c) Vì H là trực tâm của $△MAC$ nên $AH⊥MC$ tại $E,CH⊥MA$ tại F . Theo tính chất tiếp tuyến ta có $OA⊥AM,OC⊥CM$ nên $AH//OC$ và $OA//CH$. Do đó AHCO là hình bình hành. Từ đó suy ra $AH=OC=R$ không đổi, mà A cố định. Vậy H luôn thuộc đường tròn $(A;R)$.

Bài 6. (h.19)

a) Ta có $\hat{ACB}=\hat{ADB}=90^{∘}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó $\hat{MCH}=\hat{MDH}=90^{∘}$. Suy ra $△CMH$ vuông tại $C$ và $△DMH$ vuông tại $D$ nên bốn điểm $M,C$, $H,D$ thuộc đường tròn đường kính MH hay MCHD là tứ giác nội tiếp.

b) Vi $AD⊥MB,BC⊥MA$ nên H là trực tâm của $△MAB$ nên $MH⊥AB$ tại E . Do đó $\hat{ABC}=\hat{AME}$ (cùng phụ với $\hat{CAB}$ ).

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 19

Xét $△CMH$ và $△CBA$ có $\hat{MCH}=\hat{BCA}=90^{∘},\hat{ABC}=\hat{CMH}$.

Do đó $△CMH∝△CBA(g.g)$, suy ra $\frac{CM}{CB}=\frac{CH}{CA}$ hay $CM⋅CA=CH⋅CB$.

c) Vi $△EMA$ vuông tại E nên $\hat{EMA}+\hat{EAM}=90^{∘}$.

Vi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCHD nên K là trung điểm của MH . Có $CK=KM=\frac{1}{2}MH$ nên $△KCM$ cân tại K . Suy ra $\hat{KCM}=\hat{KMC}$. Xét $△OCA$ có $OA=OC=\overset{R}{ }$ nên $△OCA$ cân tại O , suy ra $\hat{OAC}=\hat{OCA}$. Do đó $\hat{OCA}+\hat{KCM}=\hat{OAC}+\hat{KMC}$.

Từ (1) và (2) suy ra $\hat{OCA}+\hat{KCM}=90^{∘}$, mà $A,C,M$ thẳng hàng nên OCK $=180^{∘}-90^{∘}=90^{∘}$. Suy ra OC $⊥$ KC.

Bài 7. (h.20)

a) Ta có $\hat{BDK}=90^{∘},\hat{CEK}=90^{∘}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó $\hat{ADK}=\hat{AEK}=90^{∘}$. Suy ra $△DAK$ vuông tại $D$ và $△EAK$ vuông tại E . Do đó bốn điểm $A,D,K,E$ thuộc đường tròn đường kính AK hay ADKE là tứ giác nội tiếp.

![](data:application/octet-stream;base64...)

b) Vì hai đường tròn tiếp xúc ngoài tại K nên $O,K,O$ ' thẳng hàng.

Có $AK⊥BC$ tại K (tính chất tiếp tuyến) nên $\hat{KCE}=\hat{AKE}$ (cùng phụ với $\hat{CKE}$ ). Mà ADKE là tứ giác nội tiếp nên $\hat{ADE}=\hat{AKE}$ (cùng chắn $\hat{AE}$ ). Lại có $\hat{ADE}=\hat{QDB}$ (đối đỉnh), suy ra $\hat{ECK}=\hat{QDB}$. Xét $△QDB$ và $△QCE$ có $\hat{BQD}$ chung, $\hat{ECQ}=\hat{QDB}$ nên $ΔQDB⊂△QCE$ (g.g), suy ra $\frac{QD}{QC}=\frac{QB}{QE}$ hay $QD⋅QE=QB⋅QC$.

c) Tứ giác BDMK nội tiếp đường tròn $(O)$ nên $\hat{MKB}=\hat{BDQ}$ mà $\hat{BDQ}=\hat{ECK}$ nên $\hat{ECK}=\hat{MKB}$, hai góc này ở vị trí đông vị nên $KM//AC$.

Tương tự có tứ giác CKNE nội tiếp đường tròn $\left(O^{'}\right)$ nên $\hat{NKC}=\hat{AED}$. Do $△QDB∝△QCE$ nên $\hat{QBD}=\hat{QEC}$, do đó $\hat{DBK}=\hat{AED}$ nên $\hat{NKC}=\hat{DBK}$. Suy ra $KN//AB$. Lại có $\hat{BMK}=90^{∘},\hat{CNK}=90^{∘}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Nên $BM⊥KM,CN⊥KN$ suy ra $BM⊥AC,CN⊥AB$. Lại có $AK⊥BC$ (chứng minh trên). Suy ra $AK,BM,CN$ đổng quy tại một điểm (tính chất ba đường cao của tam giác). Do đó $A,H,K$ thẳng hàng.

Bài 8. (h.21)

a) Theo giả thiết $△DAB$ vuông tại D và $△EAB$ vuông tại E nên tứ giác ABDE nội tiếp đường tròn đường kính $AB;△DAC$ vuông tại D và $△FAC$ vuông tại F nên tứ giác ACFD nội tiếp đường tròn đường kính AC .

b) Vì tứ giác ACFD nội tiếp nên $\hat{CDF}=\hat{CAF}$ (cùng chắn $\overparen{CF}$ ). Mà $\hat{CBK}=\hat{CAK}$ (cùng chắn $\hat{CK}$ ) nên $\hat{CDF}=\hat{CBK}$ (hai góc đồng vị), do đó

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 21 DF//BK.

c) Tứ giác ABDE nội tiếp nên $\hat{BAE}=\hat{EDC}$ (cùng bù với $\hat{BDE}$ ). Mà $\hat{BAK}=\hat{BCK}$ (cùng chắn $\overparen{BK}$ ) nên $\hat{EDC}=\hat{BCK}$, suy raCK//DE. Mà $\hat{ACK}=90^{∘}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó $DE⊥AC$. Gọi I là trung điểm $BC,M$ là trung điểm AB thì MI là đường trung bình của $△ABC$, suy ra $MI//AC$. Do đó $MI⊥DE$. Mặt khác $△DAB$ vuông tại $D,△EAB$ vuông tại E nên $DM=EM=\frac{1}{2}AB$, do đó $△MDE$ cân tại M suy ra MI là trung trực của DE nên $ID=IE$. Gọi N là trung điểm AC , chứng minh tương tự được IN là trung trực của DF suy ra $ID=IF$. Vậy $ID=IE=IF$ nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp $△DEF$. Do BC cố định nên I cố định.

Bài 9. (h.22)

a) Vì M thuộc đường tròn đường kính AB nên $\hat{AMB}=90^{∘},N$ thuộc đường tròn đường kính AC nên $\hat{ANC}=90^{∘}$. Do đó $BM//NC$, suy ra $BMNC$ là hình thang.

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 22

b) Vì $△MAB$ vuông tại M nên $\hat{MAB}+\hat{ABM}=90^{∘}$ mà $\hat{BAC}=90^{∘}$ nên $\hat{MAB}+\hat{NAC}=90^{∘}$. Do đó $\hat{ABM}=\hat{NAC}$, lại có $\hat{AMB}=\hat{CNA}=90^{∘}$ nên $△MAB⊂△NCA(g.g)$. Do đó $\frac{AM}{CN}=\frac{MB}{NA}$ hay $AM⋅AN=MB⋅NC$.

c) Vì $△MAB∝△NCA$ nên $\frac{S\_{MAB}}{S\_{NCA}}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^{2}$, suy ra $S\_{MAB}=k^{2}⋅ S\_{NCA}$ (với $k=\frac{AB}{AC}$

không đôii). $S\_{BMNC}=S\_{ABC}+S\_{MAB}+S\_{NAC}=S\_{ABC}+\left(k^{2}+1\right)⋅S\_{NAC}$. Mà $S\_{ABC}$ không đổi nên $S\_{BMNC}$ lớn nhất khi $S\_{NAC}$ lớn nhất. Kẻ $NH⊥AC$, vì AC không đổi nên $S\_{NAC}$ lớn nhất khi NH lớn nhất. Mà $NH\leq NK$ nên dấu "=" xảy ra khi $H≡K$. Do đó $S\_{BMNC}$ lớn nhất khi H trùng K . Khi đó $△NAC$ vuông cân tại N nên $\hat{NAC}=45^{∘}$ suy ra $\hat{MAB}=45^{∘}$. Vị trí cần tìm của M là $MI⊥AB$.

Bài 10. (h.23)

a) Theo giả thiết $△EPB$ vuông tại E mà $\hat{APB}=\frac{1}{2}\hat{AOB}=45^{∘}$ nên $△EPB$ vuông cân tại E , suy ra $\hat{MBP}=45^{∘}$. Tương tự $△FMB$ vuông tại F có $\hat{AMB}=\frac{1}{2}\hat{AOB}=45^{∘}$ nên $△FMB$ vuông cân tại F suy ra $\hat{MBQ}=45^{∘}$.

Do đó $\hat{MBP}+\hat{MBQ}=90^{∘}$ hay $\hat{PBQ}=90^{∘}$.

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 23

Mà $\hat{PBQ}=\frac{1}{2}\hat{POQ}$ (tính chất góc nội tiếp), suy ra $\hat{POQ}=180^{∘}$ hay ba điểm $P,O,Q$ thẳng hàng.

b) Ta có $\hat{PAQ}=\hat{PBQ}=90^{∘}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), mà $\hat{APB}=45^{∘}$ nên $△APS$ vuông cân tại A , do đó $SA=AP$ (1). Có $\hat{AQB}=\frac{1}{2}\hat{AOB}=45^{∘}$ nên $△AQH$ vuông cân tại A nên $AQ=AH$ (2). Lại có $\hat{SAH}=\hat{PAQ}=90^{∘}$ (3). Từ (1), (2), (3) suy ra $△SAH=△PAQ$ (c.g.c), do đó $SH=PQ$.

c) Vì $PA⊥SQ,QB⊥SP$ nên H là trực tâm của $△SPQ$, suy ra $SH⊥PQ$ tại I . Do đó $△IQH$ vuông tại $I,△AQH$ vuông tại A nên tứ giác AHIQ nội tiếp đường tròn đường kính QH . Do đó $\hat{AIH}=\hat{AQH}=45^{∘}$. Tương tự, tứ giác BPIH nội tiếp nên $\hat{BIH}=\hat{BPH}=45^{∘}$. Do đó $\hat{AIB}=90^{∘}$ nên I thuộc đường tròn đường kính AB cố định.

Bài 11. (h.24)

a) Theo tính chất tiếp tuyến ta có $MA=MB$, lại có $OA=OB$ nên OM là trung trực của AB , suy ra $OM⊥AB$ tại H và $HA=HB$. Ta có $BK⊥AC$, do đó bốn điểm $B,H,O,K$ thuộc đường tròn đường kính OB .

![](data:application/octet-stream;base64...)

b) Có $\hat{AEC}=90^{∘}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Theo tính chất tiếp tuyến ta có $OA⊥AM$. Xét $△MAC$ và $△MEA$ có $\hat{M}$ chung, $\hat{MEA}=\hat{MAC}=90^{∘}$ nên $△MEA⊂△MAC( g.g)$, suy ra $\frac{ME}{MA}=\frac{MA}{MC}$ hay $ME⋅MC=MA^{2}$.

Tương tự $△MAO∝\infty △MHA$ nên $\frac{MA}{MH}=\frac{MO}{MA}$ hay $MH⋅MO=MA^{2}$.

Từ (1) và (2) suy ra $MH⋅MO=ME⋅MC$.

c) Đường thẳng BC cắt AM tại S . Ta có $\hat{ABC}=90^{∘}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra $OM//CS$. Mà $OA=OC=R$ nên $MA=MS$. Ta có $BK//SA$ (cùng vuông góc với AC ) nên $△CIB∝△CMS$ và $△CKI∝△CAM$, do đó $\frac{IB}{MS}=\frac{CI}{CM}$ và $\frac{IK}{MA}=\frac{CI}{CM}$, suy ra $\frac{IB}{MS}=\frac{IK}{MA}$ mà $MA=MS$ nên $IK=IB$. Do đó HI là đường trung bình của $△BAK$, IQ là đường trung bình của $△BCK$. Suy ra $IH//AC$ và $IQ//AC$ nên ba điểm $H,I,Q$ thẳng hàng.

**Bài 12. (h.25)**

a) Ta có $\hat{ABD}=\hat{ACD}=90^{∘}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên AC và DB là hai đường cao của $△KAD$, suy ra H là trực tâm của $△KAD$. Do đó $KE⊥AD$. Các tam giác BAH và EAH vuông tại B và E nên tứ giác ABHE nội tiếp đường tròn đường kính AH .

b) Có $△BKH$ vuông tại $B,△CKH$ vuông tại C (chứng minh trên), suy ra tứ giác BHCK nội tiếp đường tròn đường kính KH.

Do đó $\hat{CKH}=\hat{CBH}$ (cùng chắn $\overparen{CH}$ ), mà $\hat{CBD}=\hat{CAD}$ (cùng chắn $\hat{CD}$ ) nên $\hat{CAD}=\hat{CKH}$. Lại có $\hat{HEA}=\hat{KED}=90^{∘}$ nên $△EAH∝△EKD$ (g.g), suy ra $\frac{EA}{EK}=\frac{EH}{ED}$ hay $EA⋅ED=EK⋅EH$.

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 25

c) Ta có $\hat{CBD}=\hat{CAD}$, tứ giác ABHE nội tiếp nên $\hat{EBH}=\hat{EAH}$ (cùng chắn $\overparen{HE}$ ), suy ra $\hat{HBC}=\hat{HBE}$. Mà $MN//BC$ nên $\hat{HBC}=\hat{HNE}$ (hai góc so le trong), do đó $\hat{HNE}=\hat{HBE}$. Suy ra $△EBN$ cân tại E nên $EN=EB$.

Có $△BMN$ vuông tại B nên $\hat{ENB}+\hat{EMB}=90^{∘}$ và $\hat{EBN}+\hat{EBM}=90^{∘}$. Mà $\hat{EBN}=\hat{ENB}$ nên $\hat{EMB}=\hat{EBM}$, suy ra $△EMB$ cân tại E , do đó $EM=EB$.

Từ (1) và (2) suy ra $EM=EN$.

Bài 13. (h.26)

a) Theo tính chất tiếp tuyến ta có $OA⊥MA,OB⊥MB$, nên $△AMO$ vuông tại $A,△BMO$ vuông tại B . Do đó tứ giác MAOB nội tiếp đường tròn đường kính MO .

b) Ta có $\hat{ANC}=90^{∘}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Xét $△CNA$ và $△CAM$ có $\hat{CNA}=\hat{CAM}=90^{∘},\hat{ACM}$ chung nên $△CNA$ co $△CAM$ (g.g), suy ra $\frac{CN}{CA}=\frac{CA}{CM}$ hay $CM⋅CN=CA^{2}$.

Mà $CA=2R$ nên $CM⋅CN=4R^{2}$.

c) Theo tính chất tiếp tuyến ta có $MA=MB$, lại có $OA=OB=R$ nên OM là trung trực của AB , suy ra $OM⊥AB$ tại H . Đường thẳng CB cắt AM tại S .

![](data:application/octet-stream;base64...)

Có $\hat{ABC}=90^{∘}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $OM//CS$. Xét $△ACS$ có $OA=OC=R,OM//CS$ nên $MA=MS$. Ta có $BK//SA$ (cùng vuông góc với AC ) nên $△CIK∝△CMA$ và $△CIB∽△CMS$.

Do đó $\frac{IK}{MA}=\frac{CI}{CM},\frac{IB}{MS}=\frac{CI}{CM}$ nên $\frac{IK}{MA}=\frac{IB}{MS}$ mà $MA=MS$ nên $IB=IK$.

Ta có OM là trung trực của AB nên H là trung điểm của AB . Theo giả thiết E là trung điểm BC , suy ra HI là đường trung bình tam giác BAK , IE là đường trung bình tam giác BKC . Do đó $HI//AC,IE//AC$ nên ba điểm $H,I,E$ thẳng hàng.

Bài 14. (h.27)

a) Theo giả thiết $BE⊥AC,CF⊥AB$ nên $△EBC$ vuông tại $E,△FBC$ vuông tại F , do đó tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn đường kính BC .

b) Từ câu a suy ra $\hat{ACB}=\hat{MFB}$ (cùng bù $\hat{BFE}$ ). Có $\hat{CME}$ chung nên $△MBF∝△MEC$ (g.g), suy ra $\frac{MB}{ME}=\frac{MF}{MC}$ hay $MB⋅MC=ME⋅MF$.

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 27

c) Vì tứ giác BCEF nội tiếp nên $\hat{FBE}=\hat{FCE}$. Các tứ giác BDHF và CDHE nội tiếp nên $\hat{FBH}=\hat{FDH}$ và $\hat{HDE}=\hat{HCE}$. Do đó $\hat{HDF}=\hat{HDE}$, suy ra DI là phân giác trong của $△DFE$. Mà $MD⊥DI$ nên DM là phân giác ngoài của $△DFE$. Theo tính chất phân giác có $\frac{IF}{IE}=\frac{MF}{ME}=\frac{DF}{DE}$.

Vì NF //AE nên $△MNF∝△MAE$ suy ra $\frac{NF}{AE}=\frac{MF}{ME}$.

Vì FK//AE nên $△$ IFK $∝△$ IEA suy ra $\frac{FK}{AE}=\frac{IF}{IE}$.

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{NF}{AE}=\frac{FK}{AE}$ do đó $NF=FK$.

**Chủ đê 7**

**BÀl TOÁN CƯ‘C TR! VÀ ỨNG DỤNG TRONG CUỘC SỐNG**

**1. Kiến thức cần nhớ**

Bất đẳng thức Cauchy: Cho các số thực không âm a , b khi đó ta có $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Một số kết quả được suy ra từ bất đả̉ng thức Cauchy:

* Với $a,b\geq 0$ từ $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ suy ra $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2}\geq ab$ hay $4ab\leq (a+b)^{2}$.
* Với $a,b>0$ từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$ và $\sqrt{ab}\leq \frac{a+b}{2}$ suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq \frac{4}{a+b}$ hay $\frac{1}{a+b}\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

**2. Bài tập minh hoạ**

Bài 1. Cho $a,b,c$ là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{12a+(b-c)^{2}}+\sqrt{12b+(c-a)^{2}}+\sqrt{12c+(a-b)^{2}}$$

Giải. Ta có:

$12a+(b-c)^{2}=4a(a+b+c)+(b+c)^{2}-4bc=(2a+b+c)^{2}-4bc\leq (2a+b+c)^{2}$.

Suy ra $\sqrt{12a+(b-c)^{2}}\leq 2a+b+c$.

Chứng minh tương tự ta có $\sqrt{12 b+(c-a)^{2}}\leq 2 b+c+a$ và $\sqrt{12c+(a-b)^{2}}\leq 2c+a+b$.

Do đó $P\leq 4(a+b+c)=12$. Vậy P đạt giá trị lớn nhất là 12 khi $(a;b;c)$ là các hoán vị của $(3;0;0)$.

Bài 2. Cho $a,b,c$ là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^{4}+b^{4}+c^{4}-3abc$.

**Giải.**

**- Tìm giá trị nhỏ nhất:**

Áp dụng bất đẳng thức $x^{2}+y^{2}+z^{2}\geq xy+yz+zx$.

Ta có: $a^{4}+b^{4}+c^{4}\geq a^{2}b^{2}+b^{2}c^{2}+c^{2}a^{2}\geq abc(a+b+c)=3abc$.

Do đó P đạt giá trị nhỏ nhất là 0 , khi $a=b=c=1$.

* Tim giá trị lớn nhất:

Ta có $P\leq (a+b)^{4}+c^{4}\leq (a+b+c)^{4}=81$.

Do đó P đạt giá trị lớn nhất là 81 , đạt được khi $a=b=0,c=3$.

Bài 3. Một tấm bìa hình chữ nhật có chu vi không đổi là 8 cm . Tấm bìa có diện tích lớn nhất với chiều dài và chiều rộng bằng bao nhiêu?

**Giải.**

Gọi chiều dài và chiểu rộng của tấm bìa hình chử nhật lâ̂n lượt là $a,b(cm)(a\geq b>0)$.

Vì tấm bìa có chu vi không đổi là 8 cm nên ta có $2(a+b)=8$ hay $a+b=4$.

Diện tích của tấm bìa hình chữ nhật đó là $S=ab\leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{2}=4$.

Vậy diện tích lớn nhất của tấm bìa đó là $4 cm^{2}$ khi $a=b=2 cm$.

Bài 4. Một người thợ được đặt hàng làm một bể cá hai ngăn không có nắp với thể tích là $1,296 m^{3}$. Người thợ đó cắt các tấm kính và ghép lại được một bể cá có dạng hình hộp chử nhật với ba kích thước a, b, c (như Hình 28) có vách ngăn ở chính giữa.

Hỏi người thợ phải cắt các tấm kính có kích thước $a,b,c$ bằng bao nhiêu để tiết kiệm kính nhất? Giả thiết rằng độ dày của kính không đáng kể.

**Giải.**

Ta có $abc=1,296$.

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 28

Diện tích các tấm kính dùng để làm bể cá là

$$\begin{matrix}S& =ab+2ac+3bc=(ab+2ac)+(3bc+2,16)-2,16\\& \geq 2\sqrt{ab⋅2ac}+2\sqrt{3bc⋅2,16}-2,16\\& \geq 2\sqrt{2\sqrt{2}⋅2\sqrt{3⋅2,16}⋅\sqrt{ab⋅ac⋅bc}}-2,16=6,48\left( m^{2}\right).\end{matrix}$$

Vậy diện tích kính ít nhất cần dùng là $6,48 m^{2}khiab=2ac=3bc$.

Suy ra $\left\{\begin{matrix}b=2c\\a=3c\end{matrix}\right.$. Do đó $\left\{\begin{matrix}a=1,8\\b=1,2.\\c=0,6\end{matrix}\right.$.

Lưu ý: Học sinh có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm:

$S=ab+2bc+3ca\geq \sqrt[3]{ab⋅2bc⋅3ca}=6,48\left( m^{2}\right)$.

Bài 5. Người ta gập một miếng bìa có dạng hình chữ nhật với kích thước $60×20 cm$ như Hình 29 để ghép thành mặt xung quanh của một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật đứng (hai đáy trên và dưới được cắt từ miếng bìa khác để ghép vào). Tính diện tích toàn phần của hộp khi thể tích của hộp lớn nhất.

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 29

**Giải.**

Theo giả thiết ta có $2x+2y=60$ hay $y=30-x$. Điều kiện: $0<x<30$. Thể tích của hộp là: $V=20xy=20x(30-x)\leq 20⋅\frac{(x+30-x)^{2}}{4}=5⋅30^{2}=4500\left( cm^{3}\right)$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi $x=30-x$ hay $x=15$, suy ra $y=15$.

Vậy diện tích toàn phần của hộp là $S\_{tp}=2⋅20x+2⋅20y+2xy=1650\left( cm^{2}\right)$.

**3. Bài tập tự luyện**

Bài 1. Với các số thực dương $a,b$ thoả mãn $a\sqrt{2-b^{2}}+b\sqrt{2-a^{2}}=2$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b+\frac{2}{a}+\frac{2}{ b}$.

Bài 2. Cho các số thực không âm $a,b,c$ thoả mãn $a+b+2c=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=ab+ac-4bc$.

Bài 3. Với $x,y$ là hai số thực không âm thoả mãn $x+y=3$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\sqrt{5x-x^{2}}+\sqrt{5y-y^{2}}$.

Bài 4. Với $a,b,c$ là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=3$, chứng minh $a+ab+abc\leq 4$.

Bài 5. Với $a,b$ là hai số thực dương thoả mãn $a+b+3ab=5$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a^{2}+b^{2}$.

Bài 6. Cho một tấm nhôm có dạng hình vuông cạnh 18 cm . Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x( cm)$, rổi gập tấm nhôm lại như Hình 30 để được một chiếc hộp không nắp. Tìm giá trị của $x$ để chiếc hộp có thể tích lớn nhất.

Bài 7. Một gia đình cần xây một hố ga không nắp (như Hình 31) có dạng hình hộp chữ nhật với thể tích $3 m^{3}$. Tỉ số giữa chiều cao h của hố và chiều rộng y của đáy bằng 4 . Tìm chiều dài $x$ của đáy để tiết kiệm vật liệu xây hố ga nhất.

Bài 8. Phần màu xám trong Hình 32 chứa một đoạn văn bản có diện tích $384 cm^{2}$. Biết rằng trang giấy được căn lể trái 2 cm , lể phải 2 cm , lề trên 3 cm và lể dưới 3 cm . Tìm chiều dài và chiều rộng của trang giấy để trang giấy có diện tích nhỏ nhất.

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 30

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 31

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 32

Bài 9. Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng khách sạn cho thuê với giá 400 nghìn đồng một ngày và toàn bộ phòng đã được cho thuê hết. Biết cứ mỗi lần khách sạn tăng giá thuê phòng thêm 20 nghìn đồng mỗi ngày thì có thêm 2 phòng trống. Hỏi khách sạn nên tăng giá phòng thêm bao nhiêu để doanh thu của khách sạn trong một ngày là lớn nhất?

Bài 10. Một miếng bìa có dạng hình tam giác đều ABC với cạnh bằng 16 cm . Bạn Minh cắt một hình chữ nhật MNPQ từ miếng bìa trên để làm biển trông xe cho lớp trong buổi ngoại khoá, với $M,N$ thuộc cạnh $BC,P$ và Q tương ứng thuộc cạnh AC và AB (nhử Hình 33). Hỏi diện tích lớn nhất có thể của hình chữ nhật MNPQ bằng bao nhiêu?

![](data:application/octet-stream;base64...)

Hinh 33

**Hướng dẩn - Lời giải - Đáp số**

Bài 1. Từ giả thiết, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$2=a\sqrt{2-b^{2}}+b\sqrt{2-a^{2}}\leq \frac{a^{2}+2-b^{2}}{2}+\frac{b^{2}+2-a^{2}}{2}=2.$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi $a^{2}+b^{2}=2$.

Mặt khác $4=2\left(a^{2}+b^{2}\right)\geq (a+b)^{2}$ suy ra $0<a+b\leq 2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$P=2a+\frac{2}{a}+2 b+\frac{2}{ b}-a-b\geq 2\sqrt{2a⋅\frac{2}{a}}+2\sqrt{2 b⋅\frac{2}{ b}}-(a+b)\geq 8-2=6.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=1$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là 6 khi $a=b=1$.

Bài 2. - Tỉm giá trị lớn nhất:

Ta có $P\leq ab+2ac=a(b+2c)=a(1-a)=\frac{1}{4}-\left(a-\frac{1}{2}\right)^{2}\leq \frac{1}{4}$.

Vậy P đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{4}$ khi $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2},c=0$.

* Tìm giá trị nhỏ nhất: Vì $a+b+2c=1$ nên $0\leq b+2c\leq 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $P\geq -4bc\geq -2⋅\frac{( b+2c)^{2}}{4}\geq -\frac{1}{2}$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $-\frac{1}{2}$ khi $a=0, b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{4}$.

Bài 3. Do $\left\{\begin{matrix}x,y\geq 0\\x+y=3\end{matrix}\right.$ nên $0\leq x,y\leq 3$.

Từ đó $x(x-3)\leq 0$ hay $x^{2}\leq 3x$. Tương tự $y^{2}\leq 3y$.

Khi đó:

$T=\sqrt{5x-x^{2}}+\sqrt{5y-y^{2}}\geq \sqrt{5x-3x}+\sqrt{5y-3y}=\sqrt{2x}+\sqrt{2y}\geq \sqrt{2x+2y}=\sqrt{6}$.

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{6}$ khi $(x;y)$ là các hoán vị của $(3;0)$.

Bài 4. Ta có $a+ab+abc=a+ab(1+c)\leq a+a⋅\frac{(b+c+1)^{2}}{4}=a+\frac{a(4-a)^{2}}{4}$.

Ta sẽ chứng minh $a+\frac{a(4-a)^{2}}{4}\leq 4$.

Khi đó $\frac{a(4-a)^{2}}{4}\leq 4-$ a suy ra $\frac{a(4-a)}{4}\leq 1$ (do $\left.a<3\right)$ hay $(a-2)^{2}\geq 0$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra khi $a=2, b=1,c=0$.

Bài 5. Vì $a,b>0$ nên $a+b\geq 2\sqrt{ab}$.

Suy ra $a+b+3ab\geq 2\sqrt{ab}+3ab$ hay $5\geq 2\sqrt{ab}+3ab$.

Khi đó $2\sqrt{ab}+3ab-5\leq 0$ hay $(\sqrt{ab}-1)(3\sqrt{ab}+5)\leq 0$, suy ra $\sqrt{ab}-1\leq 0$, do đó $\sqrt{ab}\leq 1$. Vì vậy $ab\leq 1$.

Có $T=a^{2}+b^{2}=(a+b)^{2}-2ab=(5-3ab)^{2}-2ab=(3ab-3)^{2}-14ab+16\geq 2$.

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất là 2 khi $a=b=1$.