

phần I: mở đầu

I/đặt vấn đề.

Trong đề thi tốt nghiệp THPT , Đại học , Cao đẳng, THCN của các năm bài toán tích phân hầu như không thể thiếu nhưng đối với học sinh THPT bài toán tích phân là một trong những bài toán khó vì nó cần đến sự áp dụng linh hoạt của định nghĩa, các tính chất , các phương pháp tính của tích phân. Trong thực tế đa số học sinh tính tích phân một cách hết sức máy móc đó là: tìm một nguyên hàm của hàm số cần tính tích phân rồi dùng định nghĩa của tích phân hoặc phương pháp đổi biến số, phương pháp tính tích phân từng phần mà rất ít học sinh để ý đến nguyên hàm của hàm số tìm được có phải là nguyên hàm của hàm số đó trên đoạn lấy tích phân hay không? phép đặt biến mới trong phương pháp đổi biến số có nghĩa không? Phép biến đổi hàm số có tương đương không? vì thế trong quá trình tính tích phân học sinh thường mắc phải những sai lầm dẫn đến lời giải sai qua thực tế giảng dạy nhiều năm tôi nhận thấy rất rõ yếu điểm này của học sinh vì vậy tôi mạnh dạn đề xuất sáng kiến : “ Một số sai lầm thường gặp của học sinh khi tính tích phân”

Nhằm giúp học sinh khắc phục được những yếu điểm nêu trên từ đó đạt được kết quả cao khi giải bài toán tích phân nói riêng và đạt kết quả cao trong quá trình học tập nói chung.

II/Lí do chọn đề tài :

“ Một số sai lầm thường gặp của học sinh khi tính tích phân”

Trường THPT Ngọc Hồi – Kon Tum .

SKKN : “Một số sai lầm thường gặp của học sinh khi tính tích phân ”

trong toán Đại Số Giải Tích 12 . Nó cho phép chúng ta tiếp cận nhanh những bài toán phức tạp, cụ thể tính giá trị của từng dạng tích phân và có thể nhìn thấy những sai lệch , mà ta sử dụng không đúng phương pháp ...vv . Chính vì vậy tôi chọn đề tài : “ Một số sai lầm thường gặp của học sinh khi tính tích phân”

Nó thật sự có ích trong khi tôi dạy cho các em 12 để bước vào một bậc học cao hơn .Với hệ thống bài tập ít như thế này,nhưng tôi tin tưởng rằng nó là phần không thể thiếu cho các em học sinh và các bạn đồng nghiệp tham khảo .Mong bạn đọc, các đồng nghiệp có nhiều đóng góp quý báu . Xin cảm ơn !.

III/ lịch sử vấn đề :

Nguyên hàm và tích phân với các phương pháp tương ứng đã có từ lâu , nhưng :

“ Một số sai lầm thường gặp của học sinh khi tính tích phân” hầu như ít để ý đến.

Với quan sát như vậy , tôi mạnh dạn đưa ra đề tài như thế này trong khoảng thời gian suy nghĩ từ 2 đến 3 năm . Tuy là mới , nhưng tôi không ngừng tham khảo ý kiến của các em và đồng nghiệp để hoàn chỉnh nó .

IV/giới hạn của đề tài :

Về kiến thức : Nguyên hàm và tích phân chỉ giới hạn một phần kiến thức trong học kỳ II của sách đại số giải tích 12 .

Về thời gian : không nhiều trong nghiên cứu và nhìn nhận việc dạy , theo dõi việc học của các em . Nhưng với tinh thần giáo dục , nên mọi khó khăn chúng tôi cũng đều vượt qua .

V/ phương pháp :

GV : Nguyễn Ngọc Liên

Trường THPT Ngọc Hồi – Kon Tum .

SKKN : “Một số sai lầm thường gặp của học sinh khi tính tích phân ”

+ Lựa chọn các ví dụ các bài tập cụ thể phân tích tỉ mỉ những sai lầm của học sinh vận dụng hoạt động năng lực tư duy và kỹ năng vận dụng kiến thức của học sinh để từ đó đưa ra lời giải đúng của bài toán.

+Thực nghiệm sư phạm .

Phần II: nội dung

I/ cơ sở khoa học :

Dựa trên nguyên tắc quá trình nhận thức của con người đi từ: “ cái sai đến cái gần đúng rồi mới đến khái niệm đúng”, các nguyên tắc dạy học và đặc điểm quá trình nhận thức của học sinh

II/ nội dung cụ thể.

Một số sai lầm của học sinh khi tính tích phân

Bài tập minh họa:

Bài 1: Tính tích phân: $I = \int_{-2}^2 \frac{dx}{(x+1)^2}$

* Sai lầm thường gặp: $I = \int_{-2}^2 \frac{dx}{(x+1)^2} = \int_{-2}^2 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} \Big|_{-2}^2 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$

* Nguyên nhân sai lầm :

Hàm số $y = \frac{1}{(x+1)^2}$ không xác định tại $x = -1 \in [-2; 2]$ suy ra hàm số không liên tục trên $[-2; 2]$ nên không sử dụng được công thức Newton – leibnitz như cách giải trên.

* Lời giải đúng

Hàm số $y = \frac{1}{(x+1)^2}$ không xác định tại $x = -1 \in [-2; 2]$ suy ra hàm số không liên tục trên $[-2; 2]$ do đó tích phân trên không tồn tại.

* Chú ý đối với học sinh:

Khi tính $\int_a^b f(x)dx$ cần chú ý xem hàm số $y=f(x)$ có liên tục trên $[a; b]$ không? nếu có thì áp dụng phương pháp đã học để tính tích phân đã cho còn nếu không thì kết luận ngay tích phân này không tồn tại.

* Một số bài tập tương tự:

Tính các tích phân sau:

1/ $\int_0^5 \frac{dx}{(x-4)^4}$.

2/ $\int_{-2}^3 x(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dx$.

3/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$

4/ $\int_{-1}^1 \frac{x^3 \cdot e^x + x^2}{x^3} dx$

Bài 2 : Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x}$

* Sai lầm thường gặp: Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$ thì $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$; $\frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1+t^2}{(1+t)^2}$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{1 + \sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t)^2} = \int 2(t+1)^{-2} d(t+1) = -\frac{2}{t+1} + c$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x} = \left. -\frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} \right|_0^{\pi} = \left. -\frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} \right|_0^{\pi} = -\frac{2}{\tan \frac{\pi}{2} + 1} - \left(-\frac{2}{\tan 0 + 1} \right)$$

do $\tan \frac{\pi}{2}$ không xác định nên tích phân trên không tồn tại

*Nguyên nhân sai lầm:

Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$ $x \in [0; \pi]$ tại $x = \pi$ thì $\tan \frac{x}{2}$ không có nghĩa.

* Lời giải đúng:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right)} = \int_0^{\pi} \frac{d \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}{\cos^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)} = \left. \tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right|_0^{\pi} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right) = 2.$$

* Chú ý đối với học sinh:

Đối với phương pháp đổi biến số khi đặt $t = u(x)$ thì $u(x)$ phải là một hàm số liên tục và có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$.

*Một số bài tập tương tự:

Tính các tích phân sau:

$$1/ \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin x}$$

$$2/ \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos x}$$

Bài 3: Tính $I = \int_0^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx$

Trường THPT Ngọc Hồi – Kon Tum .

SKKN : “Một số sai lầm thường gặp của học sinh khi tính tích phân ”

* Sai lầm thường gặp:

$$I = \int_0^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} \, dx = \int_0^4 \sqrt{(x-3)^2} \, dx = \int_0^4 (x-3) \, dx = \frac{(x-3)^2}{2} \Big|_0^4 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4$$

* Nguyên nhân sai lầm:

Phép biến đổi $\sqrt{(x-3)^2} = x-3$ với $x \in [0;4]$ là không tương đương.

* Lời giải đúng:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} \, dx \\ &= \int_0^4 \sqrt{(x-3)^2} \, dx = \int_0^4 |x-3| \, dx = \int_0^3 -(x-3) \, dx + \int_3^4 (x-3) \, dx \\ &= -\frac{(x-3)^2}{2} \Big|_0^3 + \frac{(x-3)^2}{2} \Big|_3^4 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5 \end{aligned}$$

* Chú ý đối với học sinh:

$$\sqrt[2n]{(f(x))^{2n}} = |f(x)| \quad (n \geq 1, n \in \mathbb{N})$$

$$I = \int_a^b \sqrt[2n]{(f(x))^{2n}} \, dx = \int_a^b |f(x)| \, dx \text{ ta phải xét dấu hàm số } f(x) \text{ trên } [a; b] \text{ rồi}$$

dùng tính chất tích phân tách I thành tổng các phân không chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Một số bài tập tương tự:

$$1/ I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx ;$$

$$2/ I = \int_0^3 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} \, dx$$

$$3/ I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right)} \, dx$$

$$4/ I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - 2} \, dx$$

Bài 4: Tính $I = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

* Sai lầm thường gặp:

$$I = \int_{-1}^0 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} = \arctg(x+1) \Big|_{-1}^0 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}$$

* Nguyên nhân sai lầm :

Học sinh không học khái niệm $\arctg x$ trong sách giáo khoa hiện thời

* Lời giải đúng:

$$\text{Đặt } x+1 = \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = (1 + \operatorname{tg}^2 t) dt$$

với $x = -1$ thì $t = 0$

với $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 t) dt}{\operatorname{tg}^2 t + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

* Chú ý đối với học sinh:

Các khái niệm $\arcsin x$, $\arctg x$ không trình bày trong sách giáo khoa hiện thời; Học sinh có thể đọc thấy một số bài tập áp dụng khái niệm này trong một sách tham khảo, vì các sách này viết theo sách giáo khoa cũ (trước năm 2000). Từ năm 2000 đến nay do các khái niệm này không có trong sách giáo khoa nên học sinh không được áp dụng phương pháp này nữa. Vì vậy khi gặp

tích phân dạng $\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx$ ta dùng phương pháp đổi biến số đặt $t =$

$\operatorname{tg} x$ hoặc $t = \operatorname{cotg} x$;

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \text{ thì đặt } x = \sin t \text{ hoặc } x = \cos t$$

*Một số bài tập tương tự:

GV : Nguyễn Ngọc Liên

Trường THPT Ngọc Hồi – Kon Tum .

SKKN : “Một số sai lầm thường gặp của học sinh khi tính tích phân ”

$$1/ I = \int_4^8 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} dx$$

$$2/ I = \int_0^1 \frac{2x^3 + 2x + 3}{x^2 + 1} dx$$

$$3/ I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^8}}$$

Bài 5:

$$\text{Tính : } I = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

*Suy luận sai lầm: Đặt $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int \frac{\sin^3 t}{|\cos t|} dt$$

Đổi cận: với $x = 0$ thì $t = 0$

với $x = \frac{1}{4}$ thì $t = ?$

* Nguyên nhân sai lầm:

Khi gặp tích phân của hàm số có chứa $\sqrt{1 - x^2}$ thì thường đặt $x = \sin t$ nhưng đối với tích phân này sẽ gặp khó khăn khi đổi cận cụ thể với $x = \frac{1}{4}$ không tìm được chính xác $t = ?$

* Lời giải đúng:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow dt = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} dx \Rightarrow t dt = -x dx$$

Đổi cận: với $x = 0$ thì $t = 1$; với $x = \frac{1}{4}$ thì $t = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$$I = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$\int_1^{\frac{\sqrt{15}}{4}} \frac{(1-t^2)dt}{t} = \int_1^{\frac{\sqrt{15}}{4}} (1-t^2)dt = \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \left(\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{15\sqrt{15}}{192} \right) - \frac{2}{3} = \frac{33\sqrt{15}}{192} - \frac{2}{3}$$

* Chú ý đối với học sinh: Khi gặp tích phân của hàm số có chứa $\sqrt{1-x^2}$ thì thường đặt $x = \sin t$ hoặc gặp tích phân của hàm số có chứa $1+x^2$ thì đặt $x = \tan t$ nhưng cần chú ý đến cận của tích phân đó nếu cận là giá trị lượng giác của góc đặc biệt thì mới làm được theo phương pháp này còn nếu không thì phải nghĩ đến phương pháp khác.

* Một số bài tập tương tự:

1/ tính $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

2/ tính $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

Bài 6: tính $I = \int_{-1}^1 \frac{x^2-1}{1+x^4} dx$

* Sai lầm thường mắc: $I = \int_{-1}^1 \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2} = \int_{-1}^1 \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} dx$

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$

Đổi cận với $x = -1$ thì $t = -2$; với $x=1$ thì $t=2$;

$$I = \int_{-2}^2 \frac{dt}{t^2-2} = \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{t+\sqrt{2}} - \frac{1}{t-\sqrt{2}} \right) dt = (\ln|t+\sqrt{2}| - \ln|t-\sqrt{2}|) \Big|_{-2}^2 = \ln \left| \frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}} \right| \Big|_{-2}^2$$

Trường THPT Ngọc Hồi – Kon Tum .

SKKN : “Một số sai lầm thường gặp của học sinh khi tính tích phân ”

$$= \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} - \ln \left| \frac{-2 + \sqrt{2}}{-2 - \sqrt{2}} \right| = 2 \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

* Nguyên nhân sai lầm: $\frac{x^2 - 1}{1 + x^4} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + x^2}$ là sai vì trong $[-1; 1]$ chứa $x =$

0 nên không thể chia cả tử cả mẫu cho $x = 0$ được

* Lời giải đúng:

$$\text{xét hàm số } F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right)' = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}$$

$$\text{Do đó } I = \int_{-1}^1 \frac{x^2 - 1}{1 + x^4} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

*Chú ý đối với học sinh: Khi tính tích phân cần chia cả tử cả mẫu của hàm số cho x cần để ý rằng trong đoạn lấy tích phân phải không chứa điểm $x = 0$.

III/Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm:

1/Kết quả từ thực tiễn:

Ban đầu học sinh gặp khó khăn nhất định trong việc giải những dạng tích phân như đã nêu.Tuy nhiên giáo viên cần hướng dẫn học sinh tỉ mỉ cách phân tích một bài toán tích phân từ hàm số dưới dấu tích phân,cận của tích phân để lựa chọn phương pháp phù hợp trên cơ sở giáo viên đưa ra những sai lầm mà học sinh thường mắc phải trong quá trình suy luận,trong các bước tính tích phân này rồi từ đó hướng các em đi đến lời giải đúng.

Sau khi hướng dẫn học sinh như trên và yêu cầu học sinh giải một số bài tập tích phân trong sách giáo khoa Giải Tích Lớp 12 và một số bài trong các đề thi tuyển sinh vào đại học,cao đẳng và trung học chuyên nghiệp của các năm trước thì các em đã thận trọng trong khi tìm và trình bày lời giải và đã giải được một lượng lớn bài tập đó.

2/Kết quả thực nghiệm:

Sáng kiến được áp dụng trong năm học 2007-2008.

Bài kiểm tra trên hai đối tượng lớp 12A1(28 học sinh) không áp dụng sáng kiến và 12C4(37 học sinh) áp dụng sáng kiến như sau:

xếp giỏi khá tb yếu				
loại đối tượng				
12C1	50%	40%	10%	0%

12C4	0%	0%	40%	60%
------	----	----	-----	-----

Sau khi thực hiện sáng kiến học sinh học tập rất tích cực và hứng thú đặc biệt là khi giải bài toán tích phân các em tính tích phân rất thận trọng và hiểu bản chất của vấn đề chứ không tính rập khuôn một cách máy móc như trước, đó là việc thể hiện việc phát huy tính tích cực, chủ động, sáng tạo của học sinh.

phần III:kết luận - kiến nghị

I/ kết luận:

Nghiên cứu, phân tích một số sai lầm của học sinh khi tính tích phân có ý nghĩa rất lớn trong quá trình dạy học vì khi áp dụng sáng kiến này sẽ giúp học sinh nhìn thấy được những điểm yếu và những hiểu biết chưa thật thấu đáo của mình về vấn đề này từ đó phát huy ở học sinh tư duy độc lập, năng lực suy nghĩ tích cực chủ động củng cố trau dồi thêm kiến thức về tính tích phân từ đó làm chủ được kiến thức, đạt được kết quả cao trong quá trình học tập và các kỳ thi tuyển sinh vào các trường đại học, cao đẳng , THCN

II/ Kiến nghị:

Hiện nay nhà trường đã có một số sách tham khảo tuy nhiên chưa có một sách tham khảo nào viết về sai lầm của học sinh khi giải toán. Vì vậy nhà trường cần quan tâm hơn nữa về việc trang bị thêm sách tham khảo loại này để học sinh được tìm

Trường THPT Ngọc Hồi – Kon Tum .

SKKN : “Một số sai lầm thường gặp của học sinh khi tính tích phân ”

tôi về những sai lầm thường mắc khi giải toán để các em có thể tránh được những sai lầm đó trong khi làm bài tập .

tài liệu tham khảo

1. **Kiến thức cơ bản giải tích 12** (Phan Văn Đức- Đỗ Quang Minh – Nguyễn Thanh Sơn – Lê Văn Trường – NXB ĐH Quốc gia thành phố HCM - 2002).
2. **Phương pháp giải toán Tích phân và Giải tích tổ hợp** (Nguyễn Cam – NXB Trẻ).
3. **Phương pháp giải toán Tích phân** (Trần Đức Huyền – Trần Chí Trung – NXB Giáo Dục).
4. **Sách giáo khoa Giải tích 12** (Ngô Thúc Lanh Chủ biên – NXB GD – 2000)

Trường THPT Ngọc Hồi – Kon Tum .

SKKN : “Một số sai lầm thường gặp của học sinh khi tính tích phân ”

5. Phương pháp giải toán Tích phân (Lê Hồng Đức – Lê Bích Ngọc – NXB Hà Nội – 2005).

6. Sai lầm thường gặp và các sáng tạo khi giải toán (Trần Phương và Nguyễn Đức Tấn – NXB Hà Nội – 2004).

mục lục

trang

phần I : mở đầu

1

I. Đặt vấn đề

1

Trường THPT Ngọc Hồi – Kon Tum .

SKKN : “Một số sai lầm thường gặp của học sinh khi tính tích phân ”

II.Lí do chọn đề tài

2

III.Lịch sử vấn đề :

2

IV.Giới hạn của đề tài :

2

V. Phương pháp nghiên cứu 2

phần II : Nội dung 3

I. Cơ sở khoa học 3

II. Nội dung cụ thể 3

III. Hiệu quả của sáng kiến 10

phần III: Kết luận - kiến nghị 11

Hết .!