1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}$.

+) $y = \sin(ax+b) \Rightarrow y^{(n)}(x) = a^n \sin\left(ax + b + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

+) $y = \cos(ax+b) \Rightarrow y^{(n)}(x) = a^n \cos\left(ax + b + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

+) $y = \dfrac{1}{ax+b} \Rightarrow y^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

+) $y = e^{ax+b} \Rightarrow y^{(n)}(x) = a^n e^{ax+b}$.

+) $y = (ax+b)^\alpha \Rightarrow y^{(n)}(x) = a^n \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n} = a^n.A_\alpha^n.(ax+b)^{\alpha-n}$.

+) $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + a_{k+1}x^{k+1} + a_{k+2}x^{k+2} + \ldots + a_nx^n$

$\Rightarrow y^{(k)} = k!a_k + \dfrac{(k+1)!}{(k+1-k)!}a_{k+1}x^{k+1-k} + \dfrac{(k+2)!}{(k+2-k)!}a_{k+2}x^{k+2-k} + \ldots + \dfrac{n!}{(n-k)!}a_nx^{n-k}$.

6. Tất cả công thức đạo hàm

Hàm số	Đạo hàm
$y = c$ (c là hằng số)	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = n.x^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = \cot x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y = \|x\|$	$y' = \dfrac{x}{\|x\|}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$

Hàm số	Đạo hàm
$y = u$	$y' = u'$
$y = u^n$	$y' = n.u^{n-1}.u'$
$y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y = \dfrac{1}{u}$	$y' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$y = \sin u$	$y' = u'.\cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u'.\sin u$
$y = \tan u$	$y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$y = \cot u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$y = \|u\|$	$y' = \dfrac{u'.u}{\|u\|}$
$y = e^u$	$y' = e^u.u'$
$y = a^u$	$y' = a^u.u'.\ln a$

$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$		$y=\ln u$	$y'=\dfrac{u'}{u}$
$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$		$y=\log_a u$	$y'=\dfrac{u'}{u\ln a}$

Bổ sung: Cách bấm đạo hàm bằng Casio fx-580 VN:

CASIO - đạo hàm.pdf

7. Tiếp tuyến.

1. Kiến thức cần nắm vững.

– Phương trình tiếp tuyến của $(C): y=f(x)$ tại điểm $M(x_0;y_0)$ có dạng: $\Delta: y=k(x-x_0)+y_0$.

(với $k=y'(x_0)$ là hệ số góc tiếp tuyến)

– Hai đồ thị $(C_1): y=f(x)$ và $(C_2): y=g(x)$ tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

2. Các dạng toán viết phương trình tiếp tuyến thường gặp.

a. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y=f(x)$, biết Δ có hệ số góc k cho trước.

– Các bước làm:

+) Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Tính y'.

+) Do phương trình tiếp tuyến Δ có hệ số góc k $\Rightarrow y'=k \Leftrightarrow x=x_0$.

+) Tính $y_0=f(x_0)$ và suy ra phương trình tiếp tuyến $\Delta: y=k(x-x_0)+y_0$.

– Lưu ý: Hệ số góc $k=y'(x_0)$ của tiếp tuyến Δ thường cho gián tiếp như sau:

+) Phương trình tiếp tuyến $\Delta \,//\, d: y=ax+b \Rightarrow k=a$.

+) Phương trình tiếp tuyến $\Delta \perp d: y=ax+b \Rightarrow k=-\dfrac{1}{a}$.

+) Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với trục hoành góc $\alpha \Rightarrow |k|=\tan\alpha$.

+) Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với $d: y=ax+b$ góc $\alpha \Rightarrow \left|\dfrac{k-a}{1+k.a}\right|=\tan\alpha$.

b. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y=f(x)$, biết Δ đi qua (kẻ từ) điểm $A(x_A;y_A)$.

– Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Tính $y_0=f(x_0)$ và $k=y'(x_0)$.

– Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(x_0;y_0)$ là $\Delta: y=k(x-x_0)+y_0$.

– Do $A(x_A;y_A)\in\Delta \Rightarrow y_A=k(x_A-x_0)+y_0 \quad (*)$

– Giải phương trình $(*) \longrightarrow x_0 \longrightarrow y_0; k$ và $k \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến Δ.

c. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y=f(x)$, biết Δ cắt trục $Ox; Oy$ lần lượt tại $A; B$ sao cho ΔOAB vuông cân hoặc biết S_{OAB}.

– Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm và tính hệ số góc $k=y'(x_0)$.

– Đề cho $\left[\begin{array}{ll} \Delta OAB \text{ vuông cân} \Leftrightarrow (\Delta; Ox)=45^\circ \ (O\notin\Delta) & (*) \\ S_{\Delta OAB}=S \Leftrightarrow OA.OB=2S & (**) \end{array}\right.$

– Giải $(*)$ hoặc $(**) \longrightarrow x_0 \longrightarrow y_0; k \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến Δ.

d. Tìm $M(x_M;y_M)$ mà từ đó vẽ được n tiếp tuyến với đồ thị $(C): y=f(x)$.

– Lấy $A\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua $M\left(x_M; y_M\right)$ với đồ thị (C).

– Khi đó phương trình tiếp tuyến dạng $\Delta: y = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)$.

– Do $M\left(x_M; y_M\right) \in \Delta \Rightarrow y_M = f'\left(x_0\right)\left(x_M - x_0\right) + f\left(x_0\right) \ (*)$

– Từ đó ta tìm số nghiệm của phương trình $(*)$ là n.

e. Tìm những điểm $M\left(x_M; y_M\right)$ mà từ đó vẽ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau.

– Các bước làm:

+) Phương trình tiếp tuyến Δ qua M và có hệ số góc *k* có dạng $\Delta: y = k\left(x - x_M\right) + y_M$.

+) Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x) = k\left(x - x_M\right) + y_M \\ f'(x) = k \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = f'(x).\left(x - x_M\right) + y_M \quad (*)$.

+) Qua *M* vẽ được hai tiếp tuyến với $(C) \Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

+) Hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau $\Leftrightarrow k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow y'\left(x_1\right).y'\left(x_2\right) = -1$.

– Lưu ý:

+) Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ và $f\left(x_1\right).f\left(x_2\right) < 0$.

+) Đối với bài toán tìm điểm $M\left(x_0; y_0\right) \in (C): y = f(x)$ sao cho tại M tiếp tuyến Δ với hệ số góc $k = f'\left(x_0\right)$ song song với *d* cho trước. Khi đó ta có $k = f'\left(x_0\right) = k_d \Rightarrow x_0 \Rightarrow y_0 \Rightarrow M\left(x_0; y_0\right)$.

+) Đối với bài toán tìm điểm $M\left(x_0; y_0\right) \in (C): y = f(x)$ sao cho tại M tiếp tuyến Δ với hệ số góc $k = f'\left(x_0\right)$ vuông góc với *d* cho trước. Khi đó ta có $f'\left(x_0\right).k_d = -1 \Rightarrow x_0 \Rightarrow y_0 \Rightarrow M\left(x_0; y_0\right)$.

f. Các bài toán liên quan đến tam giác được tạo bởi tiếp tuyến của đồ thị hàm số với hai trục tọa độ.

– Cho $M\left(x_0; f\left(x_0\right)\right) \in (C): y = f(x)$, khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm M cắt trục Ox tại $A\left(x_0 - \dfrac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)}; 0\right)$ và cắt Oy tại $B\left(0; -x_0.f'\left(x_0\right) + f\left(x_0\right)\right)$, khi đó:

+) $k = \pm\tan \widehat{BAO} = \pm\dfrac{OB}{OA}$.

+) $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}.OA.OB = \dfrac{\left[f\left(x_0\right) - x_0.f'\left(x_0\right)\right]^2}{2f'\left(x_0\right)}$.

+) Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔOAB là: $R = \dfrac{AB}{2}$.

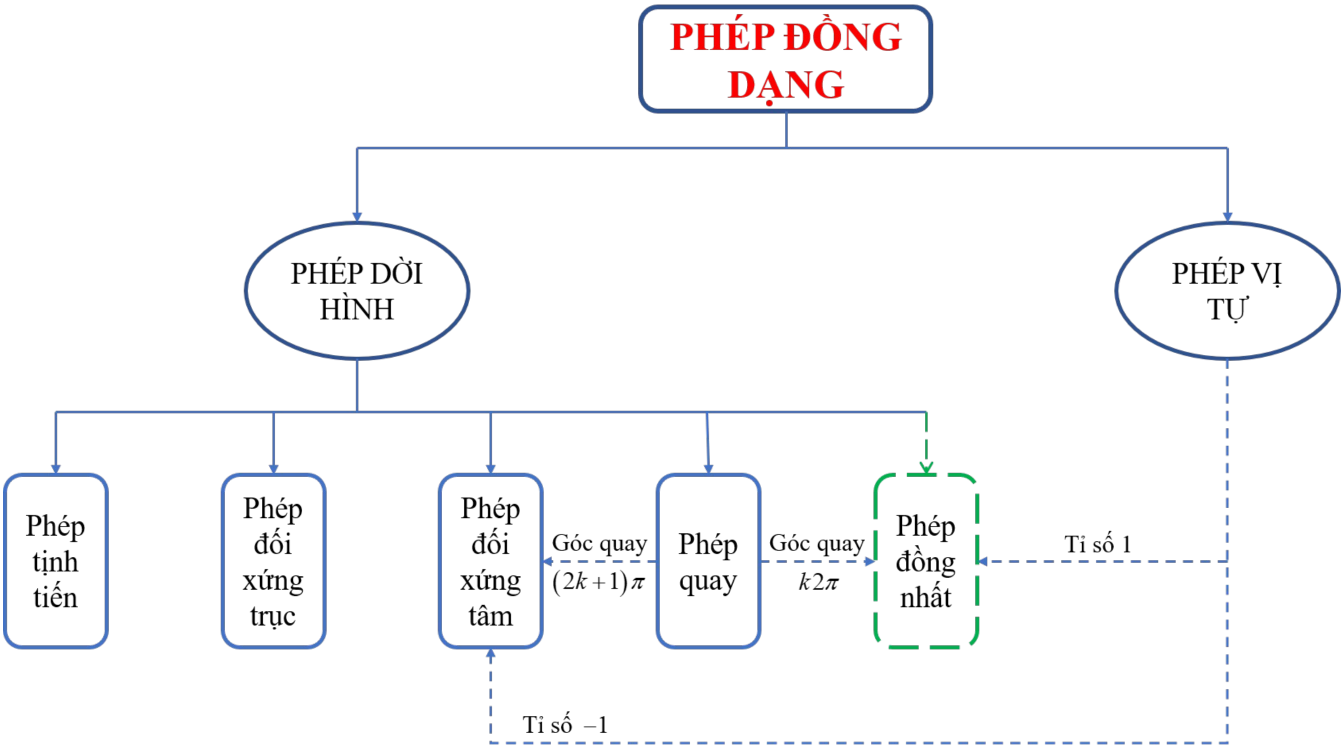
+) Bán kính đường tròn nội tiếp ΔOAB là: $r = \dfrac{OA.OB}{OA + OB + AB}$.

g. Xác định hệ số góc *k* lớn nhất hoặc nhỏ nhất của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$.

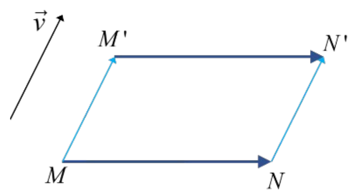
– Giải phương trình $f''(x) = 0 \Rightarrow x = x_0$.

– Khi đó $\left[\begin{array}{l} k_{\max} = f'\left(x_0\right) \\ k_{\min} = f'\left(x_0\right) \end{array}\right.$.

HÌNH HỌC 11



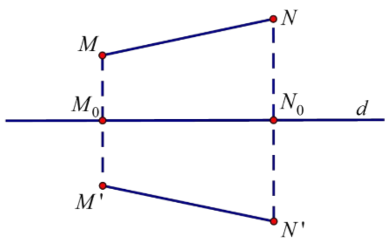
1. Phép tịnh tiến.



$T_{\vec v}(M)=M'$ và $T_{\vec v}(N)=N' \Rightarrow \overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$

$T_{\vec v(a;b)}: M(x;y)\to M'(x';y') \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec v \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x=a \\ y'-y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$

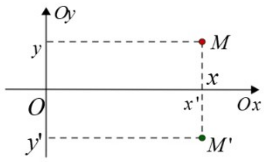
2. Phép đối xứng trục.



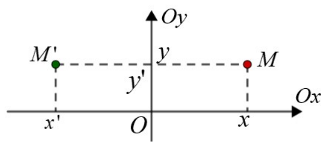
$Đ_d: M \to M' \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M'}=-\overrightarrow{M_0M}$ (M_0 là hình chiếu của M trên d)

$Đ_d(M)=M' \Leftrightarrow Đ_d(M')=M$

$Đ_d(M)=M'$ và $Đ_d(N)=N' \Rightarrow M'N'=MN$

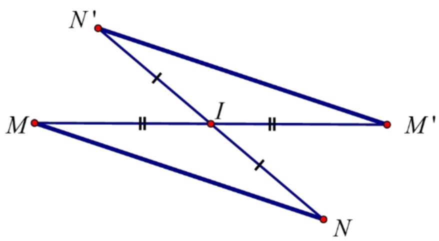


$Đ_{Ox}: M(x;y)\to M'(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}$



$Đ_{Oy}: M(x;y)\to M'(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$

3. Phép đối xứng tâm.



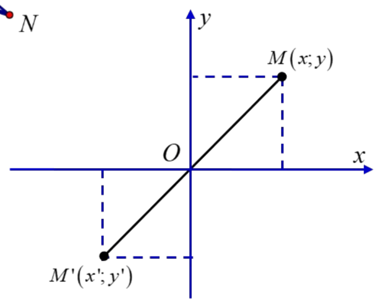
$Đ_I: M \to M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}=-\overrightarrow{IM}$

$Đ_I(M)=M' \Leftrightarrow Đ_I(M')=M$

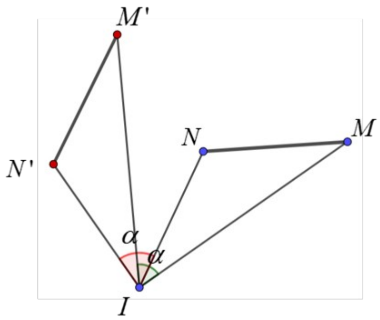
$Đ_d(M)=M'$ và $Đ_d(N)=N' \Rightarrow M'N'=MN$

$Đ_O: M(x;y)\to M'(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$

$\begin{cases} Đ_{I(a;b)}: M(x;y)\to M'(x';y') \\ I(a;b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=2a-x \\ y'=2b-y \end{cases}$



4. Phép quay.



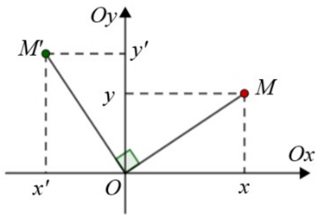
$$Q_{(I;\alpha)}: M \to M' \Leftrightarrow \begin{cases} IM' = IM \\ (\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM'}) = \alpha \end{cases}$$

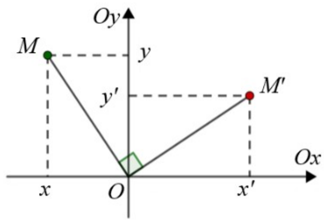
$$Q_{(I;\alpha)}: \begin{cases} M \to M' \\ N \to N' \end{cases} \Rightarrow M'N' = MN$$

$$Q_{(I;\alpha)}(d) = d' \Rightarrow (d;d') = \begin{cases} \alpha & \text{khi } 0 < \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - \alpha & \text{khi } \dfrac{\pi}{2} \le \alpha < \pi \end{cases}$$

$$Q_{(O;90^\circ)}: M(x;y) \to M'(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

$$Q_{(O;-90^\circ)}: M(x;y) \to M'(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

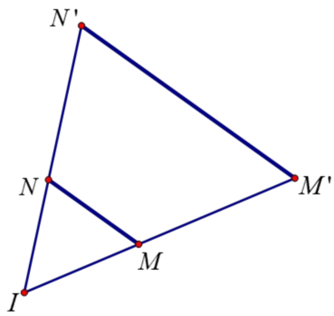




$$Q_{(O;\alpha)}: M(x;y) \to M'(x';y') \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \\ (x+yi)\times 1\angle\alpha = x' + y'i \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} Q_{(I;\varphi)}: M(x;y) \to M'(x';y') \\ I(a;b) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x' - a = (x-a)\cos\varphi - (y-b)\sin\varphi \\ y' - b = (x-a)\sin\varphi + (y-b)\cos\varphi \end{cases} \\ (x - a + (y-b)i)\times 1\angle\varphi + (a+bi) = x' + y'i \end{array} \right.$$

5. Phép vị tự.



$$V_{(I;k)}: M \to M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM} \quad (k \ne 0)$$

$$V_{(I;k)} \begin{cases} M \to M' \\ N \to N' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN} \\ M'N' = |k|MN \end{cases}$$

$$V_{(O;k)}: M \to M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{(I;k)}: M(x;y) \to M'(x';y') \\ I(a;b) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x' - a = k(x-a) \\ y' - b = k(y-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b \end{cases} \\ k\times(x+yi) + (1-k)\times(a+bi) = x' + y'i \end{array} \right.$$

***Chú ý:** Nếu phép dời hình (phép đồng dạng) biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$ $(\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C')$ thì nó sẽ biến trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC tương ứng thành trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp của $\Delta A'B'C'$.

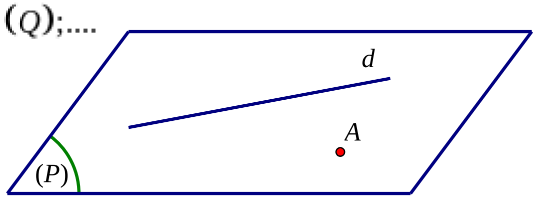
Chương II. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

A. Đại cương về đường thẳng trong mặt phẳng

1. Khái niệm mở đầu.

a. Mặt phẳng.

– Kí hiệu $(\alpha);(\beta);(P);(Q);....$ hoặc $mp(\alpha);mp(\beta);mp(P);mp(Q);....$



b. Quan hệ thuộc.

– Cho điểm A, đường thẳng d và mặt phẳng (P) thì:

+) Điểm A thuộc đường thẳng d : $A\in(P)$.

+) Điểm A không thuộc đường thẳng d : $A\notin(P)$.

+) Đường thẳng d thuộc mặt phẳng (P): $d\in(P)$.

+) Đường thẳng d không thuộc mặt phẳng (P): $d\notin(P)$.

+) Đường thẳng d thuộc mặt phẳng (P); mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d : $d\subset(P)$.

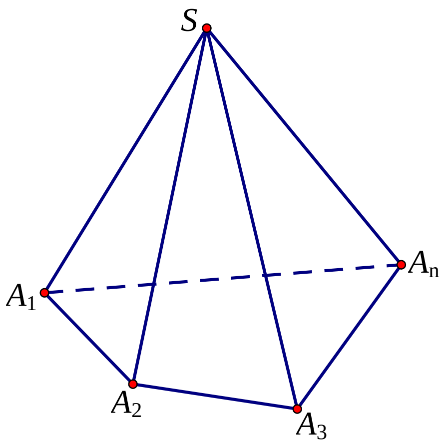
c. Hình biểu diễn của một hình trong không gian.

a) Quy tắc.

– Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, đoạn thẳng là đoạn thẳng.
– Đường nhìn thấy là nét liền, đường không nhìn thấy là nét đứt.
– Hình biểu diễn giữ nguyên quan hệ thuộc và tỉ lệ.
– Hình biểu diễn của tam giác vuông, tam giác cân và tam giác đều là tam giác thường.
– Hình biểu diễn của hình vuông, hình chữ nhật, hình bình hành, hình thoi là hình bình hành.
– Hình biểu diễn của hình tròn là elip.

b) Hình chóp.

– Định nghĩa: Cho đa giác $A_1A_2...A_n\in(P)$ và $S\notin(P)$. Nối S lần lượt với các đỉnh của đa giác $A_1A_2...A_n$ ta được các miền tam giác $SA_1A_2;SA_2A_3;...;SA_{n-1}A_n$. Khi đó hình tạo bởi các miền tam giác và miền đa giác được gọi là hình chóp.



– Kí hiệu: $S.A_1A_2...A_n$.

+) Miền tam giác $SA_1A_2;SA_2A_3;...;SA_{n-1}A_n$: mặt bên của hình chóp.

+) $SA_1;SA_2;...;SA_n$: cạnh bên của hình chóp.

+) $A_1A_2;A_2A_3...;A_{n-1}A_n$: cạnh đáy của hình chóp.

+) $A_1A_2...A_n$: mặt đáy của hình chóp

– Tên gọi của đa giác được gọi theo đa giác đáy

2. Tính chất thừa nhận.

a. Tính chất 1: $A\neq B\Rightarrow\exists!d:\ A,B\in d.$

b. Tính chất 2: $A\neq B\neq C\Rightarrow\exists!(\alpha):\ A,B,C\in(\alpha).$

c. Tính chất 3: $\begin{cases}A\neq B\\ A,B\in d\\ A,B\in(\alpha)\end{cases}\Rightarrow d\subset(\alpha).$

d. Tính chất 4: Tồn tại 4 điểm không cùng một mặt phẳng.

e. Tính chất 5: $\begin{cases}(P)\neq(Q)\\ A=(P)\cap(Q)\end{cases}\Rightarrow A\in\Delta=(P)\cap(Q).$

f. Tính chất 6: Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

* Phương pháp chứng minh ba điểm thẳng hàng: $\begin{cases}A\neq B\neq C\\ A,B,C\in(\alpha)\\ A,B,C\in(\beta)\end{cases}\Rightarrow A,B,C$ thẳng hàng.

* Phương pháp tìm giao điểm: $A=a\cap(\alpha).$

– Phương pháp 1:

Bước 1: Tìm $a\in(\alpha)$.

Bước 2: Chỉ ra a, d đồng phẳng và chúng cắt nhau tại M. Khi đó $d\cap(\alpha)=M$.

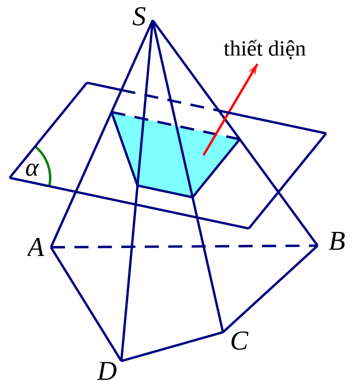
– Phương pháp 2:

Bước 1: Tìm (β) chứa d thích hợp.

Bước 2: Tìm giao tuyến $a=(\alpha)\cap(\beta)$.

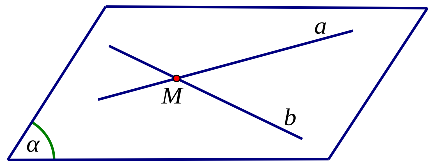
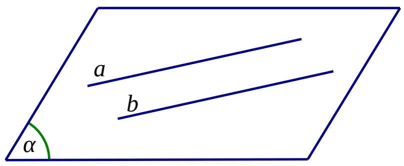
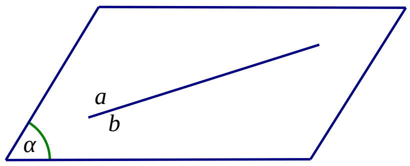
Bước 3: Xác định $M=a\cap d$. Khi đó $d\cap(\alpha)=M$.

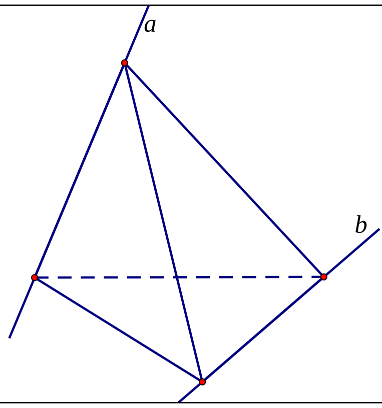
* Phương pháp tìm thiết diện: Ta tìm các đoạn giao tuyến của mặt phẳng cắt với hình đã cho.



B. Hai đường chéo nhau và hai đường song song

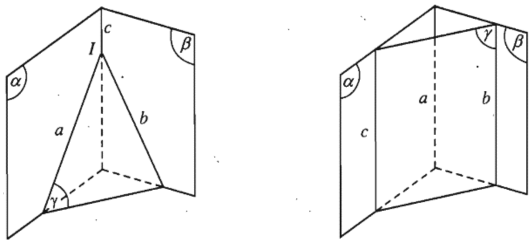
1. Ví trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian.

	Vị trí tương đối	**Minh họa**
***a* và *b* đồng phẳng**	$a\cap b=M$ (*a* và *b* có 1 điểm chung)	
	$a\ //\ b$ (*a* và *b* không có điểm chung)	
	$a\equiv b$ (*a* và *b* có vô số điểm chung)	

***a* và *b* không đồng phẳng**	*a* chéo *b* (*a* và *b* không có điểm chung)	

2. Tính chất.

– Định lí 1: Tiên đề Ơ-clít: $M \notin d \Rightarrow \exists! d': \begin{cases} M \in d' \\ d' // d \end{cases}$



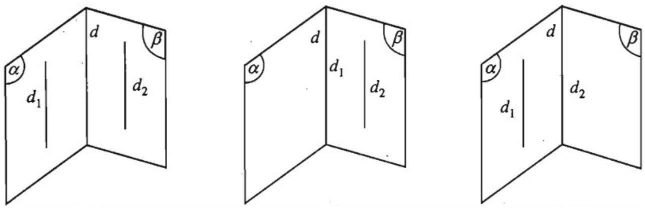
– Định lí 2: $\begin{cases} (\alpha) \cap (\beta) = a \\ (\beta) \cap (\gamma) = b \\ (\gamma) \cap (\alpha) = c \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a // b // c \\ a \cap b \cap c \end{array} \right.$

– Hệ quả 1: Phương pháp chứng minh ba đường thẳng song song hoặc đồng quy

+) Phương pháp chứng minh ba đường thẳng song song: $a // b // c \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha) \cap (\beta) = a \\ (\beta) \cap (\gamma) = b \\ (\gamma) \cap (\alpha) = c \\ a // b \end{cases}$

+) Phương pháp chứng minh ba đường thẳng: $a \cap b \cap c = I \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha) \cap (\beta) = a \\ (\beta) \cap (\gamma) = b \\ (\gamma) \cap (\alpha) = c \\ a \cap b = I \end{cases}$

– Hệ quả 2: $\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ b \subset (\beta) \\ a // b \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \left[\begin{array}{l} \Delta // a // b \\ \Delta \equiv a \\ \Delta \equiv b \end{array} \right.$

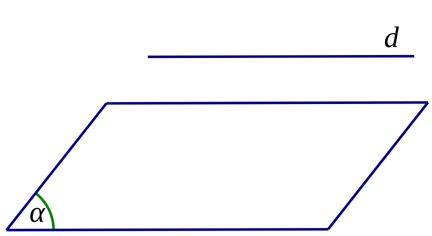


+) Phương pháp chứng minh 2 đường thẳng song song: $\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ b \subset (\beta) \\ a // b \\ a \neq b \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \Delta // a // b$

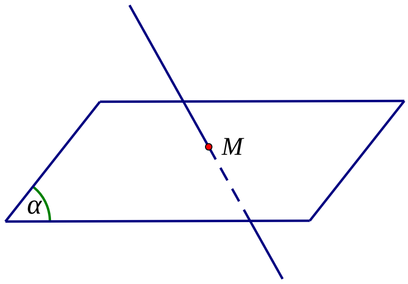
– Định lí 3: $\begin{cases} a // b \\ b // c \end{cases} \Rightarrow a // c$.

C. Đường thẳng và mặt phẳng song song

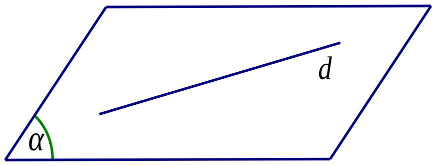
1. Ví trị tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.



$d \,//\, (\alpha) \Leftrightarrow d \cap (\alpha) = \varnothing$



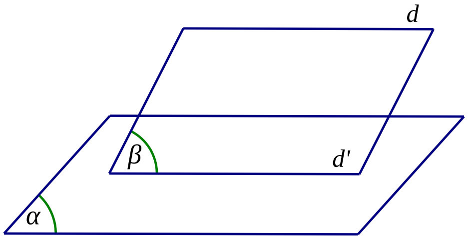
$d \cap (\alpha) \Leftrightarrow d \cap (\alpha) = M$



$d \subset (\alpha) \Leftrightarrow d \cap (\alpha) = d$

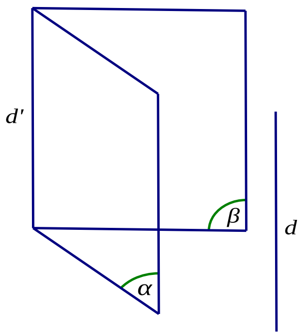
2. Tính chất.

– Định lí 1: $\begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ d' \subset (\alpha) \Rightarrow d \,//\, (\alpha) \\ d \,//\, d' \end{cases}$



– Định lí 2: $\begin{cases} d \,//\, (\alpha) \\ d \subset (\beta) \qquad \Rightarrow d \,//\, d' \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases}$

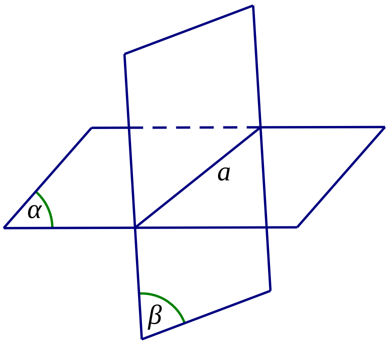
– Hệ quả: $\begin{cases} d \,//\, (\alpha) \\ d \,//\, (\beta) \qquad \Rightarrow d \,//\, d' \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases}$



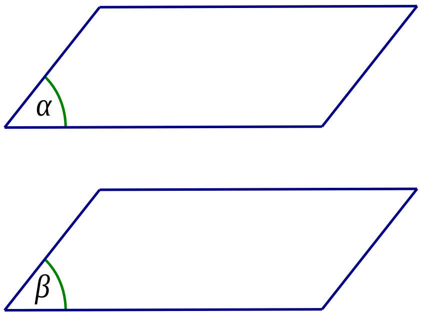
– Định lí 3: a chéo b $\Rightarrow \exists! (\alpha) : \begin{cases} a \subset (\alpha) \\ b \,//\, (\alpha) \end{cases}$

D. Hai mặt phẳng song song

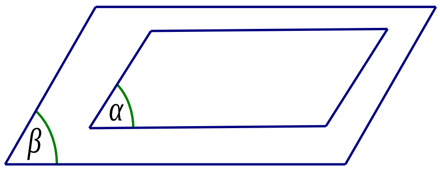
1. Ví trí tương đối của hai mặt phẳng.



$(\alpha) \cap (\beta) \Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = a$



$(\alpha) \,//\, (\beta) \Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \varnothing$

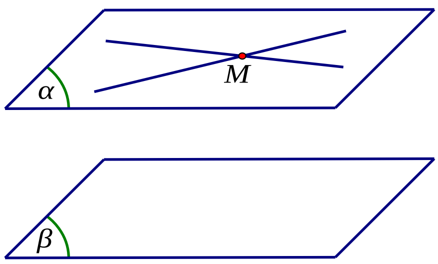


$(\alpha) \,//\, (\beta) \Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \left[\begin{matrix} (\alpha) \\ (\beta) \end{matrix} \right.$

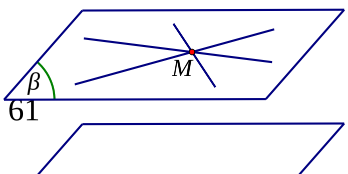
* Phương pháp chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng: $\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ (\alpha) \,//\, (\beta) \end{cases} \Rightarrow a \,//\, (\beta)$.

2. Tính chất.

– Định lí 1: $\begin{cases} a \cap b = M \\ a \subset (\alpha) \\ b \subset (\alpha) \quad \Rightarrow (\alpha) \,//\, (\beta) \\ a \,//\, (\beta) \\ b \,//\, (\beta) \end{cases}$



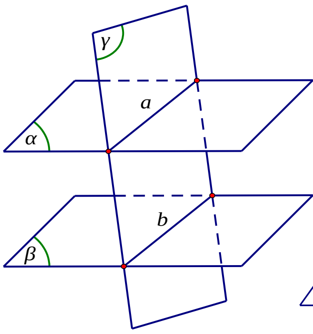
– Định lí 2: $A \notin (\alpha) \Rightarrow \exists! (\beta) : A \in (\beta) \,//\, (\alpha)$



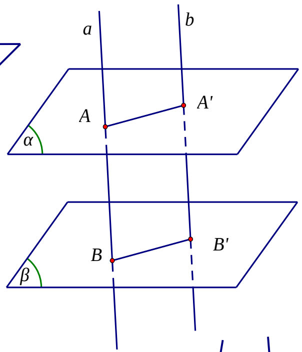
– Hệ quả 1: $d \,//\, (\alpha) \Rightarrow \exists!(\beta): d \subset (\beta) \,//\, (\alpha)$

– Hệ quả 2: $\begin{cases} (\alpha) \neq (\beta) \\ (\alpha) \,//\, (\gamma) \Rightarrow (\alpha) \,//\, (\beta) \\ (\beta) \,//\, (\gamma) \end{cases}$

– Hệ quả 3: $\begin{cases} A \notin (\alpha) \\ \forall d : \begin{cases} A \in d \\ d \,//\, (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \forall d \in (\beta) \,//\, (\alpha) \end{cases}$



– Định lí 3: $\begin{cases} (\alpha) \,//\, (\beta) \\ (\gamma) \cap (\alpha) = a \Rightarrow a \,//\, b \\ (\gamma) \cap (\beta) = b \end{cases}$

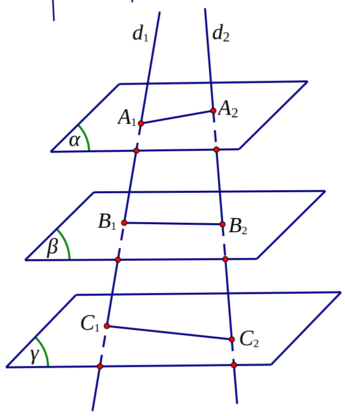


– Hệ quả: Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn bằng nhau.

3. Định lí Ta-lét (Thalès).

– Định lí thuận: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn tương ứng tỉ lệ.

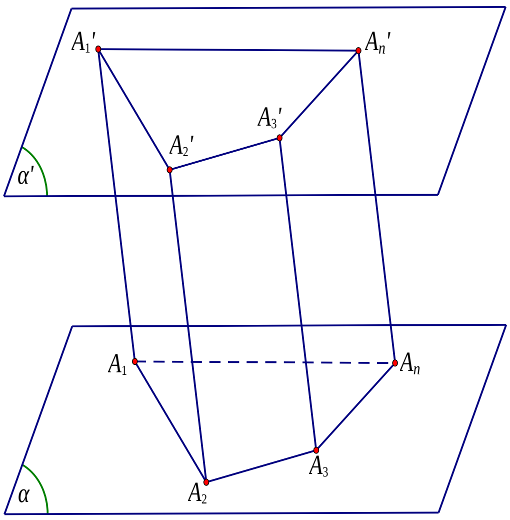
$$\begin{cases} (\alpha) \,//\, (\beta) \,//\, (\gamma) \\ d_1 \cap (\alpha) = A_1, d_1 \cap (\beta) = B_1, d_1 \cap (\gamma) = C_1 \\ d_2 \cap (\alpha) = A_2, d_2 \cap (\beta) = B_2, d_2 \cap (\gamma) = C_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1A_1}{C_2A_2}$$



– Định lí đảo: $\begin{cases} d_1 \text{ chéo } d_2 \\ A_1, B_1, C_1 \in d_1 \Rightarrow A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 \,//\, (\alpha) \\ A_2, B_2, C_2 \in d_2 \end{cases}$

4. Hình lăng trụ và hình hộp.

– Định nghĩa: Cho $\begin{cases} (\alpha) \,//\, (\alpha') \\ A_1, A_2, A_3, ..., A_n \in (\alpha) \\ A_1A_1' \,//\, A_2A_2' \,//\, A_3A_3' \,//\, ... \,//\, A_nA_n' \\ A_1', A_2', A_3', ..., A_n' \in (\alpha') \end{cases}$, khi đó hình gồm hai đa giác $A_1A_2A_3...A_n$, $A_1'A_2'A_3'...A_n'$ và các hình bình hành được gọi là hình lăng trụ $A_1A_2A_3...A_n.A_1'A_2'A_3'...A_n'$



– Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.

– Tính chất:

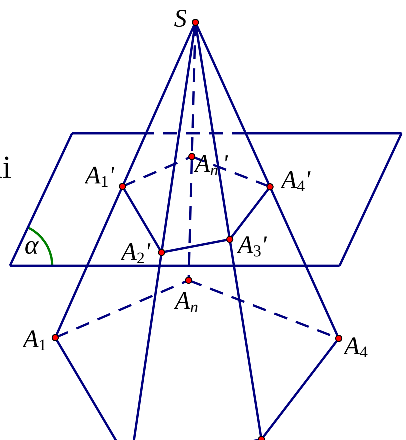
+) Các cạnh bên của lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.

+) Các mặt đáy của hình lăng trụ là hình bình hành.

+) Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

5. Hình chóp cụt.

– Định nghĩa: Cho hình chóp $S.A_1A_2A_3A_4...A_n$ và $\exists(\alpha): \begin{cases} S \notin (\alpha) \\ (\alpha) \,//\, (A_1A_2A_3...A_n) \end{cases}$, $(\alpha) \cap \{SA_1; SA_2; SA_3; SA_4; ...; S_n\} = A_1'; A_2'; A_3'; A_4'; A_n'$. Hình được tạo bởi hai đa giác $A_1A_2A_3...A_n$, $A_1'A_2'A_3'...A_n'$ và các tứ giác $A_1'A_2'A_1A_2$; $A_2'A_3'A_2A_3; ...; A_{n-1}'A_n'A_{n-1}A_n$ gọi là hình chóp cụt.



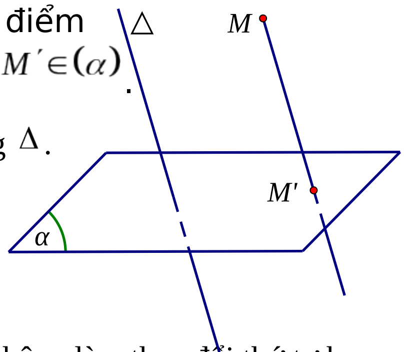
– Tính chất:

+) Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.
+) Các mặt bên là các hình thang.
+) Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

E. Phép chiếu song song. Hình biểu diễn của một hình trong không gian

1. Phép chiếu song song.

– Định nghĩa: Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng $\Delta \cap (\alpha)$. Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ MM' song song hoặc trùng với Δ với $M' \in (\alpha)$.
Khi đó M' được gọi là hình chiếu song song của M trên (α) theo phương Δ.



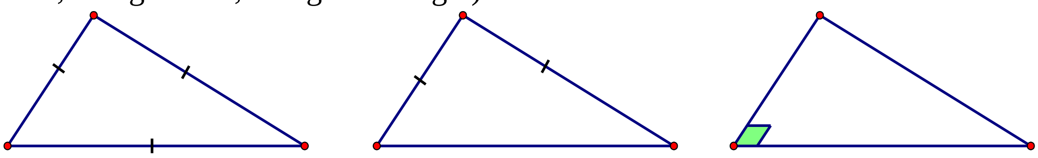
– Trong đó:
+) Mặt phẳng (α): mặt phẳng chiếu.
+) Phương Δ: phương chiếu.

2. Tính chất.

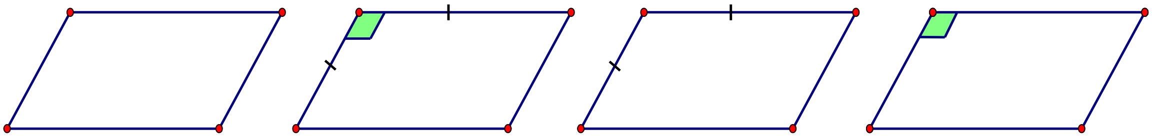
– Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
– Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng
– Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau
– Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

3. Hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng.

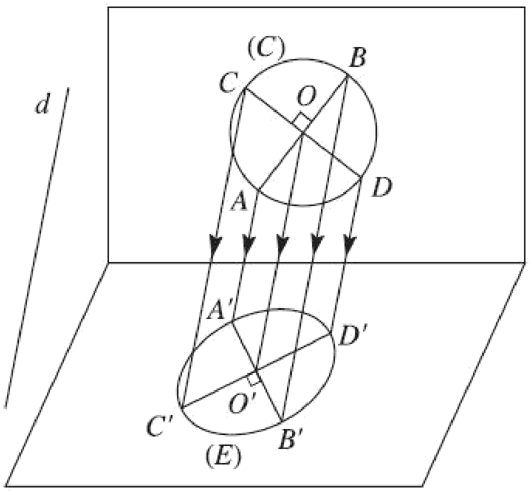
– Hình biểu diễn của một hình $\mathcal{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của hình $\mathcal{H}$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.
– Hình biểu diễn của các hình thường gặp
+) Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác tùy ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông...).



+) Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tùy ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi...)



+) Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tùy ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài đáy của hình biểu diễn bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình đã cho.
+) Người ta thường dùng hình elip để biểu diễn hình tròn.



CHƯƠNG III. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

A. Đại cương về đường thẳng trong mặt phẳng

1. Vectơ trong không gian.

a. Các phép toán liên quan đến vectơ.

Đẳng thức xảy ra khi $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$	
$\vec{a}^2 = \lvert\vec{a}\rvert^2$	$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$
$\vec{a}.(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}\pm\vec{a}.\vec{c}$	$\vec{a}\pm(\vec{b}\pm\vec{c})=(\vec{a}\pm\vec{b})\pm\vec{c}=(\vec{a}\pm\vec{c})\pm\vec{b}$
$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$	$(\vec{a}\pm\vec{b})^2=\vec{a}^2\pm2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$

b. Điều kiện cùng phương của hai vectơ.

– Ta có $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}\ (\vec{b}\neq\vec{0})$ $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}: \vec{a}=k.\vec{b}$.

– Hệ quả: A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}: \overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \exists l\in\mathbb{R}: l.\overrightarrow{MA}+(1-l).\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC},\ \forall M$.

– Nếu $\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}\ (k\neq1)$ thì với mọi điểm M trong không gian ta có $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{1-k}\overrightarrow{MB}-\frac{k}{1-k}\overrightarrow{MC}$.

– Chú ý: $\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{b}$ $\Rightarrow \vec{b}=\frac{\lvert\vec{b}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert}\vec{a}$ và $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$ $\Rightarrow \vec{b}=-\frac{\lvert\vec{b}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert}\vec{a}$.

– Hai vectơ bằng nhau khi $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{b}$ và $\lvert\vec{a}\rvert=\lvert\vec{b}\rvert$.

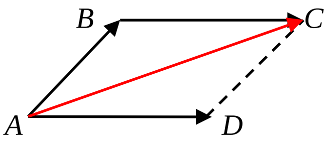
c. Phép nhân một số với một vectơ.

– Ta có $k.\vec{a}$ được xác định như sau:

+) Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k\geq0$.

+) Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k<0$.

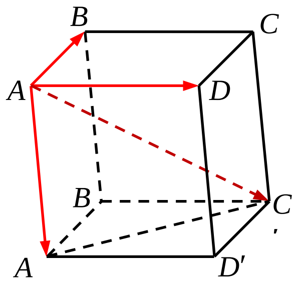
+) Có độ dài $\lvert k.\vec{a}\rvert=\lvert k\rvert.\lvert\vec{a}\rvert$.



d. Phép cộng vectơ.

– Quy tắc ba điểm: $\forall A,B,C: \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

– Quy tắc hình bình hành: Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.



– Quy tắc hình hộp: Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

e. Một số tính chất.

– Nếu I là trung điểm của AB thì ta có $\begin{cases}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\\ \forall M: \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}\end{cases}$

– Nếu G là trọng tâm ΔABC thì ta có $\begin{cases}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\\ \forall M: \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}\end{cases}$

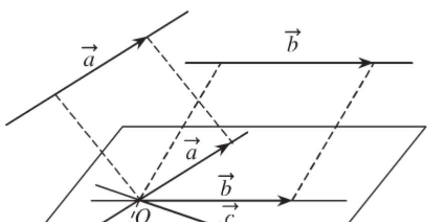
– Nếu I là trung điểm của AB và J là trung điểm của CD thì ta có

$$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}).$$

– Nếu G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ thì ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\\ \forall M: \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}\end{cases}$

2. Sự đồng phẳng của các vectơ.

– Định nghĩa: Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

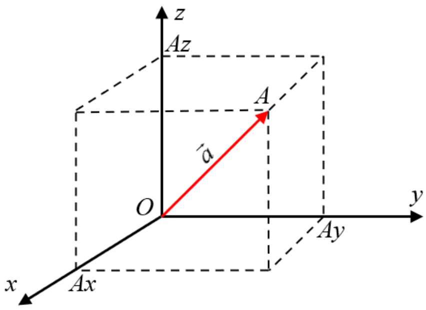


– Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:

+) Định lí: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trong đó hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương. Khi đó: Điều kiện cần và để ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là $\exists! m, n : \vec{c} = m.\vec{a} + n.\vec{b}$.

+) Hệ quả: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Khi đó $\exists m, n, p : m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow m = n = p = 0$.

– Nếu $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ là ba vectơ không đồng phẳng thì với vectơ $\vec{a}$ bất kì, ta đều tìm được duy nhất bộ ba số m, n, p sao cho $\vec{a} = m\vec{x} + n\vec{y} + p\vec{z}$.



B. Hai đường thẳng vuông góc

1. Tích vô hướng của hai vectơ.

a. Góc giữa hai vectơ.

– Định nghĩa: Trong không gian, cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vec tơ khác vectơ - không. Lấy một điểm *A* bất kì, gọi *B* và *C* là hai điểm bất kì sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Khi đó $(\vec{a};\vec{b}) = \widehat{BAC}\ (0^\circ \le \widehat{BAC} \le 180^\circ)$

– Chú ý: +) $(\vec{a};\vec{b}) = 0^\circ \Leftrightarrow$ $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}$.

+) $(\vec{a};\vec{b}) = 180^\circ \Leftrightarrow$ $\vec{a}$ ngược hướng $\vec{b}$.

b. Tính vô hướng của hai vec tơ.

– Công thức: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a};\vec{b})$.

– Chú ý:

+) $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a};\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{b} = \vec{0} \\ \cos(\vec{a};\vec{b}) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} \perp \vec{b} \end{array}\right.$

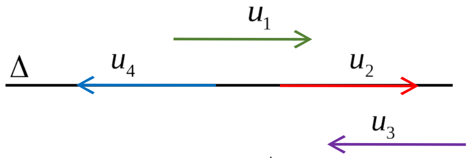
+) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}\ (\vec{a};\vec{b}) \Rightarrow (\vec{a};\vec{b}) = 0^\circ$.

+) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}\ (\vec{a};\vec{b}) \Rightarrow (\vec{a};\vec{b}) = 180^\circ$.

2. Vectơ chỉ phương của đường thẳng.

– Định nghĩa: $\vec{u}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ khi $\vec{u}$ thỏa mãn:

$\begin{cases} \vec{u} \ne \vec{0} \\ \text{Giá của } \vec{u} \text{ song song hoặc trùng với đường thẳng } \Delta \end{cases}$



– Nhận xét:

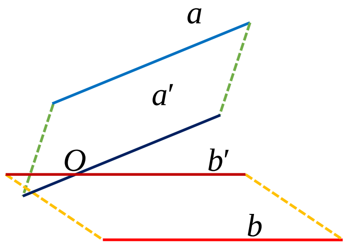
+) Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương thì $k\vec{u}\ (k \ne 0)$ cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

+) Một đường thẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm và vectơ chỉ phương.

+) $d // \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} d \ne \Delta \\ \vec{u_d} = \vec{u_\Delta} \end{cases}$ (với $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương).

3. Góc giữa hai đường thẳng.

– Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b:



+) Cách 1: Ta lấy điểm O bất kì dựng $\begin{cases} a' // a \\ b' // b \\ a' \cap b' = O \end{cases}$, khi đó $\left(\widehat{a;b}\right) = \left(\widehat{a';b'}\right)$.

+) Cách 2: $\cos(a,b) = \dfrac{\left|\vec{u_a}.\vec{u_b}\right|}{\left|\vec{u_a}\right|\left|\vec{u_b}\right|}$ (với u_a, u_b lần lượt là vectơ chỉ phương của a, b).

– Chú ý:

+) $0^\circ \le \left(\widehat{a,b}\right) \le 90^\circ$

+) Giả sử u là vectơ chỉ phương của a, v là vectơ chỉ phương của b và $(u,v) = \alpha$.

Khi đó: $\left(\widehat{a,b}\right) = \begin{cases} \alpha & \text{khi } 0^\circ \le \alpha \le 90^\circ \\ 180^\circ - \alpha & \text{khi } 90^\circ < \alpha \le 180^\circ \end{cases}$ $\cos(a;b) = \left|\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)\right|$.

+) Nếu B hoặc $a \equiv b$ thì $\left(\widehat{a,b}\right) = 0^\circ$.

4. Hai đường thẳng vuông góc.

– Định nghĩa: $a \perp b \Leftrightarrow \left(\widehat{a,b}\right) = 90^\circ$.

– Chú ý:

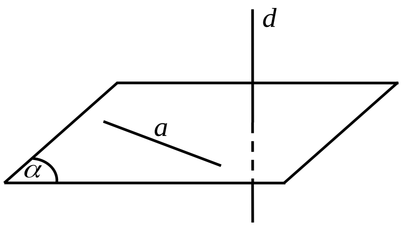
+) u là vectơ chỉ phương của *a*, v là vectơ chỉ phương của *b*. Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow u.v = 0$.

+) Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

C. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

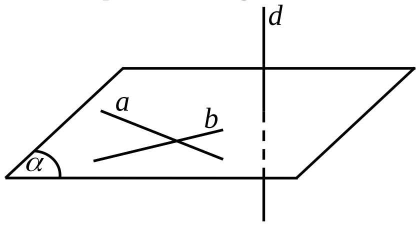
1. Định nghĩa.

$d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp a,\ \forall a \in (\alpha)$.



2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

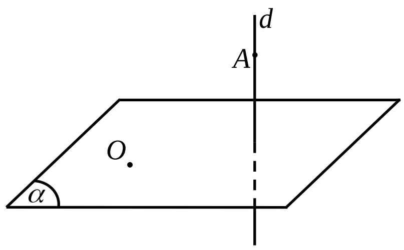
– Định lí: $\begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \\ a \cap b = O \\ a, b \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha)$.



– Hệ quả: $\begin{cases} AB, AC, BC \in \Delta ABC \\ d \perp AB \\ d \perp AC \end{cases} \Rightarrow d \perp BC$.

3. Tính chất.

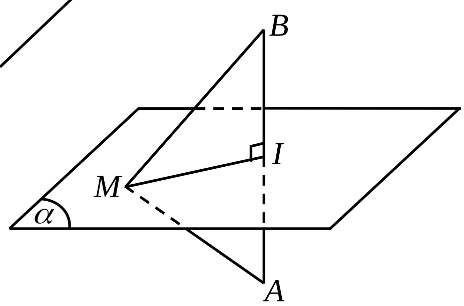
– Tính chất 1: $O \notin d \Rightarrow \exists!(\alpha): \begin{cases} O \in (\alpha) \\ (\alpha) \perp d \end{cases}$.



– Tính chất 2: $A \notin (\alpha) \Rightarrow \exists! d: \begin{cases} A \in d \\ d \perp (\alpha) \end{cases}$.

– Nếu $(\alpha) \perp AB$ tại trung điểm I của đoạn thẳng AB

Thì (α) được gọi là mặt phẳng trung trực của AB.

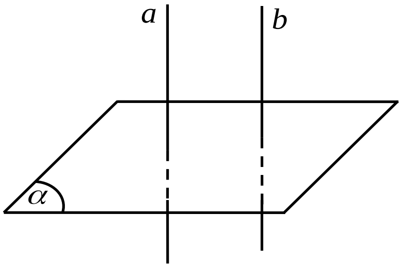


4. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng.

– Tính chất 1:

+) $\begin{cases} a // b \\ (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp b$.

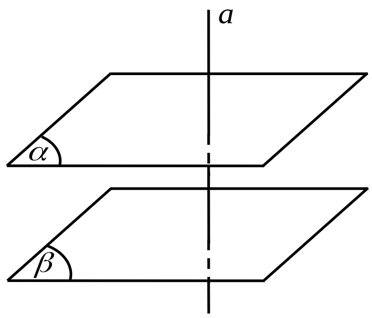
+) $\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a // b$.



– Tính chất 2:

+) $\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta)$.

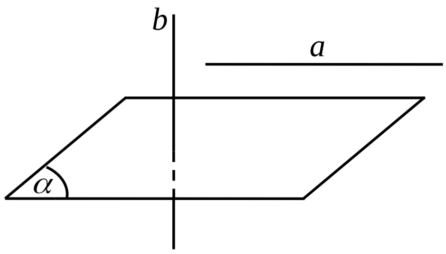
+) $\begin{cases} a \perp (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$.



– Tính chất 3:

+) $\begin{cases} a // (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow b \perp a$.

+) $\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ a \perp b \\ (\alpha) \perp b \end{cases} \Rightarrow a // (\alpha)$.



5. Phép chiếu vuông góc và định lí ba đường vuông góc.

a. Phép chiếu vuông góc.

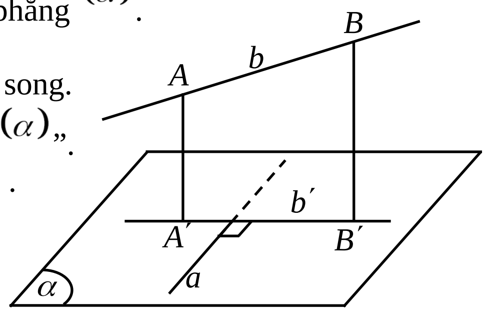
– Định nghĩa: Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α). Phép chiếu song song theo phương của Δ lên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α).

– Nhận xét:

+) Phép chiếu vuông góc có đầy đủ tính chất của phép chiếu song song.

+) Người ta có thể gọi là "Phép chiếu (vuông góc) lên mặt phẳng (α)".

+) Người ta có thể gọi là "$\mathscr{H}'$ là hình chiếu (vuông góc) của $\mathscr{H}$".



b. Định lí ba đường vuông góc.

– Cho $\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ b \not\subset (\alpha) \\ b \not\perp a \\ b' \end{cases}$ là hình chiếu của b trên (α). Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'$.

c. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

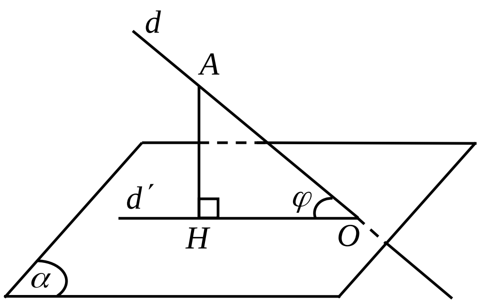
– Khi $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow (\widehat{d;(\alpha)}) = 90^\circ$

– Cách xác định $(\widehat{d;(\alpha)})$ và $d \cap (\alpha) = O$:

+) Bước 1: Lấy một điểm A bất kì khác O.

+) Bước 2: Dựng H hình chiếu vuông góc của A lên (α).

+) Bước 3: Khi đó $(\widehat{d;(\alpha)}) = (\widehat{AO;OH}) = \widehat{AOH} = \varphi$.



$\square$ $0^\circ \le \varphi \le 90^\circ$.

$\square$ $\varphi = 0^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d // (\alpha) \\ d \subset (\alpha) \end{array}\right.$.

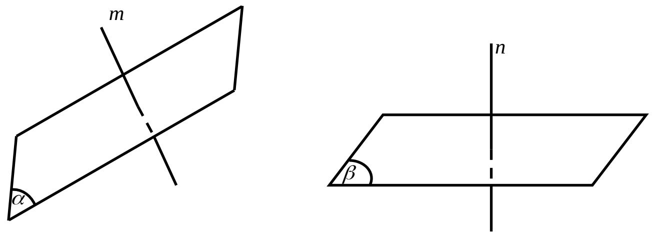
$\square$ $\varphi = 0^\circ \Leftrightarrow d \perp (\alpha)$.

– Khi $a // d$ thì $\widehat{(d;(\alpha))} = \widehat{(a;(\alpha))} = \widehat{(a;d')}$, với d' là hình chiếu của d trên (α).

– Khi $(\alpha) // (\beta)$ thì $\widehat{(d;(\alpha))} = \widehat{(d;(\beta))}$.

D. Hai mặt phẳng vuông góc

1. Góc giữa hai mặt phẳng.



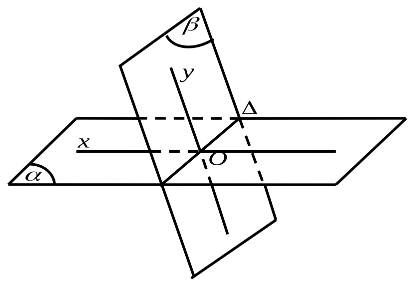
– Định nghĩa: $\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow \widehat{((\alpha);(\beta))} = \widehat{(a;b)}$.

+) $0^\circ \le \widehat{((\alpha);(\beta))} \le 90^\circ$.

+) $\widehat{((\alpha);(\beta))} = 0^\circ \Leftrightarrow (\alpha)$ song song hoặc trùng với (β).

+) $\widehat{((\alpha);(\beta))} = 90^\circ \Leftrightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.

– Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng $(\alpha) \cap (\beta) = \Delta$.



+) Lấy $O \in \Delta$ và kẻ $\begin{cases} Ox \perp \Delta \\ Oy \perp \Delta \end{cases}$

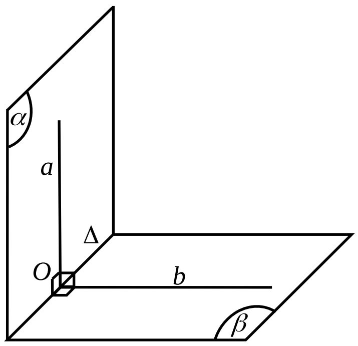
+) Khi đó $\widehat{((\alpha);(\beta))} = \widehat{(Ox;Oy)}$.

– Diện tích hình chiếu của đa giác: Cho đa giác $\mathscr{H}$ nằm trong mặt phẳng (α) có diện tích S, dựng $\mathscr{H}'$ là hình chiếu vuông góc của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (β) và $\widehat{((\alpha);(\beta))} = \varphi$. Khi đó S' là diện tích của $\mathscr{H}'$ được tính bởi công thức $S' = S.\cos\varphi$.

2. Hai mặt phẳng vuông góc.

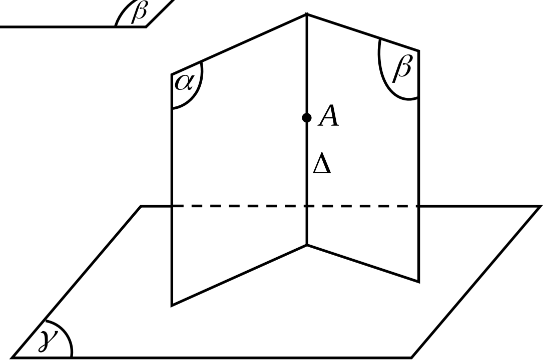
– Định nghĩa: $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \widehat{((\alpha);(\beta))} = 90^\circ$.

– Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc.



+) Định lí 1: $\begin{cases} \Delta \perp (\alpha) \\ \Delta \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.

+) Hệ quả 1: $\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) = a \\ \Delta \subset (\alpha) \\ \Delta \perp a \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (\beta)$.

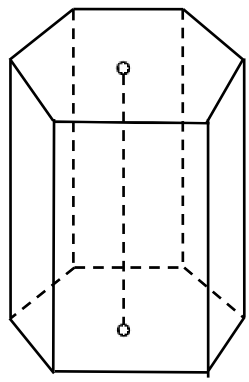


+) Hệ quả 2: $\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ A \subset (\alpha) \\ AB \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow AB \subset (\alpha)$.

+) Định lí 2: $\begin{cases} (\alpha) \cap (\beta) = \Delta \\ (\alpha) \perp (\gamma) \\ (\beta) \perp (\gamma) \end{cases} \Rightarrow \Delta \subset (\gamma)$.

3. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương.

– Định nghĩa: Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với các mặt đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.



– Các mặt bên của hình lăng trụ đứng luôn luôn vuông góc với mặt phẳng đáy và là những hình chữ nhật.

– Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác, tứ giác,... được gọi là hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác,...

– Một số lăng trụ đặc biệt

+) Hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều được gọi là hình lăng trụ đều.

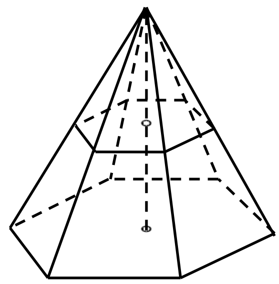
+) Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng.

+) Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là hình hộp chữ nhật.

+) Hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông được gọi là hình lập phương.

4. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều.

a. Hình chóp đều.



– Định nghĩa. Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

– Tính chất:

+) Một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác đều và chân đường cao của hình chóp đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy.

+) Hình chóp đều có các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau.

+) Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

+) Các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

b. Hình chóp cụt đều.

– Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

– Tính chất:

+) Các mặt bên của hình chóp cụt đều là những hình thang cân và các cạnh bên của hình chóp cụt đều có độ dài bằng nhau.

+) Hai đáy của hình chóp cụt đều là hai đa giác đều và đồng dạng với nhau.

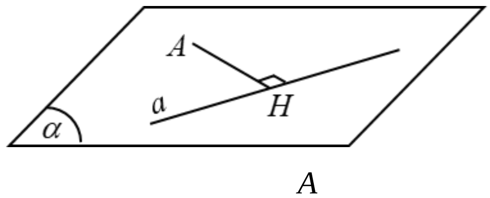
+) Đoạn nối tâm của hai đáy được gọi là đường cao của hình chóp cụt đều.

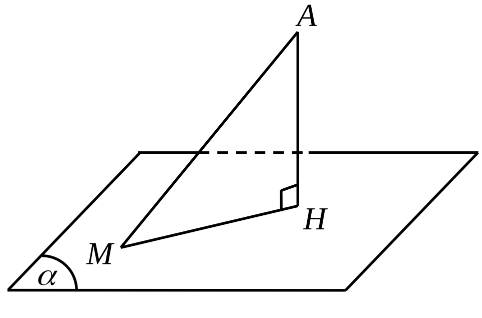
E. Khoảng cách

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, một mặt phẳng.

– Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

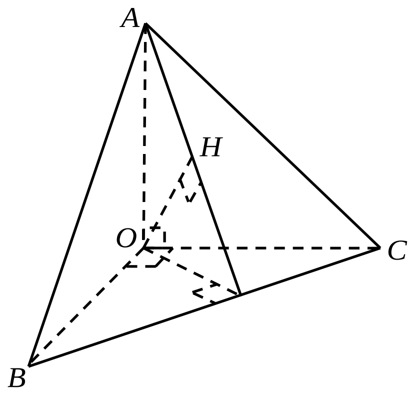
$AH \perp a$ tại $H \Rightarrow d(A;a) = AH$.





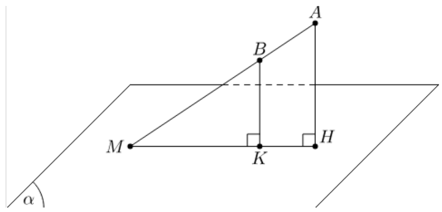
– Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:

$AH \perp (\alpha)$ tại $H \Rightarrow d(A;(\alpha)) = AH$.



– Cho hình chóp $AOBC$ có OA, OB, OC đôi một lần lượt vuông góc với nhau. Khi đó:

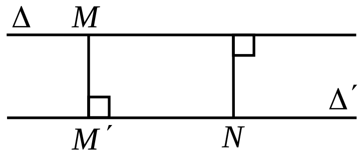
$$\frac{1}{d\left(O;(ABC)\right)^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$$



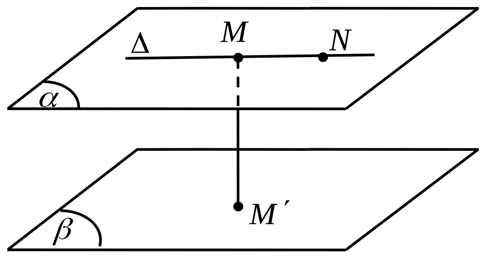
– Nếu $AB\cap(\alpha)=C\Rightarrow \dfrac{d\left(A;(\alpha)\right)}{d\left(B;(\alpha)\right)}=\dfrac{AC}{BC}$.

2. Khoảng cách đường thẳng và mặt phẳng song song.

– Cho $\begin{cases}\Delta\,//\,\Delta'\\ M\in\Delta\Rightarrow\ d\left(\Delta;\Delta'\right)=d\left(M;\Delta'\right)=d\left(N;\Delta\right)\\ N\in\Delta'\end{cases}$.



– Cho $\begin{cases}(\alpha)\,//\,(\beta)\\ M\in(\alpha)\ \Rightarrow\ d\left((\alpha);(\beta)\right)=d\left(M;(\beta)\right)=d\left(N;(\alpha)\right)\\ N\in(\beta)\end{cases}$.



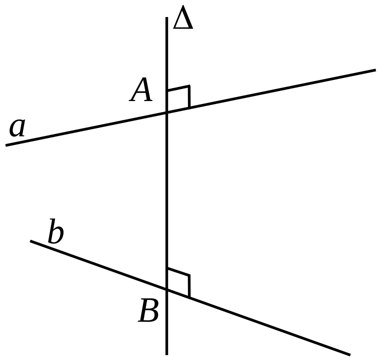
– Cho $\begin{cases}\Delta\,//\,(\alpha)\\ M\in\Delta\end{cases}\Rightarrow\ d\left(\Delta;(\alpha)\right)=d\left(M;(\alpha)\right)$.

– Cho $MN\,//\,(\alpha)\Rightarrow\ d\left(M;(\alpha)\right)=d\left(N;(\alpha)\right)$.

3. Đường vuông góc chung và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

a. Đường vuông góc chung.

– Cho $\begin{cases}a \text{ chéo } b\\ \Delta\perp a \text{ tại } A\\ \Delta\perp b \text{ tại } B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta \text{ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng } a \text{ và } b\\ AB \text{ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng } a \text{ và } b\end{cases}\Rightarrow d\left(a;b\right)=AB$.



– Cách xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng *a* và *b* chéo nhau.

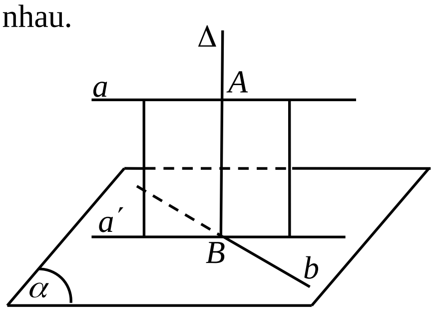
+) Dựng (α) sao cho $b\subset(\alpha)$.

+) Gọi a' là hình chiếu vuông góc của a trên (α) và lấy $B=a'\cap b$.

+) Trong $(a;a')$ kẻ $\Delta\perp a'$ tại B, $\Delta\cap a=A$

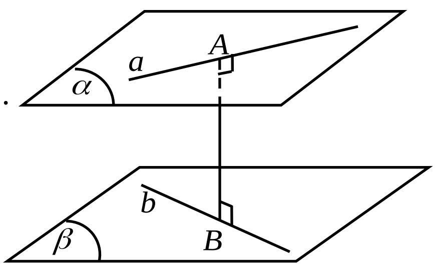
+) Khi đó Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng *a* và *b*.

+) Khi đó $d\left(a;b\right)=AB$.



– Nhận xét:

+) $d(a;b)=d(a;(\beta))=d(b;(\alpha))$ với $\begin{cases} b\subset(\beta), a\,//\,(\beta) \\ a\subset(\alpha), b\,//\,(\alpha) \end{cases}$.



+) $d(a;b)=d((\alpha);(\beta))$ với $\begin{cases} (\alpha)\,//\,(\beta) \\ a\subset(\alpha) \\ b\subset(\beta) \end{cases}$.

b. Xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

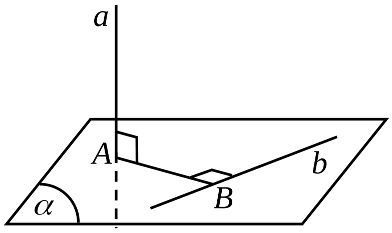
Phương pháp 1: Dựng đoạn vuông góc chung.

– Trường hợp 1: a và b vừa chéo vừa vuông góc với nhau.

+) Bước 1: Chọn (α) chứa b và vuông góc với a tại A.

+) Bước 2: Trong (α) kẻ đường thẳng AB vuông góc với b tại B.

+) Bước 3: Khi đó MN chính là đoạn vuông góc chung và $d(a;b)=AB$.



– Trường hợp 2: a và b vừa chéo và không vuông góc với nhau.

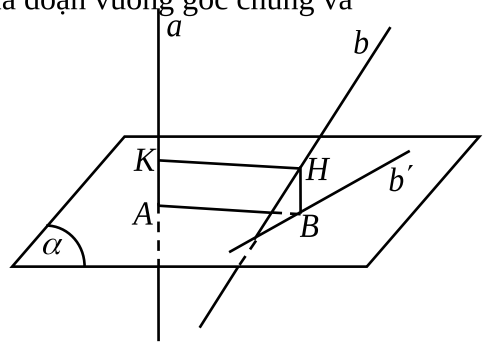
+) Bước 1: Chọn mặt phẳng (α) vuông góc với a tại A.

+) Bước 2: Bạn tìm hình chiếu b' của b xuống mặt phẳng (α).

+) Bước 3: Trong mặt phẳng (α), dựng $AB\perp b'$, từ B dựng $BH\,//\,a$ và cắt b tại H.

+) Bước 4: Từ H dựng $HK\,//\,AB$.

+) Bước 5: Khi đó HK chính là đoạn vuông góc chung và $d(a;b)=HK=AB$.



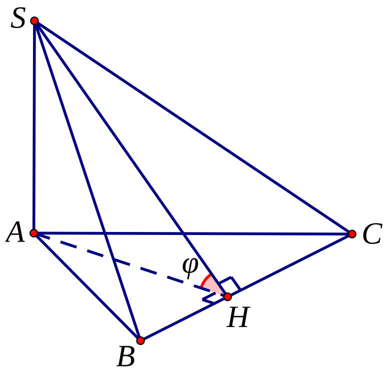
Phương pháp 2: Sử dụng phương pháp vectơ:

– Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CN}=y\overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD}=0 \end{cases}$

– Nếu (α) có hai vectơ $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ không cùng phương thì: $OH=d(O;(\alpha))\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OH}\perp\vec{u}_1 \\ \overrightarrow{OH}\perp\vec{u}_2 \\ H\in(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OH}.\vec{u}_1=0 \\ \overrightarrow{OH}.\vec{u}_2=0 \\ H\in(\alpha) \end{cases}$

*** Bổ sung: Liên hệ giữa khoảng cách giữa góc và khoảng cách.**

Bài toán: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, lấy H trên BC thỏa mãn $AH\perp BC$ và $SH\perp BC$. Hãy xác định góc φ là góc giữa (SBC) và (ABC).



Ta có: $\begin{cases} (SBC)\cap(ABC)=BC \\ SH\perp BC,\ SH\subset(SBC) \\ AH\perp BC,\ AH\subset(ABC) \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right)=\widehat{SHB}=\varphi$.

Xét ΔSAH vuông tại A có $\sin\varphi=\dfrac{SA}{SH}$.

Lại có $\begin{cases} SA\perp(ABC) \text{ tại } A \\ SH\perp(BC) \text{ tại } H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SA=d(S;ABC) \\ SH=d(S;BC) \end{cases}$.

Do đó: $\sin\varphi=\dfrac{d(S;(ABC))}{d(S;BC)}$.

$\Rightarrow$ Nếu $\begin{cases} (\alpha)\cap(\beta)=\Delta \\ M\in(\beta) \end{cases}$ thì $\sin\left(\widehat{(\alpha);(\beta)}\right)=\dfrac{d(M;(\alpha))}{d(M;\Delta)}$.