

DẠNG 1. TÍCH VÔ HƯỚNG

DẠNG 1. TÍCH VÔ HƯỚNG KHI BIẾT TỌA ĐỘ CỦA VECTO

- Câu 1.** Cho hai vector $u = (2; -1)$, $v = (-3; 4)$. Tích $u.v$ là
A. 11. B. -10. C. 5. D. -2.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Với } \begin{cases} u = (2; -1) \\ v = (-3; 4) \end{cases} \Rightarrow u.v = 2.(-3) + (-1).4 = -10$$

- Câu 2.** Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho $a = (2; 5)$ và $b = (-3; 1)$. Khi đó, giá trị của $a.b$ bằng
A. -5. B. 1. C. 13. D. -1.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } a.b = 2.(-3) + 5.1 = -1.$$

- Câu 3.** Cho $A(0; 3)$, $B(4; 0)$, $C(-2; -5)$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
A. 16. B. 9. C. -10. D. -9.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (4; -3), \overrightarrow{BC} = (-6; -5)$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 4.(-6) + (-3).(-5) = -9.$$

- Câu 4.** (HKI XUÂN PHƯƠNG - HN) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $u = i + 3j$ và $v = 2j - 2i$. Tính $u.v$.

A. $u.v = -4$. B. $u.v = 4$. C. $u.v = 2$. D. $u.v = -2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Theo giả thiết ta có } u = (1; 3) \text{ và } v = (-2; 2).$$

$$\text{Khi đó } u.v = 1.(-2) + 3.2 = 4.$$

- Câu 5.** Trong hệ tọa độ Oxy , cho $u = i + 3j$, $v = (2; -1)$. Tính biểu thức tọa độ của $u.v$.

A. $u.v = -1$. B. $u.v = 1$. C. $u.v = (2; -3)$. D. $u.v = 5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u = i + 3j \Rightarrow u = (1; 3)$

Vậy $u.v = 1.2 + 3.(-1) = -1$

DẠNG 2. TÍCH VÔ HƯỚNG KHI BIẾT ĐỘ DÀI CỦA VECTO

Câu 6. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$
 C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} \cdot \vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ.

Câu 7. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ là

- A. $8a^2$ B. $8a$ C. $8\sqrt{3}a^2$ D. $8\sqrt{3}a$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 4a \cdot 4a \cdot \cos 60^\circ = 4a \cdot 4a \cdot \frac{1}{2} = 8a^2$

Câu 8. (KSNLGV - THUẬN THÀNH 2 - BẮC NINH NĂM 2018 - 2019) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

- A. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$ B. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = a$ C. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{a^2}{2}$ D. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = a^2$

Lời giải

Chọn A

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB \perp CD$ do đó $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$.

Câu 9. Cho hai vectơ a và b . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos(a, b)$ B. $\overline{a \cdot b} = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2)$
 C. $|a|^2 \cdot |b|^2 = |ab|^2$ D. $\overline{a \cdot b} = \frac{1}{2}(|a + b|^2 - |a|^2 - |b|^2)$

Lời giải

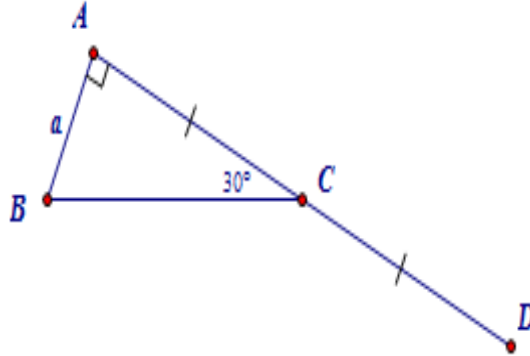
Chọn C

$|a \cdot b|^2 = [|a| \cdot |b| \cdot \cos(a, b)]^2 = |a|^2 \cdot |b|^2 \cdot \cos^2(a, b)$ nên C sai.

- Câu 10.** Cho tam giác ABC có $\hat{A}=90^\circ$, $\hat{B}=60^\circ$ và $AB=a$. Khi đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ bằng
- A. $-2a^2$. B. $2a^2$. C. $3a^2$. **D. $-3a^2$.**

Lời giải

Chọn D



Gọi D là điểm đối xứng với A qua C .

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB} = CD.CB.\cos 150^\circ = a\sqrt{3}.2a.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2$$

- Câu 11.** Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.
- A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. **D. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$.**

Lời giải

Chọn D

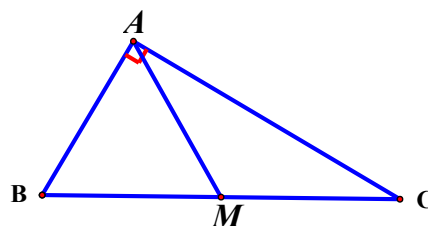
$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a.a.\cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

- Câu 12.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a$; $AC=a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM}$

A. $\frac{a^2}{2}$. B. a^2 . C. $-a^2$. **D. $-\frac{a^2}{2}$.**

Lời giải

Chọn D



Ta có tam giác ABC vuông tại A và có AM là trung tuyến nên $AM = \frac{BC}{2}$.

$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a$$

Tam giác AMB có $AB = BM = AM = a$ nên là tam giác đều. Suy ra góc $\widehat{MAB} = 60^\circ$.

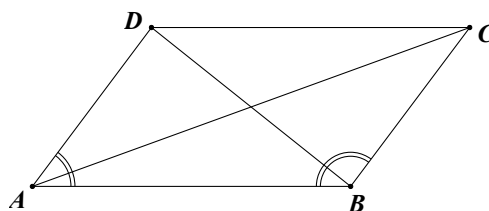
Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\widehat{AB}, \widehat{AM}) = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}$.

Câu 13. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ bằng

- A. -1 . B. 1 . C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



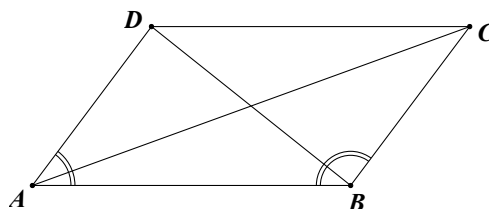
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\widehat{AB}, \widehat{AD}) = AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 1$$

Câu 14. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

- A. -1 . B. $\frac{1}{2}$. C. -1 . D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Theo giả thiết: $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 120^\circ$.

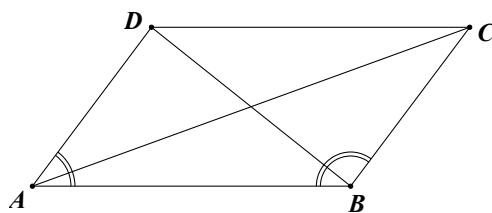
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\widehat{BA}, \widehat{BC}) = AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -1$$

Câu 15. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Độ dài đường chéo AC bằng

- A. $\sqrt{5}$. B. $\sqrt{7}$. C. 5 . D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow AC^2 = 2^2 + 1^2 + 2.1 \Rightarrow AC = \sqrt{7}.$$

Câu 16. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\angle BAD = 60^\circ$. Độ dài đường chéo BD bằng

A. $\sqrt{3}$

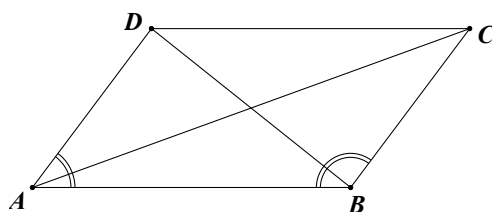
B. $\sqrt{5}$

C. 5

D. 3

Lời giải

Chọn A



$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow BD^2 = 2^2 + 1^2 + 2.(-1)$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{3}.$$

Câu 17. Cho các véc tơ a, b và c thỏa mãn các điều kiện $|a| = x$, $|b| = y$ và $|c| = z$ và $a + b + 3c = 0$. Tính $A = a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$.

A. $A = \frac{3x^2 - z^2 + y^2}{2}$

B. $A = \frac{3z^2 - x^2 - y^2}{2}$

C. $A = \frac{3y^2 - x^2 - z^2}{2}$

D. $A = \frac{3z^2 + x^2 + y^2}{2}$

Lời giải

Chọn B

$$a + b + 3c = 0 \Rightarrow a + b + c = -2c$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2A = 4c^2$$

$$\Rightarrow (a + b + c)^2 = (-2c)^2$$

Sử dụng tính chất bình phương vô hướng bằng bình phương độ dài ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2A = 4z^2 \Rightarrow A = \frac{3z^2 - x^2 - y^2}{2}. \text{ Vậy chọn đáp án } \mathbf{B}.$$

Câu 18. Cho $\triangle ABC$ đều; $AB = 6$ và M là trung điểm của BC . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$ bằng

A. - 18

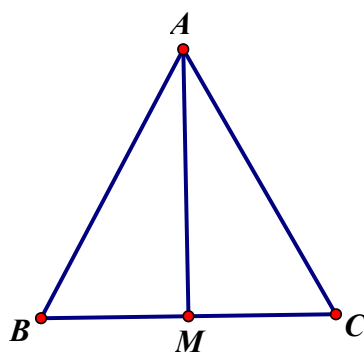
B. 27

C. 18

D. - 27

Lời giải

Chọn D



Ta có $\widehat{(AB, AM)} = \widehat{BAM} = 30^\circ$

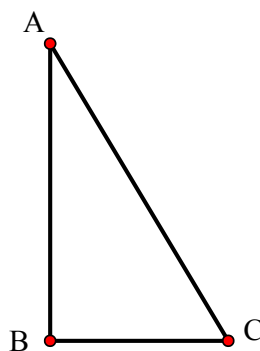
$$\vec{AB} \cdot \vec{MA} = - \vec{AB} \cdot \vec{AM} = - |\vec{AB}| \cdot |\vec{AM}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AM}) = - 6 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = - 27$$

Câu 19. Cho tam giác ABC vuông tại B , $BC = a\sqrt{3}$. Tính $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$.

- A. $3a^2$. B. $\frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $-3a^2$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\vec{AC} \cdot \vec{CB} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{CB}| \cdot \cos(\vec{AC}, \vec{CB}) = - AC \cdot CB \cdot \cos \widehat{ACB} = - AC \cdot CB \cdot \frac{CB}{AC} = - BC^2 = - 3a^2$

Câu 20. Cho hai vectơ a và b . Biết $|a| = 2$, $|b| = \sqrt{3}$ và $(a, b) = 30^\circ$. Tính $|a + b|$.

- A. $\sqrt{11}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{12}$. D. $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(\overrightarrow{a+b} \right)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2|a| \cdot |b| \cdot \cos(a, b)$,

$$\Rightarrow \left(\vec{a} + \vec{b} \right)^2 = 4 + 3 + 2.2.\sqrt{3}.\cos 30^\circ = 13 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}$$

Câu 21. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D ; $AB = AD = a, CD = 2a$. Khi đó tích vô hướng $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$ bằng

- A. $-a^2$ B. 0 C. $\frac{3a^2}{2}$ D. $\frac{-a^2}{2}$

Lời giải

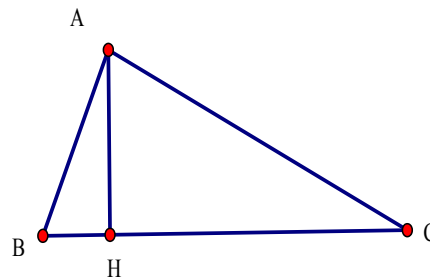
Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \vec{AC} \cdot \vec{BD} &= (\vec{AD} + \vec{DC}) \cdot (\vec{AD} - \vec{AB}) = (\vec{AD} + 2\vec{AB}) \cdot (\vec{AD} - \vec{AB}) \\ &= AD^2 - 2AB^2 - \vec{AD} \cdot \vec{AB} \\ &= AD^2 - 2AB^2 = -a^2. \end{aligned}$$

Câu 22. (THI HK1 LỚP 11 THPT VIỆT TRÌ 2018 - 2019) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a; BC = 2a$. Tính tích vô hướng $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

- A. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = a^2$ B. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{a^2}{2}$ C. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 2a^2$ D. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Lời giải



Chọn A

Vẽ $AH \perp BC, H \in BC$.

Có $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = BH \cdot BC = BA^2 = a^2$ (theo tính chất tích vô hướng và phép chiếu).

Câu 23. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4$. Kết quả $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ bằng

- A. 16 B. 0 C. $4\sqrt{2}$ D. 4

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } (\vec{BA} \cdot \vec{BC}) = |\vec{BA}| |\vec{BC}| \cos(\vec{BA} \cdot \vec{BC}) = |\vec{BA}| |\vec{BC}| \cos \angle ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{BC}$$

$$\text{Do đó } \vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos(\vec{BA} \cdot \vec{BC}) = AB \cdot BC \cdot \frac{4}{BC} = 4 \cdot 4 = 16$$

Câu 24. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\angle B = 30^\circ, AC = 2$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính giá trị của biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$.

A. $P = -2$

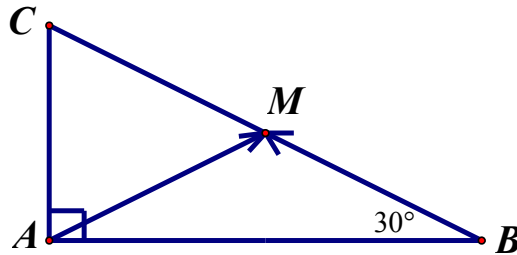
B. $P = 2\sqrt{3}$

C. $P = 2$

D. $P = -2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A



Ta có: $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM}^2$

$$BC = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 4; AB = AC \cdot \cot 30^\circ = 2\sqrt{3}; BM = 2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = 4; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 150^\circ = -6 \Rightarrow P = -2 \Rightarrow \text{Chọn A}$$

Câu 25. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2a, AD = 3a, \angle BAD = 60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$

A. $3a^2$

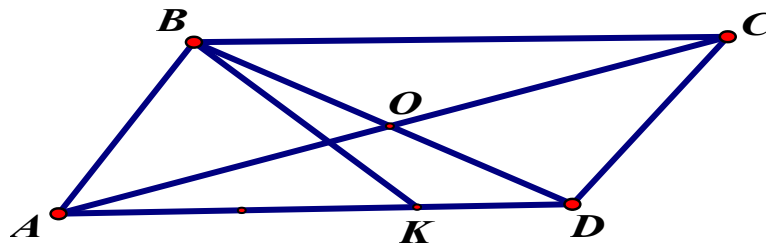
B. $6a^2$

C. 0

D. a^2

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Khi đó $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -\overrightarrow{AB}^2 + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -4a^2 + \frac{2}{3} \cdot 9a^2 - \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = a^2$$

Câu 26. Cho tam giác ABC có $AB=5, AC=8, BC=7$ thì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng:

A. -20.

B. 40.

C. 10.

D. 20.

Lời giải

Chọn D

$$\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 20$$

Câu 27. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8, AD = 5$. Tích $\vec{AB} \cdot \vec{BD}$

A. $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = 62$.

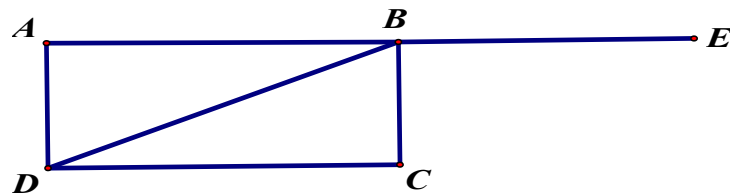
B. $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = -64$

C. $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = -62$.

D. $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = 64$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử E là điểm đối xứng với A qua B ta có $\vec{AB} = \vec{BE}$

Xét $\triangle ABD$ có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{89}$

Xét $\triangle ABD$ có $\cos \angle ABD = \frac{AB}{BD} = \frac{8}{\sqrt{89}}$ suy ra $\cos(\vec{AB}; \vec{BD}) = \cos \angle DBE = -\cos \angle ABD = -\frac{8}{\sqrt{89}}$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BD} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{BD}| \cdot \cos(\vec{AB}; \vec{BD}) = 8 \cdot \sqrt{89} \cdot \left(-\frac{8}{\sqrt{89}}\right) = -64$$

Ta có

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GÓC CỦA HAI VECTO

Câu 28. Cho hai vector a và b khác 0 . Xác định góc α giữa hai vector a và b biết $ab = -|a| \cdot |b|$.

A. $\alpha = 90^\circ$.

B. $\alpha = 0^\circ$.

C. $\alpha = 45^\circ$.

D. $\alpha = 180^\circ$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $ab = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$. Mà $ab = -|a| \cdot |b|$ nên $\cos \alpha = -1$. Suy ra, $\alpha = 180^\circ$.

Câu 29. Tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(0;4)$, $C(3;1)$. Góc $\angle BAC$ của tam giác ABC gần với giá trị nào dưới đây?

A. 90° .

B. $36^\circ 52'$.

C. $143^\circ 7'$

D. $53^\circ 7'$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{AB} = (-1; 2); \vec{AC} = (2; -1)$

$$\cos \angle BAC = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-2 - 2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-4}{5} \Rightarrow \angle BAC = 143^\circ 7'$$

Câu 30. Cho hai vectơ a, b khác vectơ-không thỏa mãn $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$. Khi đó góc giữa hai vectơ a, b bằng:

- A. $(a; b) = 45^\circ$ B. $(a; b) = 0^\circ$ **C. $(a; b) = 180^\circ$** D. $(a; b) = 90^\circ$

Lời giải

Chọn C

Ta có:
$$\begin{cases} ab = -|a| \cdot |b| \\ ab = |a| \cdot |b| \cos(a, b) \Rightarrow \cos(a, b) = -1 \Leftrightarrow (a; b) = 180^\circ \end{cases}$$

Câu 31. (CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN 1_2018-2019) Cho hai vectơ a, b thỏa mãn: $|a| = 4; |b| = 3; |a - b| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ a, b . Chọn phát biểu **đúng**.

- A. $\alpha = 60^\circ$ B. $\alpha = 30^\circ$ C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ **D. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$**

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\begin{aligned} |a - b| &= 4 \Rightarrow (a - b)^2 = 16 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 16 \\ \Rightarrow 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha + 3^2 &= 16 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Câu 32. Cho hai vectơ $a = (4; 3)$ và $b = (1; 7)$. Số đo góc α giữa hai vectơ a và b bằng

- A. 45°** B. 90° C. 60° D. 30°

Lời giải

Chọn A

Ta có
$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 7}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho $a = (2; 5)$, $b = (3; -7)$. Tính góc α giữa hai vectơ a và b .

- A. $\alpha = 60^\circ$ B. $\alpha = 120^\circ$ C. $\alpha = 45^\circ$ **D. $\alpha = 135^\circ$**

Lời giải

Chọn D

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7)}{\sqrt{4+25} \cdot \sqrt{9+49}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 135^\circ.$$

Ta có

- Câu 34.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $a = (2; 1)$ và $b = (3; -6)$. Góc giữa hai vector a và b bằng
- A. 0° . B. 90° . C. 180° . D. 60° .

Lời giải

Chọn B

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-6)}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-6)^2}} = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$$

- Câu 35.** Cho hai vector $a; b$ khác vector 0 thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vector $a; b$ là
- A. 60° . B. 120° . C. 150° . D. 30° .

Lời giải

Chọn A

Ta có $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$.

$$\text{Vậy } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$$

- Câu 36.** Cho véc tơ $a(1; -2)$. Với giá trị nào của y thì véc tơ $b(3; y)$ tạo với véc tơ a một góc 45°
- A. $y = -9$. B. $\begin{cases} y = -1 \\ y = 9 \end{cases}$. C. $\begin{cases} y = 1 \\ y = -9 \end{cases}$. D. $y = -1$.

Lời giải

Chọn D

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 - 2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9 + y^2}}$$

Ta có:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3 - 2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9 + y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

Góc giữa hai véc tơ a và b bằng 45° suy ra

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{90 + 10y^2} = 6 - 4y \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 4y \geq 0 \\ 90 + 10y^2 = (6 - 4y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{3}{2} \\ y^2 - 8y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -1$$

Câu 37. Cho hai vectơ a, b sao cho $|a| = \sqrt{2}, |b| = 2$ và hai vectơ $x = a + b, y = 2a - b$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ a và b .

A. 120° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C

Vì hai vectơ $x = a + b, y = 2a - b$ vuông góc với nhau nên

$$(a + b) \cdot (2a - b) = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - b^2 + a \cdot b = 0 \Leftrightarrow 2|a|^2 - |b|^2 + |a| \cdot |b| \cdot \cos(a, b) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - 2^2 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(a, b) = 0 \Leftrightarrow \cos(a, b) = 0 \Leftrightarrow (a, b) = 90^\circ$$

DẠNG 3. ỨNG DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG CHỨNG MINH VUÔNG GÓC

Câu 38. Tìm x để hai vectơ $a = (x; 2)$ và $b = (2; -3)$ có giá vuông góc với nhau.

A. 3.

B. 0.

C. -3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Vectơ $a = (x; 2)$ và $b = (2; -3)$ có giá vuông góc với nhau $\Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Vậy $x = 3$.

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $u = (3; 4)$ và $v = (-8; 6)$. Khẳng định nào đúng?

A. $u = -v$.

B. u vuông góc với v .

C. $|u| = |v|$.

D. u và v cùng phương.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u \cdot v = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 = 0$. Do đó, $u \perp v$.

Câu 40. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1; 2), B(-3; 1)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy sao cho tam giác ABC vuông tại A .

A. $C(6; 0)$

B. $C(0; 6)$.

C. $C(-6; 0)$

D. $C(0; -6)$

Lời giải

Chọn B

$C \in Oy \Leftrightarrow C(0; y)$

$$\vec{AB} = (-4; -1) \quad \vec{AC} = (-1; y-2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AB} \neq \vec{0} \\ \vec{AC} \neq \vec{0} \\ \vec{AB} \perp \vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$$

Ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác vuông tại A
 $\Leftrightarrow y = 6$.

Vậy $C(0; 6)$.

Câu 41. Cho tam giác ABC có $A(-1; 2), B(0; 3), C(5; -2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC .

A. $(0; 3)$

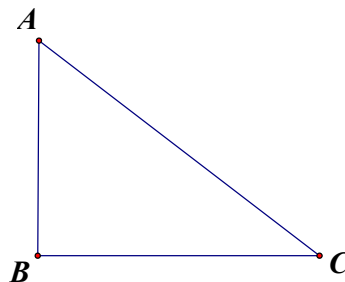
B. $(0; -3)$

C. $(3; 0)$

D. $(-3; 0)$

Lời giải

Chọn A



a có $\vec{AB} = (1; 1); \vec{AC} = (6; -4); \vec{BC} = (5; -5)$.

T

Nhận thấy rằng $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-5) = 0$ nên tam giác ABC vuông tại B .

Vậy chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC trùng với đỉnh $B(0; 3)$.

Câu 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai vector $u = (1; 2)$ và $v = (4m; 2m - 2)$. Tìm m để vector u vuông góc với v .

A. $m = \frac{1}{2}$

B. $m = -\frac{1}{2}$

C. $m = 1$

D. $m = -1$

Lời giải

Chọn A

$$u \perp v \Leftrightarrow u.v = 0 \Leftrightarrow 4m + 2.(2m - 2) = 0 \Leftrightarrow 8m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Hai vector

Câu 42. Cho tam giác ABC có $A(-1;0), B(4;0), C(0;m), m \neq 0$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Xác định m để tam giác GAB vuông tại G .

- A. $m = -\sqrt{6}$ B. $m = \pm\sqrt{6}$ C. $m = 3\sqrt{6}$ D. $m = \pm\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , suy ra $G\left(1; \frac{m}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{GA} = \left(-2; -\frac{m}{3}\right); \overrightarrow{GB} = \left(3; -\frac{m}{3}\right)$.

Để tam giác GAB vuông tại G thì $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{m^2}{9} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3\sqrt{6}$.

Câu 43. Cho tam giác ABC có $A(1;-1), B(3;-3), C(6;0)$. Diện tích $DABC$ là

- A. 6. B. $6\sqrt{2}$. C. 12. D. 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -2), \overrightarrow{BC} = (3; 3)$,

Ta thấy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ nên tam giác ABC vuông tại B .

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6$

Câu 44. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $B(-1;3)$ và $C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

- A. $A(0;0)$ hoặc $A(2;-4)$ B. $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$
C. $A(0;0)$ hoặc $A(-2;-4)$ D. $A(0;0)$ hoặc $A(-2;4)$.

Lời giải

Chọn B

Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

Gọi $A(x;y)$. Tam giác ABC vuông cân tại $A \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1-x)^2 + (3-y)^2 = (3-x)^2 + (1-y)^2 \\ (-1-x)(3-x) + (3-y)(1-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 2, y = 4 \end{cases}$$

Vậy $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.

Câu 45. Tìm bán kính đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4), B(3;4), C(3;0)$.

A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

C. 5

D. 3

Lời giải

Chọn A

Tính được $AB=3, BC=4$ và $AC=5$. Suy ra $AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại

B . Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}$.

Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho tam giác ABC có $A(1;0), B(-1;1), C(5;-1)$. Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là

A. $H(-1; -9)$

B. $H(-8; -27)$

C. $H(-2; 5)$

D. $H(3; 14)$

Lời giải

Chọn B

Gọi $H(x; y)$ là trực tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \quad (1)$

Ta có:

$\overrightarrow{AH} = (x-1; y), \overrightarrow{BC} = (6; -2), \overrightarrow{BH} = (x+1; y-1), \overrightarrow{AC} = (4; -1)$

Suy ra: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x-1) - 2y = 0 \\ 4(x+1) - 1(y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 6 \\ 4x - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = -27 \end{cases}$

Vậy $H(-8; -27)$.

Câu 47. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy ; cho tam giác ABC có $A(-1;1), B(1;3)$ và trọng tâm là $G(-2; \frac{2}{3})$. Tìm tọa độ điểm M trên tia Oy sao cho tam giác MBC vuông tại M .

A. $M(0; -3)$

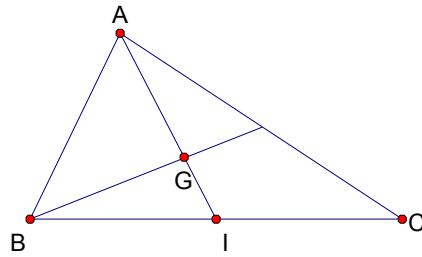
B. $M(0; 3)$

C. $M(0; 4)$

D. $M(0; -4)$

Lời giải

Chọn A



Ta có G là trọng tâm ΔABC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3(-2) - (-1) - 1 = -6 \\ y_C = 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 - 3 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(-6; -2)$$

Ta có $M \in Oy \Rightarrow M(0; m)$

Gọi I là trung điểm của đoạn BC ta có:

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_I = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = -\frac{5}{2} \\ y_I = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Ta có

$$\overrightarrow{BM} = (-1; m-3), \overrightarrow{CM} = (6; m+2), \overrightarrow{CB} = (7; 5), \overrightarrow{IM} = \left(\frac{5}{2}; m - \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \\ \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)(m+2) - 6 = 0 \\ 5\left(m - \frac{1}{2}\right) + 7 \cdot \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$$

ΔMBC vuông cân tại M khi:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 12 = 0 \\ m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3 \Rightarrow M(0; -3)$$

Câu 48. Trên hệ trục tọa độ xOy , cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$, $C(-3;-8)$. Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC là

- A. $(1; -4)$ B. $(-1; 4)$ **C. $(1; 4)$** D. $(4; 1)$

Lời giải

Chọn C

Gọi $D(x; y)$ là chân đường cao kẻ từ A xuống cạnh BC ta có $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ và D, B, C thẳng hàng

Mà $\overrightarrow{AD} = (x-4; y-3)$, $\overrightarrow{BC} = (-5; -15)$, $\overrightarrow{BD} = (x-2; y-7)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} x-4+3(y-3)=0 \\ 3(x-2)-y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$$

Câu 49. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$. Tìm x để AM vuông góc với NP .

A. $x = \frac{5a}{12}$

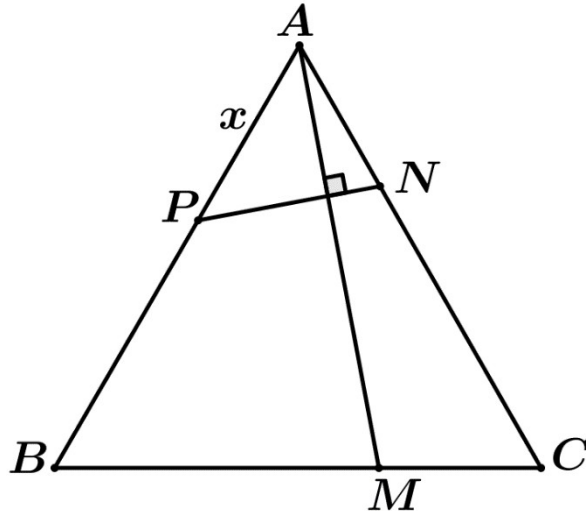
B. $x = \frac{a}{2}$

C. $x = \frac{4a}{5}$

D. $x = \frac{7a}{12}$

Lời giải

Chọn A



Đặt $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \vec{b} \\ \overrightarrow{AC} = \vec{c} \end{cases}$, ta có $|\vec{b}| = |\vec{c}| = a$ và $\vec{b} \cdot \vec{c} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{2}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c})$

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{x}{a}\overrightarrow{AB} = -\frac{x}{a}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3a}(-3xb + ac)$

Theo yêu cầu bài toán ta có $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{PN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow (\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot (-3xb + ac) = 0$

$\Leftrightarrow -3xb^2 + a(b \cdot c) - 6x(b \cdot c) + 2ac^2 = 0 \Leftrightarrow -3xa^2 + \frac{a^3}{2} - 3xa^2 + 2a^3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{5a}{12}$

Câu 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC . Biết $A(3; -1), B(-1; 2)$ và $I(1; -1)$ là trọng tâm tam giác ABC . Trực tâm H của tam giác ABC có tọa độ $(a; b)$. Tính $a + 3b$.

A. $a + 3b = \frac{2}{3}$

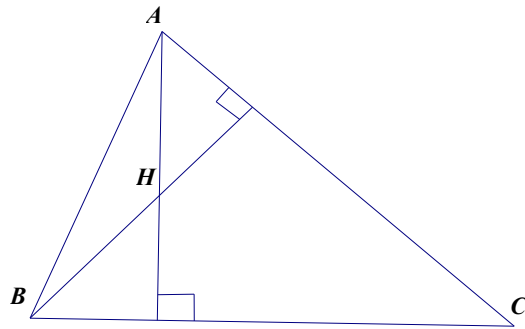
B. $a + 3b = -\frac{4}{3}$

C. $a + 3b = 1$

D. $a + 3b = -2$

Lời giải

Chọn A



Giả sử $C(x_C; y_C)$ và $H(x_H; y_H)$. Có I là trọng tâm tam giác ABC nên ta có

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = x_I \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = y_I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -4 \end{cases} \Rightarrow C(1; -4)$$

Ta có $\overrightarrow{AH} = (x_H - 3; y_H + 1); \overrightarrow{BC} = (2; -6)$

$\overrightarrow{BH} = (x_H + 1; y_H - 2); \overrightarrow{AC} = (-2; -3)$

H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_H - 3) - 6(y_H + 1) = 0 \\ -2(x_H + 1) - 3(y_H - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{10}{3} \\ y_H = -\frac{8}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{10}{3}; b = -\frac{8}{9} \Rightarrow S = \frac{2}{3}.$$

Câu 51. Cho hình thang vuông ABCD có đường cao $AB = 2a$, các cạnh đáy $AD = a$ và $BC = 3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM \perp CD$

A. $\frac{4}{9}$.

B. $\frac{3}{7}$.

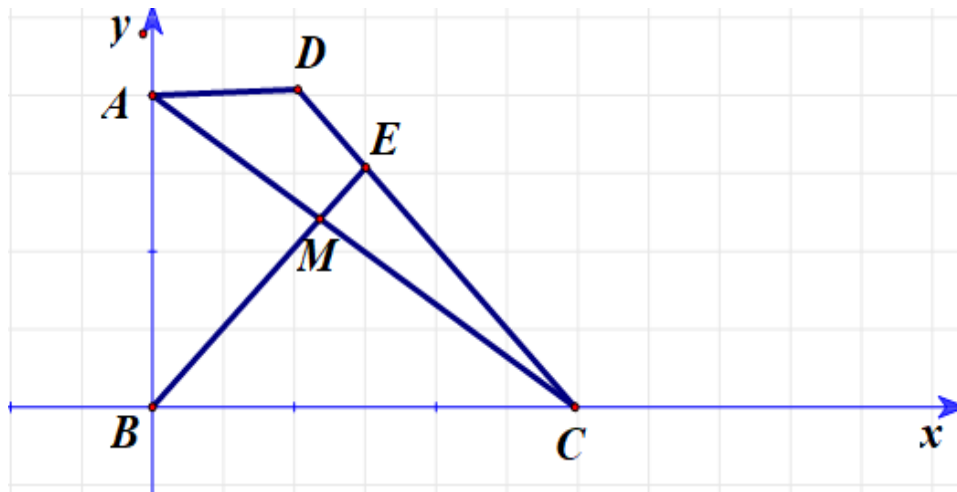
C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho gốc tọa độ trùng với điểm B, điểm A thuộc trục Oy và điểm C thuộc trục Ox.



Theo bài ra ta có $B(0;0)$, $A(0;2)$, $C(3;0)$, $D(1;2)$

Khi đó $\vec{AC} = (3; -2)$. Phương trình tham số của đường thẳng AC là $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$

Gọi $M \in AC \Rightarrow M(3t; 2 - 2t)$. Ta có $\vec{BM} = (3t; 2 - 2t)$ và $\vec{DC} = (2; -2)$.

Để $BM \perp DC$ thì $\vec{BM} \cdot \vec{DC} = 0 \Leftrightarrow 6t - 4 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} \Rightarrow M\left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

Khi đó $\vec{AM} = \left(\frac{6}{5}; -\frac{4}{5}\right) \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{52}}{5}$ và $\vec{AC} = (3; -2) \Rightarrow AC = \sqrt{13}$.

Vì $\vec{AM} = k\vec{AC}$ và $\vec{AM}, \vec{AC}$ cùng chiều $\Rightarrow k = \frac{AM}{AC} = \frac{\sqrt{52}}{5\sqrt{13}} = \frac{2}{5}$.

- Câu 52.** (THPT Phan Bội Châu - KTHK 1-17-18) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm tam giác đã cho. Tính $a + 6b$.
- A. $a + 6b = 5$. B. $a + 6b = 6$. C. $a + 6b = 7$. D. $a + 6b = 8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{AH} = (a+3; b)$, $\vec{BC} = (-1; 6)$, $\vec{BH} = (a-3; b)$, $\vec{AC} = (5; 6)$.

Vì H là trực tâm $\triangle ABC$ nên $\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 6b = 3 \\ 5a + 6b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{6} \end{cases}$
 $\Rightarrow a + 6b = 7$.

- Câu 53.** Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\vec{CM} \cdot \vec{CB} = \vec{CM}^2$ là:
- A. Đường tròn đường kính BC . B. Đường tròn $(B; BC)$.
 C. Đường tròn $(C; CB)$. D. Một đường khác.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BC .

Câu 54. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là :

- A. Đường tròn đường kính AB .
- B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
- C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
- D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

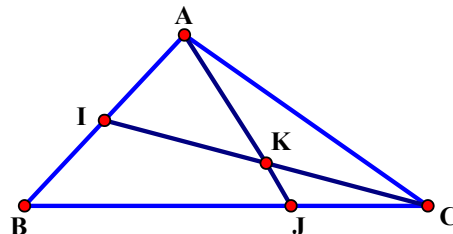
Câu 55. Cho tam giác ABC , điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB , điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$.

Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.

- A. Đường tròn đường kính IJ .
- B. Đường tròn đường kính IK .
- C. Đường tròn đường kính JK .
- D. Đường trung trực đoạn JK .

Lời giải



Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = 4\overrightarrow{MK}$.

Lấy điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$. Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{4} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$, mà $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$ nên $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lại có $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Suy ra J là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng BC xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Ta có $\overrightarrow{3MK} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{3MK} + \overrightarrow{3KJ} = \overrightarrow{3MJ}$.

Như vậy $(\overrightarrow{3MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{3MJ}) \cdot (\overrightarrow{4MK}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$.

Từ đó suy ra điểm M thuộc đường tròn đường kính JK .

Vì J, K là các điểm cố định nên điểm M luôn thuộc một đường tròn đường kính JK là đường tròn cố định (đpcm).

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI VÉCTƠ

Câu 56. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , cho $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$. Tính $|\overrightarrow{AB}|$?

- A. $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{10}$ B. $|\overrightarrow{AB}| = 20$ C. $AB = 4\sqrt{10}$ D. $\overrightarrow{AB} = 2\sqrt{10}$

Lời giải

Chọn A

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Câu 57. Cho hai điểm $A(1; 0)$ và $B(-3; 3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

- A. $AB = \sqrt{13}$ B. $AB = 3\sqrt{2}$ C. $AB = 4$ D. $AB = 5$

Lời giải

Chọn D

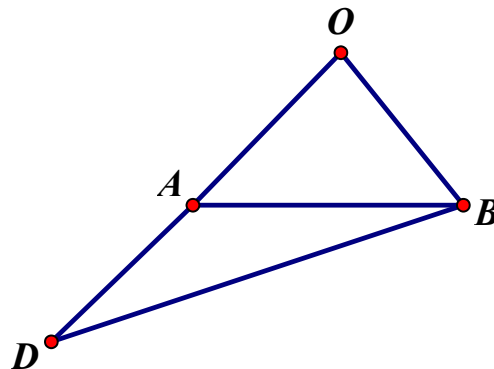
$$AB = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (3 - 0)^2} = 5$$

Câu 58. Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = 4$. Tính $|\overrightarrow{2OA} - \overrightarrow{OB}|$.

- A. $|\overrightarrow{2OA} - \overrightarrow{OB}| = 4$ B. $|\overrightarrow{2OA} - \overrightarrow{OB}| = 2$
C. $|\overrightarrow{2OA} - \overrightarrow{OB}| = 12$ D. $|\overrightarrow{2OA} - \overrightarrow{OB}| = 4\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn D



Gọi D là điểm đối xứng của O qua A .

$$|\vec{2OA} - \vec{OB}| = |\vec{OD} - \vec{OB}| = |\vec{BD}| = BD = \sqrt{OB^2 + OD^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

Câu 59. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A, D ; $AB \parallel CD$; $AB = 2a$; $AD = DC = a$. O là trung điểm của AD . Độ dài vector tổng $\vec{OB} + \vec{OC}$ bằng

A. $\frac{a}{2}$.

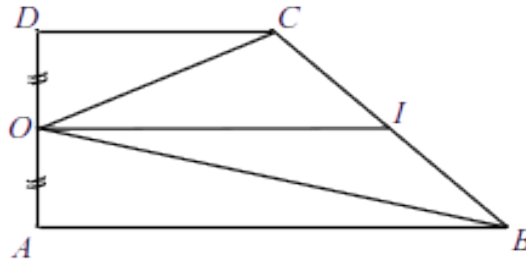
B. $\frac{3a}{2}$.

C. a .

D. $3a$

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow \vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OI} \Rightarrow |\vec{OB} + \vec{OC}| = 2OI$.

Xét hình thang $ABCD$ có OI là đường trung bình $\Rightarrow OI = \frac{AB + CD}{2} = \frac{3a}{2}$.

Vậy $|\vec{OB} + \vec{OC}| = 3a$.

Câu 60. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1; 2)$; $B(-1; 1)$. Điểm M thuộc trục Oy thỏa mãn tam giác MAB cân tại M . Khi đó độ dài đoạn OM bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điểm M thuộc trục $Oy \Rightarrow M(0; y)$.

Ta có tam giác MAB cân tại $M \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + (2 - y)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1 - y)^2}$
 $\Leftrightarrow 4 - 4y = 1 - 2y \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$ $OM = \frac{3}{2}$.
 Vậy .

Câu 61. Cho ABC đều cạnh $2a$ với M là trung điểm BC . Khẳng định nào đúng?

A. $\vec{MB} = \vec{MC}$.

B. $|\vec{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\vec{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $|\vec{AM}| = a\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn D

Độ dài đường cao AM trong tam giác đều cạnh $2a$ là: $\frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Vậy khẳng định đúng là $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$.

Câu 62. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB = 2a$; $CD = 6a$ thì $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = ?$

A. $-4a$.

B. $8a$.

C. $2a$.

D. $4a$.

Lời giải

Chọn D

Hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng nhau nên $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = CD - AB = 4a$.

Câu 63. Cho tam giác vuông cân ABC với $AB = AC = a$. Khi đó $|\overrightarrow{2AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng

A. $a\sqrt{3}$.

B. $a\sqrt{5}$.

C. $5a$.

D. $2a$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|\overrightarrow{2AB} + \overrightarrow{AC}|^2 = (\overrightarrow{2AB})^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = 4AB^2 + AC^2$ (vì $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$)
 $= 4a^2 + a^2 = 5a^2 \Rightarrow |\overrightarrow{2AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{5}$.

Câu 64. Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(2;1)$, $B(2;-1)$, $C(-2;-3)$, $D(-2;-1)$. Xét ba mệnh đề:

(I) $ABCD$ là hình thoi.

(II) $ABCD$ là hình bình hành.

(III) AC cắt BD tại $M(0;-1)$.

Chọn khẳng định đúng

A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng.

C. Chỉ (II) và (III) đúng.

D. Cả ba đều đúng.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0;-2)$; $\overrightarrow{DC} = (0;-2)$; $\overrightarrow{AC} = (-4;-4)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Nên $ABCD$ là hình bình hành. Vậy mệnh đề (II) đúng.

Suy ra AC cắt BD tại trung điểm mỗi đường và điểm đó có tọa độ $M = (0; -1)$, suy ra (III) đúng.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; -2)$, suy ra $AB = |-2| = 2$; $\overrightarrow{AD} = (-4; -2)$, suy ra $AD = \sqrt{20}$, nên $AB \neq AD$, suy ra $ABCD$ không là hình thoi. Mệnh đề (I) sai.

Câu 65. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ΔABC có $A(-1; 4)$, $B(2; 5)$, $C(-2; 7)$. Hỏi tọa độ điểm I tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là cặp số nào?

- A. $(-2; 6)$ B. $(0; 6)$ C. $(0; 12)$ D. $(2; 6)$

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (3; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1; 3) \Rightarrow AC = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{BC} = (-4; 2) \Rightarrow BC = \sqrt{20}$$

Nhận thấy $AB^2 + AC^2 = BC^2$ và $AB = AC$ nên ΔABC là tam giác vuông cân tại A , suy ra tâm I là trung điểm cạnh huyền BC . Vậy $I(0; 6)$.

Câu 66. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $A(1; -17)$, $B(-11; -25)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc tia BA sao cho $BC = \sqrt{13}$.

- A. $C(-14; -27)$ B. $C(-8; -23)$
C. $C(-14; -27)$ và $C(-8; -23)$ D. $C(14; 27)$ và $C(8; 23)$

Lời giải

Chọn B

Giả sử $C(x_c; y_c)$. Theo bài ra ta có C thuộc tia BA nên $\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}$ cùng hướng.

Với $\overrightarrow{BC} = (x_c + 11; y_c + 25)$; $\overrightarrow{BA} = (12; 8)$ ta có: $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BA}$ ($k > 0$) $\Leftrightarrow \frac{x_c + 11}{12} = \frac{y_c + 25}{8} = k$

$$\Leftrightarrow 8x_c - 12y_c - 212 = 0 \Leftrightarrow y_c = \frac{8x_c - 212}{12} \Leftrightarrow y_c = \frac{2x_c - 53}{3} \quad (1)$$

$$+) BC = \sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{(x_c + 11)^2 + (y_c + 25)^2} = \sqrt{13} \Leftrightarrow (x_c + 11)^2 + (y_c + 25)^2 = 13 \quad (2)$$

Thế (1) vào (2) ta được:

$$(x_c + 11)^2 + \left(\frac{2x_c - 53}{3} + 25 \right)^2 = 13 \Leftrightarrow (x_c + 11)^2 + \left(\frac{2x_c + 22}{3} \right)^2 = 13 \Leftrightarrow \frac{13}{9}(x_c + 11)^2 = 13$$

$$\Leftrightarrow (x_c + 11)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_c = -14 \\ x_c = -8 \end{cases}$$

Với $x_c = -14$ thế vào (1) ta được: $y_c = \frac{2 \cdot (-14) - 53}{3} = -27$.

Khi đó $k = \frac{-14+11}{12} = \frac{-3}{12} = \frac{-1}{4} < 0$ (loại).

Với $x_c = -8$ thế vào (1) ta được: $y_c = \frac{2 \cdot (-8) - 53}{3} = -23$.

Khi đó $k = \frac{-8+11}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} > 0$ (thỏa mãn).

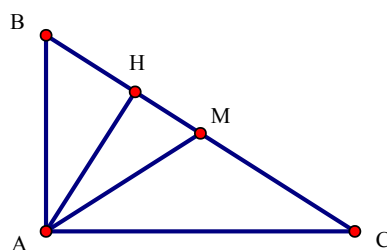
Vậy $C(-8; -23)$.

Câu 67. (THPT NÔNG CÔNG - THANH HÓA LẦN 1_2018-2019) Cho tam giác ABC vuông tại

A , $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của BC và có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. Tính cạnh AB, AC .

- A.** $AB = a, AC = a\sqrt{2}$ **B.** $AB = a, AC = a$
C. $AB = a\sqrt{2}, AC = a$ **D.** $AB = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{2}$

Lời giải



Chọn A

Vẽ $AH \perp BC, H \in BC$.

Có $\overline{HM}$ là hình chiếu của $\overline{AM}$ lên BC .

Suy ra $\overline{AM} \cdot \overline{BC} = \overline{HM} \cdot \overline{BC}$, mà $\overline{AM} \cdot \overline{BC} = \frac{a^2}{2}$, $BC = a\sqrt{3}$.

Suy ra $\overline{HM}$ cùng chiều $\overline{BC}$ và $\overline{HM} \cdot \overline{BC} = \frac{a^2}{2}$, $HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$$\text{Có } BH = BM - HM = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Có } AB^2 = BH \cdot BC = a^2 \Rightarrow AB = a \text{ và } AC = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } AB = a \text{ và } AC = a\sqrt{2}.$$

Câu 68. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(3;1)$. Giả sử $A(a;0)$ và $B(0;b)$ (với a, b là các số thực không âm) là hai điểm sao cho tam giác MAB vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b^2$.

A. $T = 10$

B. $T = 9$

C. $T = 5$

D. $T = 17$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{MA} = (a - 3; -1)$, $\overrightarrow{MB} = (-3; b - 1)$. MAB là tam giác vuông tại M khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow -3(a - 3) - (b - 1) = 0 \Leftrightarrow b = 10 - 3a \quad (*)$$

Với $a \geq 0, b \geq 0$ suy ra $0 \leq a \leq \frac{10}{3} \quad (**)$

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2} \sqrt{(a - 3)^2 + 1} \cdot \sqrt{9 + (b - 1)^2} = \frac{3}{2} (a^2 - 6a + 10) = \frac{3}{2} (a - 3)^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

Do đó $\min S_{MAB} = \frac{3}{2}$ đạt được khi $a = 3$ (thỏa mãn điều kiện $(**)$), khi đó $b = 1$.

Vậy $T = a^2 + b^2 = 10$.