Người làm: Thiệu Khắc Đạt
Zalo: Thiệu Khắc Đạt - số đt zalo: 0359919909
Email: datbongbt@hledu.edu.vn

CĐ13: HÌNH HỌC

Dạng 1. Sử dụng trong bài toán chia hết

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1.(HSG 7 TP Trực Ninh 2022 - 2023)

Cho ΔABC vuông cân tại A, lấy điểm D bất kì thuộc cạnh BC (D khác B và C). Trên nửa mặt phẳng chứa điểm A, kẻ tia Bx và Cy vuông góc với BC, đường thẳng vuông góc với AD tại A cắt tia Bx và Cy lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng:

1) $\Delta AEB = \Delta ADC$

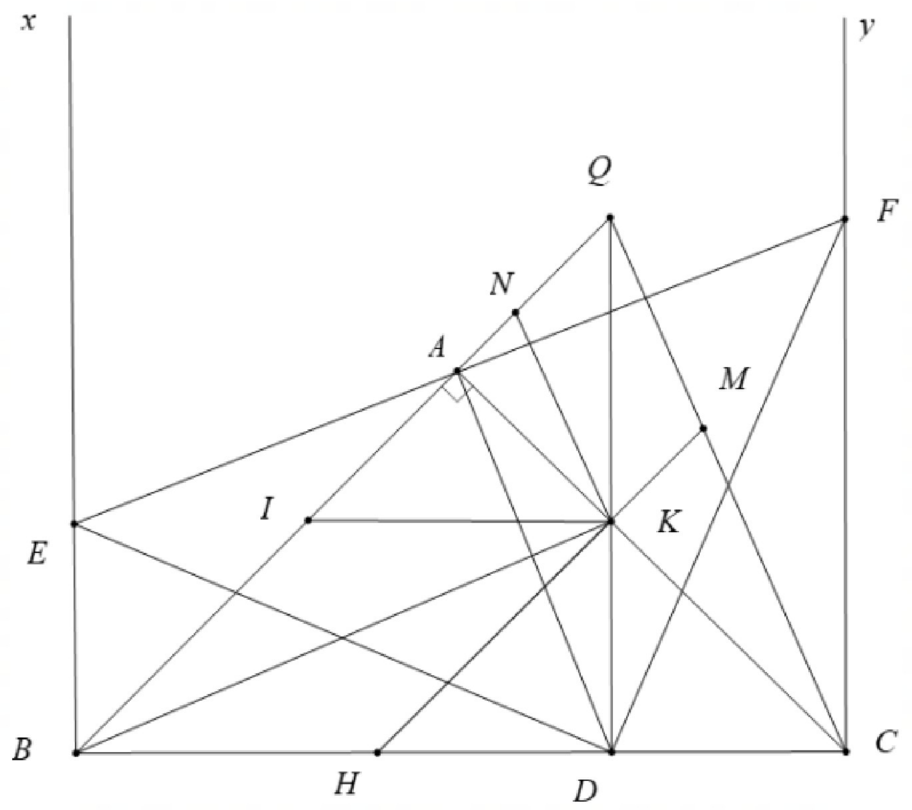
2) ΔDEF vuông cân.

3) Từ D kẻ đường thẳng song song với CF, đường thẳng này cắt AC và AB lần lượt tại K và Q. Chứng minh:

a) $BK \perp QC$.

b) $KQ + KB + KC < \dfrac{2}{3}(QB + QC + BC)$.

Lời giải



1) Ta có: ΔABC vuông cân tại A $\Rightarrow AB = AC$ và $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45^\circ$

Mà $Bx \perp BC \Rightarrow \widehat{ABE} + \widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABE} = 45^\circ$

Xét ΔAEB và ΔADC có

$\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ (vì cùng phụ với $\widehat{BAD}$)

$AB = AC$

$\widehat{ABE} = \widehat{ACD} = 45^\circ$

$\Rightarrow \Delta AEB = \Delta ADC$ (g.c.g)(đpcm) (*)

2) Từ (*) $\Rightarrow AE = AD$ (hai cạnh tương ứng)

Xét ΔADE có $AE = AD \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A, có $\widehat{DAE} = 90^\circ$ (vì $AD \perp EF$)

$\Rightarrow \Delta ADE$ vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{FED} = \widehat{AED} = 45^\circ$ (1)

Tương tự ta cũng chứng minh được ΔADF vuông cân tại A.

$\Rightarrow \widehat{EFD} = \widehat{AFD} = 45^\circ$ (2)

ΔDEF có $\widehat{EDF} = 180^\circ - \widehat{DEF} - \widehat{DFE} = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$

ΔDEF vuông tại D có $\widehat{FED} = \widehat{DFE} = 45^\circ$ (Theo (1) và (2))

$\Rightarrow \Delta DEF$ vuông cân tại D (đpcm).

3)

a) Có $DQ // CF$ (gt), $CF \perp BC$ (gt) nên $DQ \perp BC$ tại D.

Xét ΔBCQ có QD, CA là hai đường cao (vì $DQ \perp BC, AC \perp BQ$)

mà DQ cắt CA tại K nên K là trực tâm của ΔBCQ

$\Rightarrow BK \perp QC$ (Theo tính chất đồng quy của ba đường cao trong tam giác) (đpcm)

b) Từ K vẽ $KM // QB$ ($M \in QC$), $KN // QC$ ($N \in QB$).

Chứng minh được $\Delta QNK = \Delta KMQ$ (g.c.g)

$\Rightarrow QM = NK, KM = NQ$ (vì hai cạnh tương ứng) (3)

Trong ΔQKM có $QK < QM + KM$ (bất đẳng thức trong tam giác) (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow QK < QM + QN$ (5)

$KM // BQ$ và $BQ \perp CK$ nên $KM \perp CK$.

ΔCKM vuông tại $K \Rightarrow CM$ là cạnh huyền nên là cạnh lớn nhất $\Rightarrow KC < CM$ (6)

Tương tự (6) ta có $BK < BN$ (7)

Từ (5); (6) và (7) ta có $KQ + KC + KB < QM + QN + CM + BN$

$\Rightarrow KQ + KC + KB < QB + QC$

Tương tự $KQ + KC + KB < BQ + BC$; $KQ + KC + KB < BC + QC$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có

$3(KQ + KC + KB) < 2(QB + QC + BC)$

$\Rightarrow (KQ + KC + KB) < \frac{2}{3}(QC + BC + BQ)$ (đpcm)

Câu 2.(HSG 7 TP Thanh Thiện 2022 - 2023)

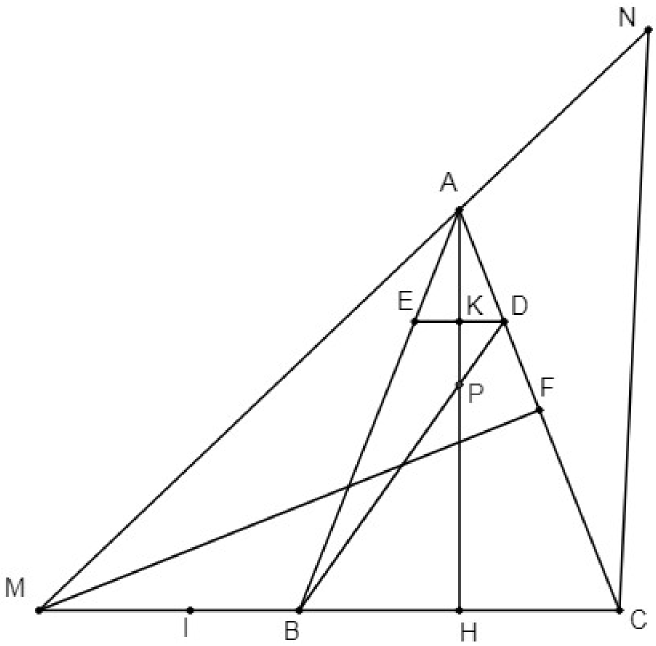
Cho tam giác ABC cân tại A ($AB > BC$). Gọi F là trung điểm của AC, qua F kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt đường thẳng BC tại M. Trên tia đối của tia AM lấy điểm N sao cho $AN = BM$.

a) Chứng minh: $AM = CN$.

b) Chứng minh: $\widehat{AMC} = \widehat{BAC}$.

c) Lấy điểm D trên cạnh AC, điểm E trên cạnh AB sao cho $AD = AE$. Trên tia BM lấy I sao cho $BI = DE$. Chứng minh: $BD > \frac{BC + DE}{2}$.

Lời giải



a) Tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$, $AB=AC$

Tam giác AMC có MF là trung tuyến và đường cao nên ΔAMC là tam giác cân tại M $\Rightarrow \widehat{MAC}=\widehat{MCA}$.

Suy ra $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=\widehat{MAC} \Rightarrow 180^\circ-\widehat{ABC}=180^\circ-\widehat{MAC} \Rightarrow \widehat{ABM}=\widehat{CAN}$

Xét ΔABM và ΔCAN có $AB=AC$ (cmt), $\widehat{ABM}=\widehat{CAN}$ (cmt), $AN=BM$ (gt)

$\Rightarrow \Delta ABM=\Delta CAN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM=CN$ (cạnh tương ứng).

Vậy $AM=CN$.

b) Tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{ABC}=\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{BAC}=180^\circ-2.\widehat{ACB}$.

Tam giác AMC là tam giác cân tại $M \Rightarrow \widehat{MAC}=\widehat{MCA} \Rightarrow \widehat{AMC}=180^\circ-2.\widehat{ACB}$.

Do đó $\widehat{AMC}=\widehat{BAC}$.

c) Kẻ đường cao AH cắt ED tại K, BD tại P.

Vì ΔABC cân tại A có AH là đường cao nên AH là trung tuyến $\Rightarrow BH=\dfrac{BC}{2}$.

Vì ΔBHP vuông tại H nên $BH<BP \Rightarrow BP>\dfrac{BC}{2}$ (1).

Vì $AD=AE$ (gt) nên ΔADE cân tại $A \Rightarrow \widehat{AED}=\dfrac{180^\circ-\widehat{BAC}}{2}$ mà $\widehat{ABC}=\dfrac{180^\circ-\widehat{BAC}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{AED}=\widehat{ABC} \Rightarrow ED//BC$ mà $AH\perp BC \Rightarrow AH\perp DE$ tại K nên ΔKPD vuông tại K nên $DK<DP$

Vì ΔADE cân tại A có AK là đường cao nên AK là trung tuyến $\Rightarrow DK=\dfrac{ED}{2}$

$\Rightarrow DP>\dfrac{DE}{2}$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $BP+DP>\dfrac{BC+DE}{2} \Rightarrow BD>\dfrac{BC+DE}{2}$

Vậy $BD>\dfrac{BC+DE}{2}$.

Câu 3.(HSG 7 Trường THCS Nguyệt Ấn - TP Vinh 2022 - 2023)

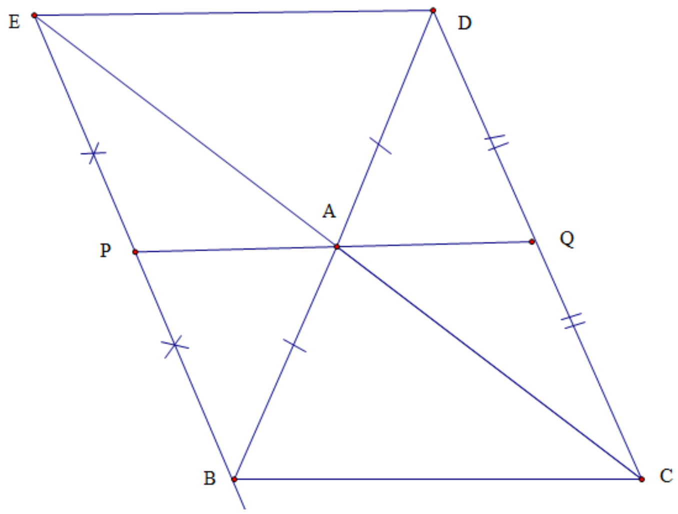
Cho ΔABC nhọn có $AB < AC$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AB = AD$. Qua B kẻ đường thẳng song song với CD và cắt đường thẳng AC tại E.

a) Chứng minh rằng: $BE = CD$; $ED = BC$

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BE, CD. Chứng minh rằng A là trung điểm của PQ

c) Gọi M là điểm bất kì nằm trong ΔABC. Xác định vị trí của M để biểu thức $MA.BC + MB.AC + MC.AB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



a) Xét ΔABE và ΔADC có

$\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ (hai góc đối đỉnh)

$AB = AD$ (gt)

$\widehat{ABE} = \widehat{ADC}$ (do $BE // CD$)

Suy ra $\Delta ABE = \Delta ADC$ (g-c-g)

Suy ra: $BE = CD$ (hai cạnh tương ứng). (đpcm)

Và $AE = AC$ (hai cạnh tương ứng) suy ra A là trung điểm của EC

Ta có:

Xét ΔADE và ΔABC có

$AE = AC$ (chứng minh trên)

$\widehat{EAD} = \widehat{CAB}$ (hai góc đối đỉnh)

$AB = AD$ (gt)

Suy ra $\Delta ADE = \Delta ABC$ (c-g-c)

Suy ra: $ED = BC$ (hai cạnh tương ứng). (đpcm)

b) Vì P là trung điểm của BE và A là trung điểm của EC

suy ra PA là đường trung bình của tam giác BEC

Suy ra: $PA // BC$ và $PA = \frac{1}{2}BC$

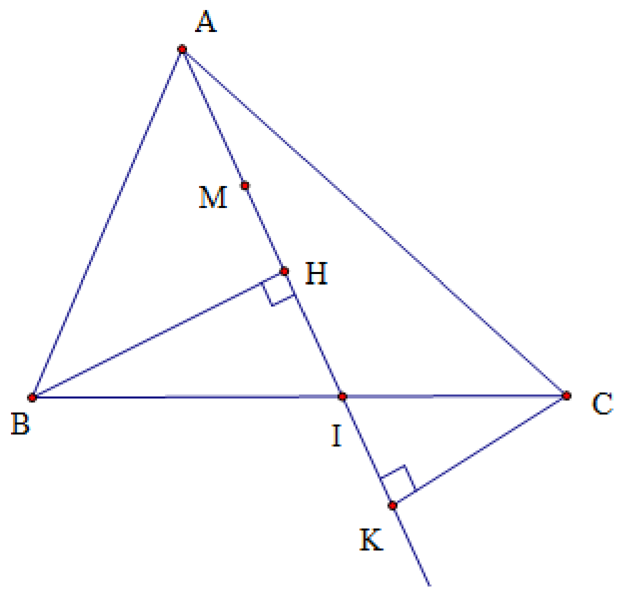
Chứng minh tương tự: QA là đường trung bình của tam giác BCD

Suy ra: $QA // BC$ và $QA = \frac{1}{2}BC$

Vì $PA // BC$ và $QA // BC$ suy ra: P, A, Q thẳng hàng (theo Tiên đề Euclid) (1)

Vì $PA = \frac{1}{2}BC$ và $QA = \frac{1}{2}BC$ suy ra $PA = QA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: A là trung điểm của PQ (đpcm).
c)



Kẻ BH và CK cùng vuông góc với AM, ta có:

$S_{MAB} + S_{MAC} = \frac{1}{2}AM.BH + \frac{1}{2}AM.CK = \frac{1}{2}AM.(BH + CK)$ (1)

Mặt khác: $BH \le BI;\ CK \le CI$

Suy ra: $BH + CK \le BI + CI \Leftrightarrow BH + CK \le BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $S_{MAB} + S_{MAC} = \frac{1}{2}AM.(BH + CK) \le \frac{1}{2}AM.BC$ (3)

Dấu "=" xảy ra khi $AM \perp BC$

Chứng minh tương tự ta được:

$S_{MBC} + S_{MAB} \le \frac{AC.BM}{2}$ (4)

$S_{MBC} + S_{MAC} \le \frac{AB.MC}{2}$ (5)

Từ (3), (4) và (5) ta được:

$2\left[S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MAC}\right] \le \frac{BC.AM}{2} + \frac{AC.BM}{2} + \frac{AB.MC}{2}$

$\Leftrightarrow 4.S_{ABC} \le MA.BC + MB.CA + MC.AB$

Dấu "=" xảy ra khi: $AM \perp BC, BM \perp AC, CM \perp AB$ Hay M là trực tâm của ΔABC.

Vậy min $MA.BC + MB.CA + MC.AB = 4.S_{ABC}$

Xảy ra khi: $AM \perp BC, BM \perp AC, CM \perp AB$ Hay M là trực tâm của ΔABC.

Câu 4. (HSG 7 TP Thanh Hóa 2022 - 2023)

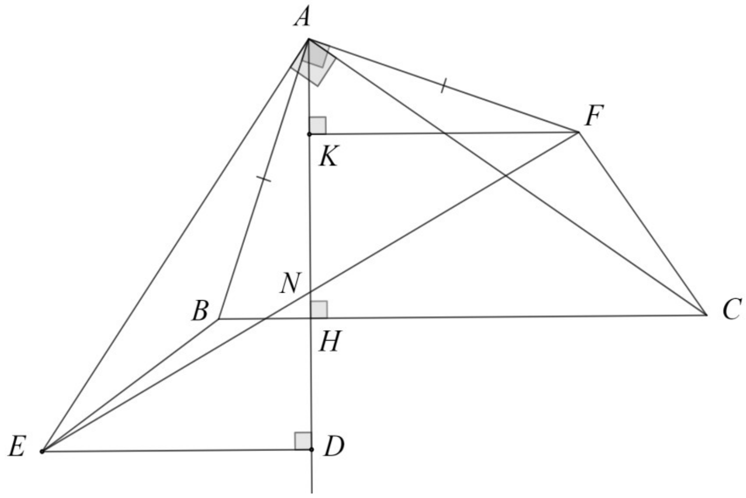
Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B lấy điểm E sao cho $\widehat{EAC} = 90^\circ$ và $AE = AC$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C lấy điểm F sao cho $\widehat{FAB} = 90^\circ$ và $FA = AB$.

a) Chứng minh $EB = FC$

b) Gọi N là giao điểm của FE và AH. Chứng minh N là trung điểm của EF.

c) Chứng minh rằng: $\frac{AE + AF - EF}{2} < AN < \frac{AE + AF + EF}{2}$

Lời giải



a) Ta có: $AE \perp AC \Rightarrow \widehat{EAC} = 90^{\circ}$

$AF \perp AB \Rightarrow \widehat{FAB} = 90^{\circ}$

Mà $\widehat{BAC} + \widehat{EAB} = \widehat{AEC} = 90^{\circ}$

$\widehat{BAC} + \widehat{CAF} = \widehat{BAF} = 90^{\circ}$

$\Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{CAF}$

Xét ΔAEB và ΔACF có:

$AE = AC$ (gt)

$\widehat{EAB} = \widehat{CAF}$ (cmt)

$AB = AF$ (gt)

Suy ra: $\Delta AEB = \Delta ACF$ (c.g.c) $\Rightarrow EB = CF$ (hai cạnh tương ứng)

b) Từ E kẻ $ED \perp AH$ (D thuộc AH), từ F kẻ $FK \perp AH$ (K thuộc AH)

ΔAED và ΔCAH có:

$AE = AC$

$\widehat{AED} = \widehat{CAH}$ (cùng phụ $\widehat{DAE}$)

$\widehat{EDA} = \widehat{CHA} = 90^{\circ}$

$\Rightarrow \Delta AED = \Delta CAH$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow ED = AH$ (1)

Tương tự: $\Delta ABH = \Delta FAK \Rightarrow AH = FK$ (2)

Từ (1) và 2) suy ra: $ED = FK$

+ Ta có: $\widehat{NED} = 90^{\circ} - \widehat{END}$ và $\widehat{NFK} = 90^{\circ} - \widehat{FNK}$, mà $\widehat{END} = \widehat{FNK}$ (đối đỉnh)

Suy ra: $\widehat{NED} = \widehat{NFK}$

Xét ΔEDN và ΔFKN có:

$\widehat{EDN} = \widehat{FKN} = 90^{\circ}$

$ED = FK$ (cmt)

$\widehat{NED} = \widehat{NFK}$ (cmt)

Suy ra: $\Delta EDN = \Delta FKN$ (g.c.g)

$\Rightarrow EN = FN \Rightarrow N$ là trung điểm của EF

c) Xét tam giác AEN có : $AE - EN < AN < AE + EN$ (3) (Bất đẳng thức trong tam giác)

Xét tam giác AFN có : $AF - NF < AN < AF + NF$ (4) (Bất đẳng thức trong tam giác)

Từ (3) và (4) suy ra : $AE - EN + AF - NF < 2AN < AE + EN + AF + NF$

$\Rightarrow AE + AF - (EN + NF) < 2AN < AE + AF + (EN + NF)$

$\Rightarrow AE + AF - EF < 2AN < AE + AF + EF$

$\Rightarrow \dfrac{AE + AF - EF}{2} < AN < \dfrac{AE + AF + EF}{2}$

Câu 5.(HSG 7 Thiệu Hóa- Thanh Hóa 2022 - 2023)

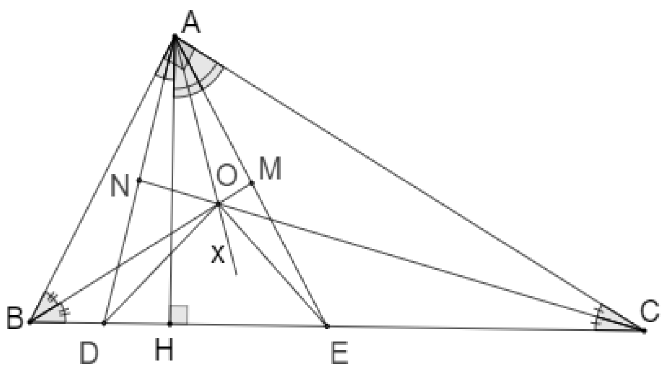
Cho tam giác ABC vuông tại $A(AB < AC)$ có đường cao AH. Phân giác các góc BAH và góc CAH lần lượt cắt BC tại D và E. Vẽ BM là tia phân giác của tam giác $ABE(M$ thuộc $AE)$, vẽ CN là tia phân giác của tam giác $ADC(N$ thuộc $AD)$.

1) Chứng minh: $\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$ và ΔABE cân.

2) Gọi O là giao của BM và CN. Chứng minh điểm O cách đều ba đỉnh tam giác ADE và tam giác DOE vuông cân.

3) Chứng minh $\dfrac{AB + BC + CA}{2} < OA + OB + OC < AC + BC$.

Lời giải



1)

+ Do ΔABH vuông tại H nên $\widehat{BAH} + \widehat{ABC} = 90^\circ$

ΔABC vuông tại A nên $\widehat{BCA} + \widehat{ABC} = 90^\circ$

Nên $\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

+ Ta có $\widehat{EAH} = \widehat{CAE}$ (vì AE là phân giác của $\widehat{HAC}$

lại có $\widehat{AEB} = \widehat{CAE} + \widehat{ACE}$ (tính chất góc ngoài)

suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{EAH} + \widehat{ACE} = \widehat{EAH} + \widehat{BAH} = \widehat{BAE}$

Vậy ΔABE cân tại B.

2)

+) ΔABE cân tại B (c/m câu 1) và BM là phân giác của ΔABE nên BM cũng là trung trực của AE.

Lại có $O \in BM$ nên $OA = OE$ (tính chất đường trung trực)

+) Do ΔACH vuông tại H nên $\widehat{CAH} + \widehat{ACB} = 90^\circ$

ΔABC vuông tại A nên $\widehat{BCA} + \widehat{ABC} = 90^\circ$

Nên $\widehat{CAH} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

Ta có $\widehat{BAD}=\widehat{DAH}$ (vì AD là phân giác của $\widehat{BAH}$)

lại có $\widehat{ADC}=\widehat{ABC}+\widehat{BAD}$ (tính chất góc ngoài)

suy ra $\widehat{ADC}=\widehat{ABC}+\widehat{BAD}=\widehat{CAH}+\widehat{DAH}=\widehat{DAC}$

Vậy ΔACD cân tại C.

+ ΔACD cân tại C và CN là phân giác của ΔACD nên CN cũng là trung trực của AD.

Lại có $O\in CN$ nên $OA=OD$ (tính chất đường trung trực)

Do đó $OA=OE=OD$ hay O cách đều đỉnh của tam giác ADE.

Do $OD=OE$ nên ΔDOE cân tại O. (1)

+ Kẻ Ox là tia đối của tia OA. Ta có:

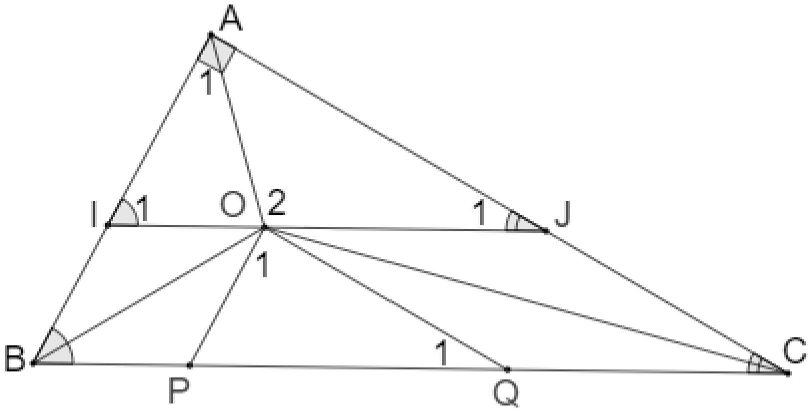
$\widehat{DOx}=\widehat{OAD}+\widehat{ODA}=2\widehat{OAD}$

$\widehat{EOx}=\widehat{OAE}+\widehat{OEA}=2\widehat{OAE}$

Suy ra $\widehat{DOx}+\widehat{EOx}=2\widehat{OAD}+2\widehat{OAE}=2\widehat{DAE}=\widehat{BAC}=90^\circ$

Hay $\widehat{DOE}=90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: Vậy ΔDOE vuông cân tại O.



3) Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có $OA+OB>AB, OB+OC>BC, OC+OA>AC$

Cộng các vế ta có $2OA+2OB+2OC>AB+BC+CA$

Suy ra $\dfrac{AB+BC+CA}{2}<OA+OB+OC$

Qua O kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại I, J

Qua O kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại P

Qua O kẻ đường thẳng song song với AC cắt BC tại Q

Trong ΔOQC có $OQ+QC>OC$

Dễ dàng chứng minh $OQ=CJ$ nên $CJ+QC>OC$ (1)

Do $OP//AB, OQ//AC$ nên $\widehat{O_1}=\widehat{BAC}=90^\circ$ suy ra $PQ>OP$ mà trong tam giác OBP có $OP+PB>OB$ nên $PQ+PB>OB$ hay $BQ>OB$ (2)

Ta lại có $\widehat{O_2}=\widehat{I_1}+\widehat{A_1}=\widehat{ABC}+\widehat{A_1}>\widehat{ACB}=\widehat{J_1}$ (vì $AB<AC$ nên $\widehat{ABC}>\widehat{ACB}$

Do đó $AJ>OA$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $CJ+QC+BQ+AJ>OC+OB+OA$ hay $AC+BC>OC+OB+OA$.

Vậy $\dfrac{AB+BC+CA}{2} < OA+OB+OC < AC+BC$

Câu 6.(HSG 7 Nam Đàn- Nghệ An 2022 - 2023)

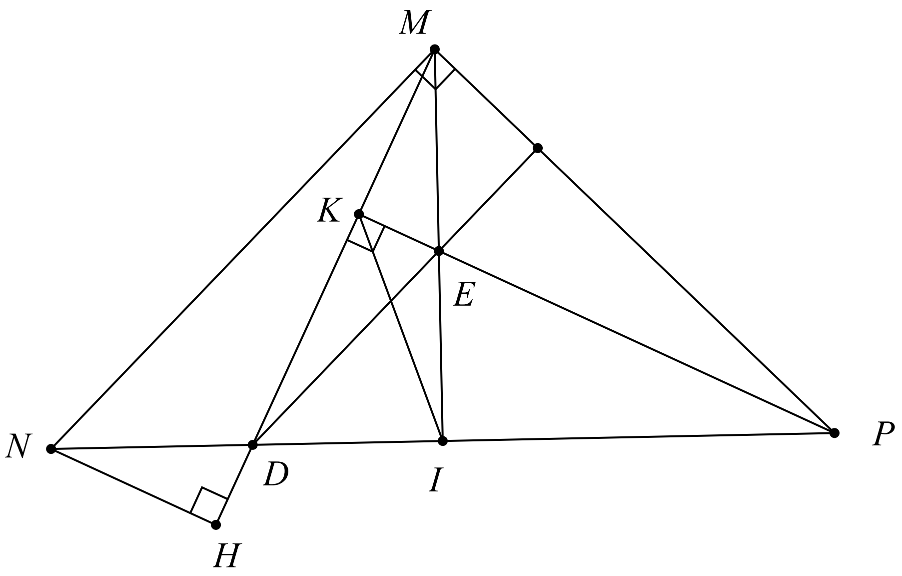
Cho ΔMNP vuông cân tại M, gọi I là trung điểm của NP. Lấy điểm D bất kì trên đoạn thẳng NI (D khác N và I). Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của N và P xuống đường thẳng MD.

a) Chứng minh $MK = NH$.

b) Kẻ MI cắt PK tại E. Chứng minh đường thẳng DE vuông góc với MP.

c) Chứng minh KI là phân giác của $\widehat{PKD}$.

Lời giải



a) Chứng minh $MK = NH$.

Xét hai tam giác vuông: ΔPKM và ΔMHN có

MP = MN (ΔMNP vuông cân)

$\begin{cases} MP = MN \\ \widehat{KPM} = \widehat{HMN} \end{cases}$ (cùng phụ với $\widehat{KMP}$)

$\Rightarrow \Delta PKM = \Delta MHN$ (ch-gn)

$\Rightarrow MK = NH$ (2 cạnh tương ứng)

b) Kẻ MI cắt PK tại E. Chứng minh đường thẳng DE vuông góc với MP

Xét ΔMNP vuông cân

$\Rightarrow$ Đường trung tuyến MI cũng là đường cao

$\Rightarrow MI \perp DP$

Xét ΔMDP có:

$\begin{cases} MI \perp DP \\ PK \perp MD \end{cases}$

Mà $PK; MI$) cắt nhau tại E

$\Rightarrow$ E là trực tâm ΔMDP

$\Rightarrow DE \perp MP$

c) Chứng minh KI là phân giác của $\widehat{PKD}$.

Ta có ΔMNP vuông cân tại M suy ra ΔMIP vuông cân tại $I \Rightarrow \widehat{IMP}=45^\circ \Rightarrow \widehat{IMP}=\widehat{MNP}=45^\circ$ (1)

Mà $\widehat{HNM}=\widehat{KMP}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{HNI}=\widehat{KMI}$

Xét ΔNMI và ΔMKI có

$$\begin{cases} MI=NI \\ \widehat{HNI}=\widehat{KMI} \\ NH=MK(\Delta NMH=\Delta MKP) \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta NHI=\Delta MKI$

$$\Rightarrow \begin{cases} HI=KI \\ \widehat{HIN}=\widehat{KIM} \end{cases}$$

Có: $\widehat{KIM}+\widehat{DIK}=90^\circ \Rightarrow \widehat{HIN}+\widehat{DIK}=90^\circ \Rightarrow \widehat{HIK}=90^\circ$

Mà $HI=KI \Rightarrow \Delta HIK$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{DKI}=45^\circ$

Mà $\widehat{DKP}=90^\circ \Rightarrow KI$ là phân giác của $\widehat{PKD}$.

Câu 7.(HSG 7 Tam Dương 2022 - 2023)

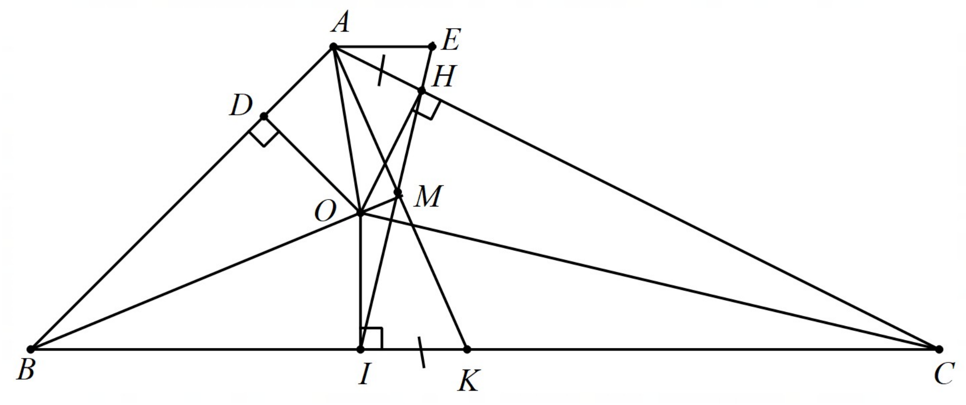
Cho tam giác ABC có $AB<AC<BC$ gọi O là giao điểm của ba đường phân giác của tam ABC. Kẻ OH vuông góc với AC tại H, OI vuông góc với BC tại I.

a) Chứng minh ΔCHI là tam giác cân

b) Trên đoạn AC lấy K sao cho $IK=AH$, gọi M là giao điểm của AK và HI. Chứng minh M là trung điểm của AK.

c) Chứng minh B,O,M thẳng hàng

Lời giải



a) Xét $\Delta CIO, \Delta CHO$

Có CO chung

$\widehat{CIO}=\widehat{CHO}=90^\circ$

Nên $\Delta CIO=\Delta CHO \Rightarrow CI=CH \Rightarrow \Delta CHI$ cân tại C

b) Kẻ $AE \parallel BC$ ta có $\widehat{AEH}=\widehat{HIC}; \widehat{IHC}=\widehat{AHE}; \widehat{IHC}=\widehat{HIC}$

Nên $\widehat{AEH}=\widehat{AHE}$ suy ra ΔAEH cân tại A

$\Rightarrow AE=AH=IK$

Xét $\Delta AEM,\Delta KMI$ có $\widehat{MAE}=\widehat{MIK};AE=IK;\widehat{AMI}=\widehat{KMI}$

$\Delta AEM=\Delta KIM$ (g.c.g) $\Rightarrow AM=KM$

Vậy M là trung điểm của AK

c) Kẻ $OD\perp AB$, xét $\Delta AOD\,\&\,\Delta AOH$ có OA chung,

$\widehat{ADO}=\widehat{AHO}=90^{\circ};\widehat{OAD}=\widehat{OAH}\Rightarrow\Delta OAD=\Delta OAH\Rightarrow OD=OH$

Ta chứng minh $\Delta BOD=\Delta BOI\Rightarrow BD=BI\Rightarrow BK=BI+IK=BD+AD=BA$

$\Rightarrow\Delta BKA$ cân tại $B\Rightarrow BO\perp AK$

Chứng minh tương tự ta có $\Rightarrow OM\perp AK\Rightarrow O,M,B$ thẳng hàng

Câu 8. (HSG 7 TP Lào Cai 2022 - 2023)

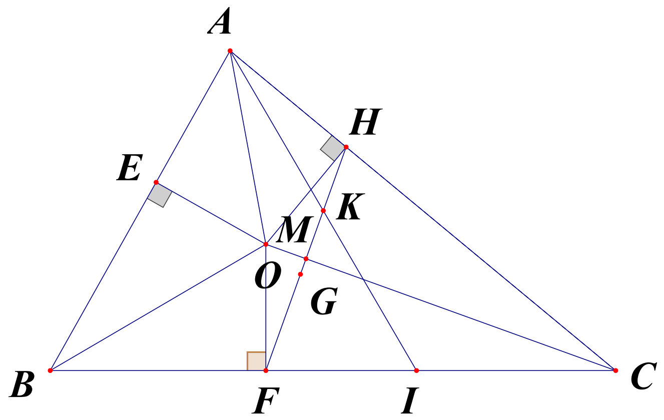
Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, $AB<AC<BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O. Gọi F là hình chiếu của O trên $BC;H$ là hình chiếu của O trên AC. Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI=AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI.

a) Chứng minh ΔFCH cân; $OA=OI$.

b) Gọi M là điểm trên đoạn thẳng FH sao cho $MI=FI$. Chứng minh $MI\,//\,AC$.

c) Chứng minh K là trung điểm của AI và 3 điểm B,O,K thẳng hàng

Lời giải



a) Chứng minh ΔFCH cân; $OA=OI$.

Xét ΔCHO và ΔCFO Có:

$\widehat{CHO}=\widehat{CFO}=90^{\circ}$

CO là cạnh chung

$\widehat{HCO}=\widehat{FCO}$ (vì CO là phân giác $\widehat{FCH}$)

Suy ra: $\Delta CHO=\Delta CFO$ (c.h-g.n) $\Rightarrow CH=CF\Rightarrow\Delta FCH$ cân tại C

Xét ΔAHO và ΔIFO có:

$\widehat{CHO}=\widehat{CFO}=90^{\circ}$

$AH=FI$ (gt)

$OH=OF$ (Tính chất đồng quy của 3 đường phân giác)

$\Delta AHO=\Delta IFO$ (c.g.c) suy ra $OA=OI$ (2 cạnh tương ứng)

b) Xét ΔFMI cân tại I ($MI=FI$ giả thiết) $\Rightarrow\widehat{MFI}=\widehat{FMI}$ (1)

Xét ΔFMC cân tại C $\Rightarrow \widehat{HFC}=\widehat{FHC}$ (2)

Từ (1); (2) $\Rightarrow \widehat{MFI}=\widehat{FMI}=\widehat{FHC}$ suy ra: $\widehat{MCH}=\widehat{FIM}$ mà 2 góc ở vị trí đồng vị nên $MI // AC$.

c) +) Qua I vẽ $IG \parallel AC (G \in FH)$

Ta có ΔFCH cân tại $C \Rightarrow \widehat{CHF}=\widehat{CFH}$ (1)

Mà $\widehat{CHF}=\widehat{FGI}$ (đồng vị, $IG \parallel AC$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CFH}=\widehat{FGI}$ hay $\widehat{IFG}=\widehat{IGF}$, Vậy ΔIFG cân tại I $\Rightarrow FI=GI$, mặt khác: $FI=AH$ nên $GI=AH(=FI)$

Ta lại có: $\widehat{IGK}=\widehat{AHK}; \widehat{HAK}=\widehat{GIK}$ (so le trong, $IG \parallel AC$)

Xét ΔAHK và ΔIGK có:

$\widehat{IGK}=\widehat{AHK}$ (cmt)

$GI=AH$ (cmt)

$\widehat{HAK}=\widehat{GIK}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AHK=\Delta IGK$ (g-c-g) $\Rightarrow AK=KI$

Hay K là trung điểm của AI

+) Vẽ $OE \perp AB$ tại E. Tương tự câu a, ta có: $\Delta AEH, \Delta BEF$ thứ tự cân tại A, B.

Suy ra $BE=BF$ và $AE=AH$.

$BA=BE+EA=BF+AH=BF+FI=BI \Rightarrow \Delta ABI$ cân tại B.

Mà BO là phân giác của B, BK là đường trung tuyến của ΔABI nên B, O, K là ba điểm thẳng hàng.

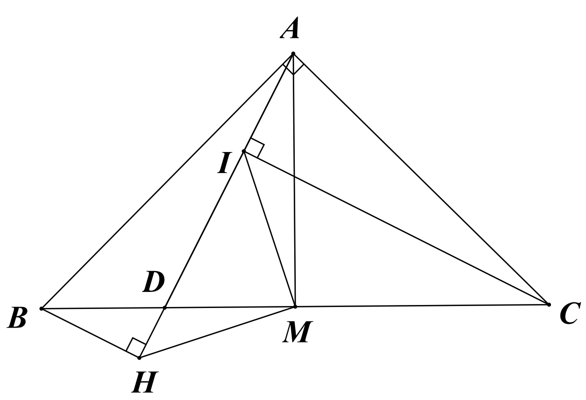
Câu 9. (HSG 7 TP Thủ Đức 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, D là điểm thuộc đoạn BM (D khác B và M). Kẻ các đường thẳng BH, CI lần lượt vuông góc với đường thẳng AD tại H và I.

a) Chứng minh: $\widehat{BAM}=\widehat{ACM}$ và $BH=AI$.

b) Chứng minh:Tam giác MHI vuông cân.

Lời giải



a) ΔABC vuông cân tại A

$\Rightarrow AM$ là đường trung tuyến đồng thời là đường phân giác $\Rightarrow \widehat{BAM}=\widehat{CAM}=45^\circ$

ΔABC vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABM}=\widehat{ACM}=45^\circ \Rightarrow \widehat{BAM}=\widehat{ACM}$ (1)

Xét 2 tam giác vuông BAH và CAI có

$BA = CA$; $\widehat{BAH} = \widehat{ACI}$ (cùng phụ $\widehat{CAI}$) (2)
$\Rightarrow \Delta BAH = \Delta ACI$ (cạnh huyền - góc nhọn)
$\Rightarrow BH = AI$ (2 cạnh tương ứng)

b) $\Delta BAH = \Delta ACI \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{ACI} \Rightarrow \widehat{HAM} = \widehat{ICM}$
$\Delta BAH = \Delta ACI \Rightarrow AH = IC$
ΔMCA có $\widehat{MAC} = \widehat{MCA} = 45^\circ$ nên ΔMCA cân tại $M \Rightarrow AM = MC$
Xét ΔHAM và ΔICM có $AM = MC$; $\widehat{HAM} = \widehat{ICM}$; $AH = IC$
$\Rightarrow \Delta HAM = \Delta ICM$ (c.g.c)$\Rightarrow HM = IM$ (3)
Suy ra tam giác MHI cân tại M
$\Delta HAM = \Delta ICM \Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{CIM}$
Mà $\widehat{CIM} + \widehat{MIH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AHM} + \widehat{MIH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IMH} = 90^\circ$ (4)
Từ (3) và (4) tam giác MHI vuông cân

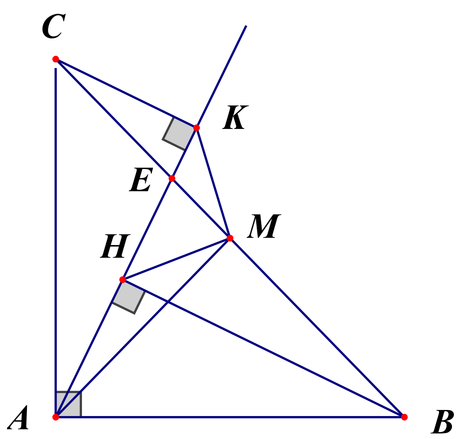
Câu 10. (HSG 7 Vũ Thư 2022 - 2023)

1. Cho ΔABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy điểm E nằm giữa hai điểm C và M. Kẻ BH và CK lần lượt vuông góc với đường thẳng AE (H, K thuộc đường thẳng AE).
a) Chứng minh: $BH = AK$;
b) Chứng minh: $\Delta AHM = \Delta CKM$.

2. Cho tam giác ABC có $\widehat{\text{BAC}} = 15^\circ, \widehat{\text{ABC}} = 45^\circ$, trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $\text{CD} = 2\text{CB}$. Tính số đo $\widehat{\text{ADC}}$.

Lời giải

1.



a) Do BH và CK lần lượt vuông góc với đường thẳng AE (H, K thuộc AE) (giả thiết) nên ΔKCA và ΔHAB lần lượt là các tam giác vuông tại K và H

Ta có: $\widehat{KCA} + \widehat{KAC} = 90^\circ$ (ΔKCA vuông tại K) và $\widehat{HAB} + \widehat{KAC} = 90^\circ$ (ΔHAB vuông tại H). Nên $\widehat{KCA} = \widehat{HAB}$
Xét ΔKCA vuông tại K và ΔHAB vuông tại H có:
$AC = AB$ (chứng minh trên)
$\widehat{KCA} = \widehat{HAB}$ (chứng minh trên)
Suy ra $\Delta KCA = \Delta HAB$ (cạnh huyền- góc nhọn)

$\Rightarrow BH = AK$

b) Ta có $\Delta KCA = \Delta HAB$ (chứng minh trên) $\Rightarrow KC = HA$ (hai cạnh tương ứng)

Do ΔABC vuông cân tại A, M là trung điểm của BC (giả thiết) nên AM là đường trung tuyến, đường cao, đường phân giác của ΔABC

$\Rightarrow AM = CM$ và $AM \perp BC$

Ta có $\widehat{KCE}$ và $\widehat{CEK}$ là hai góc phụ nhau, $\widehat{AEM}$ và $\widehat{EAM}$ là hai góc phụ nhau, mà $\widehat{CEK} = \widehat{AEM}$ (hai góc đối đỉnh) nên $\widehat{KCE} = \widehat{EAM}$.

Xét ΔAHM và ΔCKM có:

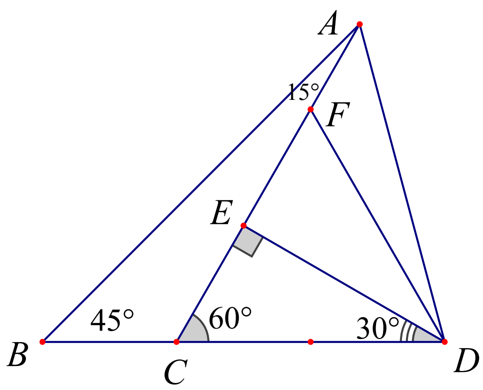
$KC = HA$ (chứng minh trên)

$\widehat{KCE} = \widehat{EAM}$ (chứng minh trên)

$AM = CM$ (chứng minh trên)

Do đó $\Delta AHM = \Delta CKM$ (c-g-c).

2.



Kẻ $DE \perp CA$, chứng minh được ΔCED có $\widehat{EDC} = 30^\circ$

Xét ΔABC, có $\widehat{ACB} = 180^\circ - 45^\circ - 15^\circ = 120^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ACD} = 60^\circ$ hay $\widehat{ECD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{EDC} = 30^\circ$

Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho $EC = EF$. Ta chứng minh được ΔDCF đều

$\Rightarrow CE = \dfrac{1}{2}CD \Rightarrow CE = CB$

$\Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{CEB} = 30^\circ = \widehat{EDC}$

$\Rightarrow \Delta EBD$ cân tại E

$\Rightarrow \widehat{EBA} = 15^\circ \Rightarrow \Delta BEA$ cân tại E.

$\Rightarrow EA = EB = ED$

$\Rightarrow \Delta AED$ vuông cân

$\Rightarrow \widehat{ADE} = 45^\circ$

Vậy $\widehat{ADB} = \widehat{ADE} + \widehat{EDB} = 75^\circ$

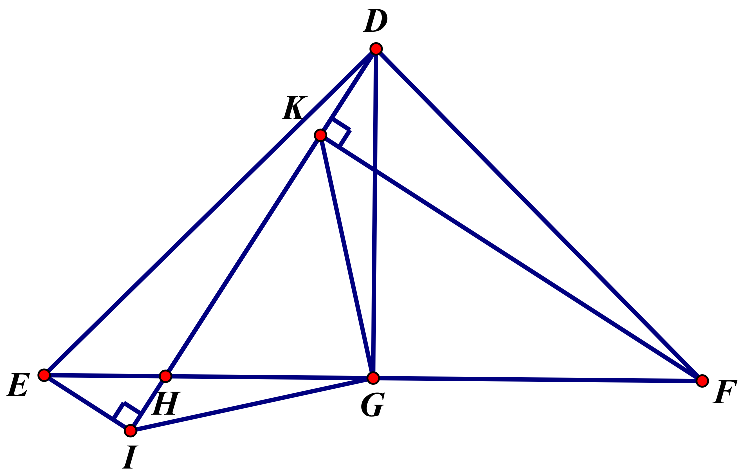
Câu 11. (HSG 7 Bình Lục 2022 - 2023)

Cho tam giác DEF vuông cân tại D.Gọi G là trung điềm của EF.

a) Chứng minh $\widehat{EDG} = \widehat{DFG}$

b) Lấy điểm H thuộc đoạn thẳng EG (H khác E và G).Kè các đường thẳng EI,FK lần lượt vuông góc với đường thẳng DH tại I và K.Chưng minh $EI = DK$ và tam giác GIK vuông cân.

Lời giải



a) Chứng minh $\widehat{EDG}=\widehat{DFG}$

Ta có ΔDEF vuông cân tại $D \Rightarrow \widehat{DEF}=\widehat{DFE}=45^\circ$

Lại có DG là đường trung tuyến trong tam giác cân

$\Rightarrow$ DG là đường cao, đường phân giác của ΔDEF

$\Rightarrow \widehat{EDG}=\widehat{FDG}=45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{EDG}=\widehat{DFG}$ (đpcm)

b) Lấy điểm H thuộc đoạn thẳng EG (H khác E và G).Kè các đường thẳng EI ,FK lần lượt vuông góc với đường thẳng DH tại I và K .Chứng minh $\mathrm{EI}=\mathrm{DK}$ và tam giác GIK vuông cân.

*Chứng minh $\mathrm{EI}=\mathrm{DK}$

Chỉ ra $\widehat{EDI}=\widehat{DFK}$ (cùng phụ $\widehat{KDF}$)

Chứng minh được $\Delta EDI=\Delta DFK$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\mathrm{EI}=\mathrm{DK}$ (2 cạnh tương ứng)

* Tam giác GIK vuông cân

Chứng minh được $DG\perp FG$

Chứng minh được $DG=FG$

Chứng minh được $\widehat{IDG}=\widehat{KFG}$

Chứng minh được $\Delta IDG=\Delta KFG$ (c.g.c) $\Rightarrow IG=KG\,(^*)$

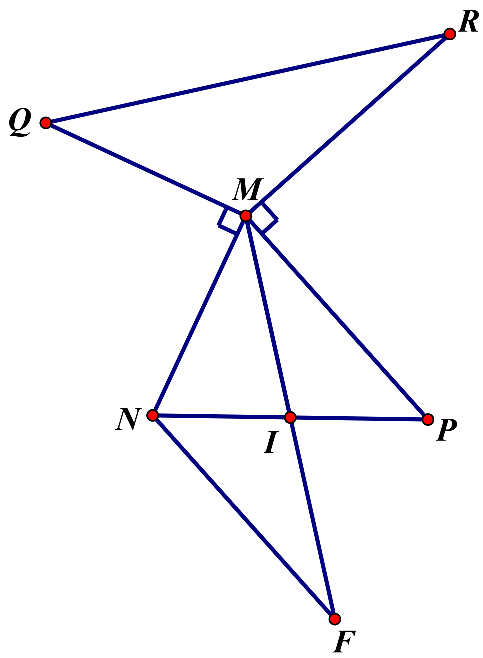
Do $\Delta IDG=\Delta KFG\Rightarrow \widehat{IGD}=\widehat{KGF}\Rightarrow \widehat{IGK}=\widehat{DGF}=90^\circ\,(**)$

Từ $(*)$ và $(**)\Rightarrow \Delta GIK$ vuông cân

Câu 12. (HSG 7 Bình Lục 2022 - 2023)

Cho tam giác MNP có $\widehat{NMP} < 90^\circ$ .Vẽ ra phia ngoài tam giác MNP hai đoạn thẳng MQ vuông góc và bằng MN, MR vuông góc và bằng MP .Gọi I là trung điểm của NP.Chứng minh $MI = \frac{1}{2}QR$.

Lời giải



Trên tia đối của tia IM , lấy điểm F sao cho $IF = IM$

Dễ dàng chứng minh được $\Delta PIM = \Delta NIF$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{IMP} = \widehat{IFN} \Rightarrow \begin{cases} MP // NF \\ MP = NF \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{MNF} + \widehat{NMP} = 180^\circ$ (1)

Và $\widehat{QMR} + \widehat{NMP} = 180^\circ$ (vì $\widehat{QMN} + \widehat{RMP} = 180^\circ (gt)$) (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\Rightarrow \widehat{MNF} = \widehat{QMR}$

Chứng minh được $\Delta MNF = \Delta QMR$ (c.g.c)

$\Rightarrow MF = QR = 2MI$

$\Rightarrow MI = \frac{1}{2}QR$

Câu 13. (HSG 7 Kim Thành 2022 - 2023)

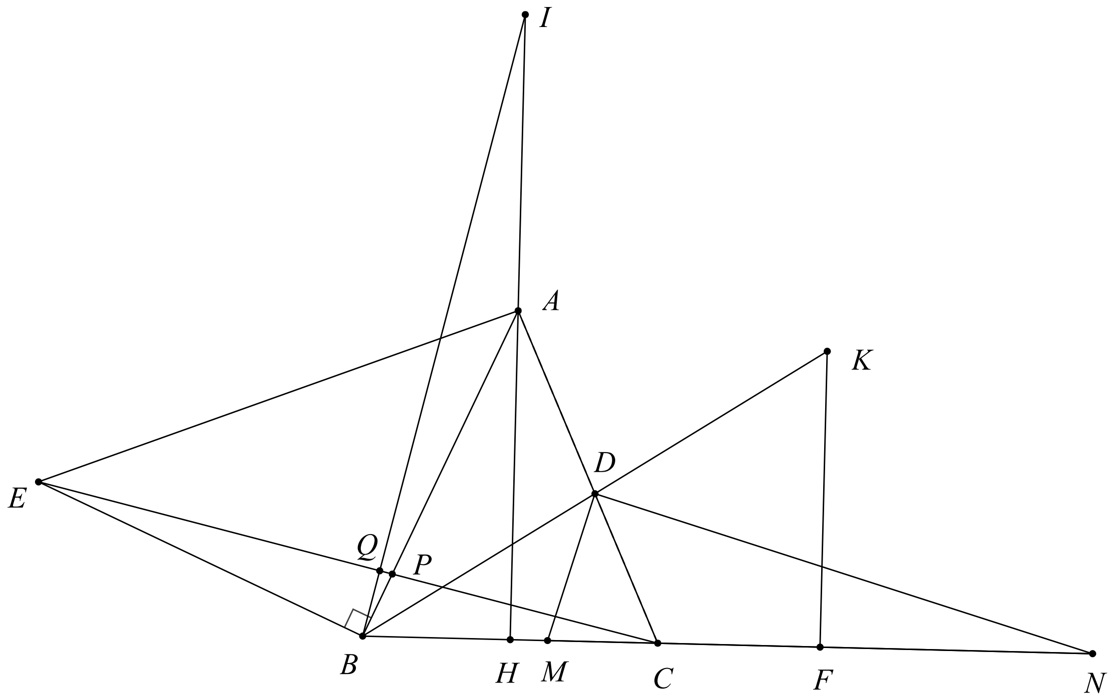
Cho ΔABC cân tại A và có ba góc đều là góc nhọn. Vẽ trung tuyến AH .

a) Chứng minh: AH vuông góc với BC .

b) Vẽ $BE = BA$, BE vuônng góc với BA (E và C nằm khác phía so với đường thẳng AB). Qua B vẽ đường thẳng vuông góc với EC cắt tia HA tại điểm I . Chứng minh: $BC = AI$.

c) Đường phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt AC tại D , đường phân giác của $\widehat{BDC}$ cắt BC tại M , đường phân giác của $\widehat{ADB}$ cắt BC tại N . Gọi F. là trung điểm của MN . Trên tia đối của tia DB lấy điểm K sao cho $DK = DB$. Chứng minh: ΔBFK là tam giác vuông.

Lời giải



a) Xét ΔABH và ΔACH có:

$AB = AC$ (ΔABC cân tại A);

$BH = CH$ (gt);

AH chung;

$\Rightarrow \Delta ABH = \Delta ACH$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{AHC}$

Mà $\widehat{AHB} + \widehat{AHC} = 180^\circ$ (Kề bù)

$\Rightarrow \widehat{AHB} = 180^\circ : 2 = 90^\circ$

$\Rightarrow AH \perp BC$ (đpcm).

b) Xét ΔBCE và ΔAIB có

$BE = AB$ (gt) $\quad$ (1)

$\widehat{IAB} = \widehat{ABH} + \widehat{AHB} = \widehat{ABH} + 90^\circ$ (Tính chất góc ngoài ΔABH)

$\widehat{CBE} = \widehat{ABE} + \widehat{ABH} = 90^\circ + \widehat{ABH}$

$\Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{IAB} \left(= 90^\circ + \widehat{ABH}\right)$ $\quad$ (2)

Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của AB và IB với CE.

ΔPBE vuông tại B có $\widehat{BEC} = 90^\circ - \widehat{BPQ}$

ΔPBQ vuông tại Q có $\widehat{ABI} = 90^\circ - \widehat{BPQ}$

$\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{ABI} \left(= 90^\circ - \widehat{BPQ}\right)$ $\quad$ (3)

Từ (1); (2); (3) $\Rightarrow \Delta BCE = \Delta AIB$ (g.c.g)

$\Rightarrow \mathrm{BC} = \mathrm{AI}$ (đpcm)

c) DN là đường phân giác của $\widehat{ADB}$ nên DN là phân giác của $\widehat{CDK}$.

DM và DN lần lượt là hai tia phân giác của hai góc $\widehat{BDC}$ và $\widehat{KDC}$ nên $DM \perp DN$.

DF là trung tuyến của ΔMDN vuông tại D nên $FM = FD = FN$.

$\widehat{FMD} = \widehat{MBD} + \widehat{BDM}$ (tính chất góc ngoài ΔBDM)

$\widehat{FMD} = \widehat{MBD} + \widehat{CDM}$ ($\widehat{BDM} = \widehat{CDM}$)

$\widehat{MDF} = \widehat{CDF} + \widehat{CDM}$

Mà ΔFDM cân tại F nên $\widehat{FMD} = \widehat{MDF}$ nên $\widehat{MBD} = \widehat{CDF}$ hay $\widehat{CBD} = \widehat{CDF}$ (4)

ΔABC cân tại A nên $\widehat{MCD} = \widehat{ABC}$

$\widehat{MCD} = 2.\widehat{CBD}$ (Do $\widehat{ABC} = 2.\widehat{CBD}$)

$\Rightarrow \widehat{MCD} = 2.\widehat{CDF}$ (Do $\widehat{CBD} = \widehat{CDF}$)

Mà $\widehat{MCD} = \widehat{CDF} + \widehat{CFD}$ (tính chất góc ngoài ΔMCD)

$\Rightarrow 2.\widehat{CDF} = \widehat{CDF} + \widehat{CFD} \Rightarrow \widehat{CDF} = \widehat{CFD}$ (5)

Từ (4) và (5) ta có $\widehat{CBD} = \widehat{CFD}$

$\Rightarrow \Delta BDF$ cân tại D

$\Rightarrow BD = FD$

$\Rightarrow FD = \frac{1}{2} BK$

$\Rightarrow \Delta BKF$ vuông tại F.

Câu 14. (HSG 7 Mũi nhọn 2022 - 2023)

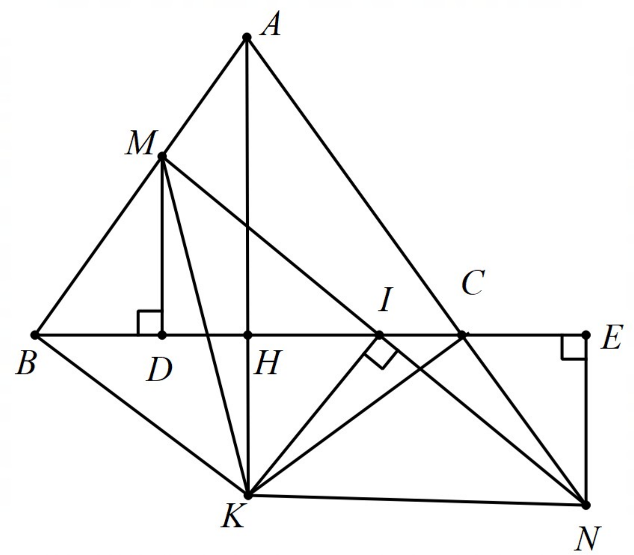
Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB, AC lần lượt ở M, N.

a) Chứng minh rằng: $DM = EN$

b) MN cắt BC tại I. Chứng minh I là trung điểm của MN

c) Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{B} = \widehat{ACB}$ (ΔABC cân tại A)

$\widehat{ACB} = \widehat{NCE}$ (2 góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{NCE}$

Xét hai tam giác vuông: ΔBMD và ΔCNE có:

$BD = CE$ (gt)

$\widehat{B} = \widehat{NCE}$ (CMT)

$\Rightarrow \Delta BMD = \Delta CNE$ (cạnh góc vuông – góc nhọn)

b) Xét hai tam giác vuông: ΔMDI và ΔCEI có:

$MD = NE$ (vì $\Delta BMD = \Delta CNE$)

$\widehat{MID} = \widehat{NIE}$ (2 góc đối đỉnh) $\Rightarrow$ $\widehat{DMI} = \widehat{ENI}$

$\Rightarrow \Delta MDI = \Delta CEI$ (cạnh góc vuông – góc nhọn)

$\Rightarrow MI = NI$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của MN

c) Kẻ $AH \perp BC$ tại H .Đường vuông góc với MN tại I cắt AH tại K.

Xét ΔAKB và ΔAKC có:

AK là cạnh chung

$\widehat{KAB} = \widehat{KAC}$ (vì ΔABC cân, $AH \perp BC$)

$AB = AC$ (ΔABC cân)

$\Rightarrow \Delta AKB = \Delta AKC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ACK} = \widehat{ABK}$ (1)

Xét ΔKBM và ΔKCN có:

$KB = KC$ ($\Delta AKB = \Delta AKC$)

$KM = KN$ (I là trung điểm MN, $KI \perp MN$ nên KI là trung trực của MN)

$BM = CN$ (vì $\Delta BMD = \Delta CNE$)

$\Rightarrow \Delta KBM = \Delta KCN$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{MBK} = \widehat{NCK}$ hay $\widehat{ABK} = \widehat{NCK}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $\widehat{ACK} = \widehat{NCK}$, mà hai góc này ở vị trí kề bù nên

$\widehat{ACK} = \widehat{NCK} = 90^\circ \Rightarrow CK \perp AC$ tại C

Vì C cố định nên K cố định (đpcm)

Câu 15. (HSG 7 Mũi nhọn 2022 - 2023)

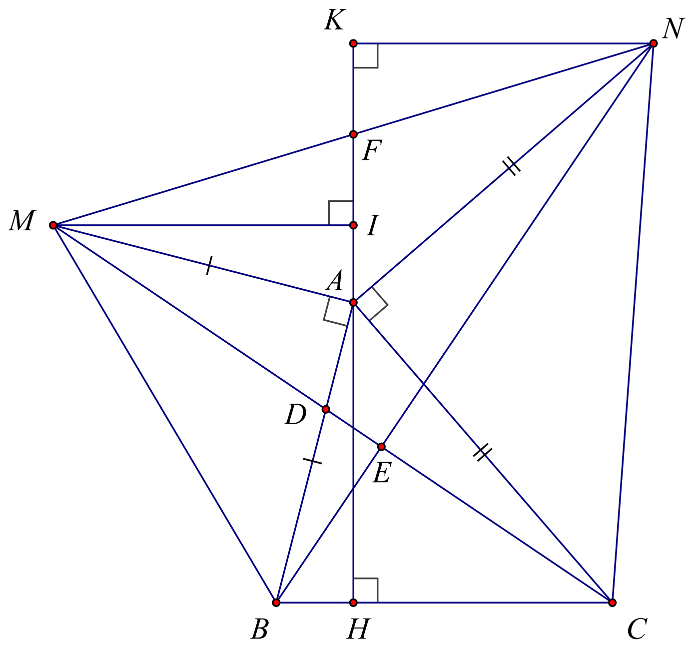
Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90°. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C vẽ đoạn thẳng AM sao cho AM vuông góc với AB và $AM = AB$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B vẽ đoạn thẳng AN sao cho AN vuông góc với AC và $AN = AC$.

1) Chứng minh rằng: Tam giác AMC và tam giác ABN bằng nhau.

2) Chứng minh: $BN \perp CM$.

3) Kẻ $AH \perp BC\ (H \in BC)$. Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN .

Lời giải



1) Ta có: $\widehat{MAC} = \widehat{MAB} + \widehat{BAC} = 90^\circ + \widehat{BAC}$,

$\widehat{NAB} = \widehat{NAC} + \widehat{BAC} = 90^\circ + \widehat{BAC}$.

Do đó: $\widehat{MAC} = \widehat{NAB}$.

Xét hai tam giác ΔAMC và ΔABN có: $MA = BA$ (gt); $CA = NA$ (gt); $\widehat{MAC} = \widehat{NAB}$.

Do đó $\Delta AMC = \Delta ABN$ (c.g.c).

2) Gọi D, E lần lượt là giao điểm của MC với AB, NB.

Ta có: $\Delta AMC = \Delta ABN$ (c.g.c) suy ra: $\widehat{AMC} = \widehat{ABN}$; $\widehat{MDA} = \widehat{BDE}$ (hai góc đối đỉnh).

Suy ra: $\widehat{BED} = 180^\circ - \left(\widehat{BDE} + \widehat{ABN}\right) = 180^\circ - \left(\widehat{AMC} + \widehat{MDA}\right) = \widehat{MAD} = 90^\circ$.

Vậy MC vuông góc với BN.

3) Gọi F là giao điểm của AH và MN. Kẻ MI, NK vuông góc với AH lần lượt tại I, K.

Ta có: $\widehat{MAI} + \widehat{BAH} = 180^\circ - \widehat{MAB} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Mà $\widehat{MAI} + \widehat{AMI} = 90^\circ$ nên $\widehat{BAH} = \widehat{AMI}$.

Xét hai tam giác vuông BAH và MAI có: $AB = AM$ (gt); $\widehat{BAH} = \widehat{AMI}$.

Do đó: $\Delta BAH = \Delta MAI$ (cạnh huyền - góc nhọn). Suy ra: $MI = AH$.

Chứng minh tương tự cũng suy ra được: $NK = AH$. Do đó $MI = NK$.

Xét hai tam giác vuông MIF và NKF có: $\widehat{MFI} = \widehat{NFK}$ (hai góc đối đỉnh); $MI = NK$.

Do đó: $\Delta MIF = \Delta NKF$ (cạnh góc vuông - góc nhọn).

Suy ra: $MF = NF$.

Vậy AH đi qua trung điểm của MN.