

**NHỊ THỨC NEWTON**

**4**

❶. Giáo viên Soạn: Đỗ Ngà FB: Đỗ Ngà

❷. Giáo viên phản biện: Nguyễn Thị Thanh Bình FB: Thanh Bình

**Kiến thức, kĩ năng**

* Xác định các hệ số trong khai triển nhị thức Newton thông qua tam giác Pascal.
* Khai triển nhị thức Newton bằng cách sử dụng tam giác Pascal hoặc sử dụng công thức tổ hợp.
* Xác định hệ số của trong khai triển thành đa thức.

**Thuật ngữ**

* Tam giác Pascal
* Hệ số
* Nhị thức Newton

Quan sát các khai triển nhị thức Newton sau:

**1**

**1 1**

**1 2 1**

**1 3 3 1**

**1 4 6 4 1**

**1 5 10 10 5 1**

…………………………………………………………………………………………………………….

Các hệ số trong khai triển của tạo thành một tam giác như ở hình trên. Có thể xác định được một hàng bất kì của tam giác này và do đó tính được các hệ số hay không?

**1. TAM GIÁC PASCAL**

**HĐ1: Khai triển**

Trong Bài 25 SGK Toán 10 (Bộ sách *Kết nối tri thức với cuộc sống*), ta đã biết:

Với , trong khai triển của mỗi nhị thức :

a) Có bao nhiêu số hạng?

b) Tổng số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng bao nhiêu?

c) Số mũ của a và b thay đổi thế nào khi chuyển từ số hạng này đến số hạng tiếp theo, tính từ trái sang phải?

|  |
| --- |
| Trong khai triển của (với ):  1. Có số hạng, số hạng đầu tiên là và số hạng cuối cùng là .  2. Tổng số mũ của và trong mỗi số hạng đều bằng .  3. Số mũ của giảm 1 đơn vị và số mũ của tăng 1 đơn vị khi chuyển từ số hạng này đến số hạng tiếp theo, tính từ trái sang phải. |

Từ những quan sát này ta có thể dự đoán, chẳng hạn:

.

Ở đây dấu “?” để chỉ các hệ số chưa biết. Để hoàn thành khai triển, ta cần xác định các hệ số này.

**HĐ2: Tam giác Pascal**

1

Viết các hệ số của khai triển với một số giá trị đầu tiên của trong bảng tam giác sau đây, gọi là tam giác Pascal

1 1

1 2 1 1 + 1 = 2

1 3 3 1 1 + 2 = 3

1 4 6 4 1 1 + 3 = 4, 3 + 3 = 6

1 5 10 10 5 1

Hàng đầu quy ước gọi là hàng 0. Hàng ứng với các hệ số trong khai triển nhị thức .

|  |
| --- |
| Trong **tam giác Pascal**:  Mọi số (khác 1) đều là tổng của hai số ở ngay phía trên nó. |

Từ tính chất này ta có thể tìm bất kì hàng nào của tam giác Pascal từ hàng ở ngay phía trên nó. Chẳng hạn ta có thể tìm hàng 6 từ hàng 5 như sau:

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1 1 + 5 =6, 5 + 10 = 15, 10 + 10 = 20

 Tìm các hàng 7 và 8 của tam giác Pascal.

**Lời giải**

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

**Ví dụ 1.**

|  |
| --- |
| Sử dụng tam giác Pascal viết khai triển của. |

**Lời giải**

Khai triển của có dạng

.

Các hệ số trong khai triển này là các hệ số ở hàng 6 của tam giác Pascal. Do đó ta có ngay

.

**Ví dụ 2.**

|  |
| --- |
| Sử dụng tam giác Pascal viết khai triển của. |

**Lời giải**

Ta viết khai triển của rồi sau đó thay vào khai triển nhận được.

Dựa vào hàng 5 của tam giác Pascal, ta có

.

Với , ta được

a) Sử dụng tam giác Pascal viết khai triển của .

**Luyện tập 1.**

b) Sử dụng tam giác Pascal viết khai triển của .

**Lời giải**

a) Dựa vào hàng 7 của tam giác Pascal, ta có

.

b) Ta viết khai triển của rồi sau đó thay vào khai triển nhận được.

Dựa vào hàng 4 của tam giác Pascal, ta có

.

Với , ta được

Dưới đây ta sẽ xây dựng công thức cho phép xác định trực tiếp hệ số bất kì trong khai triển .

**HĐ3: Tính chất của các số**

a) Quan sát ba dòng đầu, hoàn thành tiếp hai dòng cuối theo mẫu:

Nhận xét rằng các hệ số khai triển của hai số hạng cách đều số hạng đầu và số hạng cuối luôn bằng nhau. Hãy so sánh, chẳng hạn, và , và . Từ đó hãy dự đoán hệ thức giữa và .

**Lời giải**

Hệ thức giữa và là : .

b) Dựa vào kết quả của HĐ3a, ta có thể viết những hàng đầu của tam giác Pascal dưới dạng:

A picture containing chart

Description automatically generated

Từ tính chất của tam giác Pascal, hãy so sánh và , và ,…Từ đó hãy dự đoán hệ thức giữa và .

|  |
| --- |
| Tính chất của các số :   * (Tính chất đối xứng). * (Hệ thức Pascal). |

 Hãy chứng minh các công thức trên bằng cách sử dụng công thức tính số các tổ hợp.

**Lời giải**

Chứng minh

Với , ta có (đẳng thức được chứng minh)

Chứng minh

Với , ta có

(đẳng thức được chứng minh).



**NHỊ THỨC NEWTON**

**4**

❶. Giáo viên Soạn: MINH HẢI FB: Minh Hải Bùi

❷. Giáo viên phản biện : Nguyễn Thị Hiên FB: Nguyễn Hiên

**2. CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON**

**HĐ4.**

Quan sát khai triển nhị thức của với ở HĐ3, hãy dự đoán công thức khai triển trong trường hợp tổng quát.

|  |
| --- |
|  |

***Chứng minh***

Ta chứng minh (1) bằng phương pháp quy nạp theo .

* Khi , ta có :

Vậy công thức (1) đúng với .

* Với giả thiết (1) là đúng với , tức là ta có :

.

Ta sẽ chứng minh

. (2)

Thật vậy, ta có

Vì , nên ta có (2)

Vậy công thức nhị thức Newton là đúng với mọi số nguyên dương .

**Chú ý:** Số hạng thứ trong khai triển của thành dạng (1) là *.*

**Ví dụ 3.**

|  |
| --- |
| Viết khai triển nhị thức Newton . |

**Lời giải**

Ta có :

*.*

Như vậy ta tìm lại được kết quả của Ví dụ 1, nhưng bằng phương pháp khác.

**Chú ý:** Vì nên ta chỉ cần tính và dùng tính chất này để suy ra .

**Ví dụ 4.**

|  |
| --- |
| Khai triển biểu thức . |

**Lời giải**

Theo công thức nhị thức Newton, ta có :

Khai triển biểu thức

**Luyện tập 2.**

Theo công thức nhị thức Newton, ta có:

**Lời giải**

|  |
| --- |
| Số hạng chứa trong khai triển của là hay .Do đó hệ số của trong khai triển của là . |

**Ví dụ 5.**

|  |
| --- |
| Tìm hệ số của trong khai triển của . |

Số hạng chứa trong khai triển của là .

**Lời giải**

Số hạng chứa ứng với , tức là số hạng hay .

Vậy hệ số của trong khai triển của là .

Tìm hệ số của trong khai triển thành đa thức của .

**Luyện tập 3.**

Số hạng chứa trong khai triển của là

**Lời giải**

Số hạng chứa ứng với , tức là số hạng .

Vậy hệ số của trong khai triển của là.

**Ví dụ 6.**

|  |
| --- |
| Tìm số nguyên dương thỏa mãn . |

Nhận thấy vế trái của đẳng thức trên cóa chứa các lũy thừa của 3 nên áp dụng khai triển nhị thức Newton cho ta được

**Lời giải**

Cho ta được

Vậy số nguyên dương cần tìm là .

*(Số các tập con của tập hợp có phần tử)*

**Vận dụng.**

1. Viết khai triển nhị thức Newton của
2. Cho trong khai triển ở câu a), viết đẳng thức nhận được. Giải thích ý nghĩa của đẳng thức này với lưu ý rằng chính là số tập con gồm phần tử của một tập hợp có phần tử.
3. Tương tự, cho trong khai triển ở câu a), viết đẳng thức nhận được. Giải thích ý nghĩa của đẳng thức này.

**BÀI TẬP**

1. Sử dụng tam giác Pascal, viết khai triển:

**a)** ; **b)** .

1. Viết khai triển theo nhị thức Newton:

**a)** ; **b)** .

1. Tìm hệ số của trong khai triển của .
2. Biết hệ số của trong khai triển của là . Tìm .
3. Từ khai triển biểu thức thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức nhận được.
4. Tìm hệ số của trong khai triển thành đa thức của biểu thức

.

1. Tính tổng sau đây:

1. Tìm số tự nhiên thỏa mãn .
2. Tìm số nguyên dương sao cho .
3. Biết rằng . Với giá trị nào của thì lớn nhất?

**Em có biết?**

* Tam giác Pascal được đặt theo tên nhà toán học người Pháp Blaise Pascal. Ông là người có công lớn trong việc mở ra hai lĩnh vực mới trong toán học là Hình học xạ ảnh và Lí thuyết xác suất.

Thật ra tam giác Pascal đã được nghiên cứu từ nhiều thế kỉ trước đó bởi các nhà toán học Ấn Độ, Ba Tư, Trung Hoa, Đức, Ý.

**A picture containing graphical user interface

Description automatically generated**

* Nhị thức Newton được đặt theo tên nhà bác học người Anh Isaac Newton. Ông được biết đến như một trong những nhà toán học vĩ đại nhất của mọi thời đại, đồng thời là một trong những nhà khoa học có ảnh hưởng nhất trong lịch sử khoa học.

Thật ra công thức nói tới được biết đến từ trước Newton là người có công mở rộng công thức cho trường hợp là số thực!

A picture containing text

Description automatically generated

**BÀI TẬP**

1. Sử dụng tam giác Pascal, viết khai triển:

**a)** ; **b)** .

**Lời giải**

**a)** Dựa vào hàng 5 của tam giác Pascal, ta có

**.**

**b)** Dựa vào hàng 4 của tam giác Pascal, ta có

1. Viết khai triển theo nhị thức Newton:

**a)** ; **b)** .

**Lời giải**

**a)** Ta có

**b)** Ta có

**.**

1. Tìm hệ số của trong khai triển của .

Số hạng chứa trong khai triển của là

**Lời giải**

Số hạng chứa ứng với , tức là số hạng .

Vậy hệ số của trong khai triển của là .

1. Biết hệ số của trong khai triển của là . Tìm .

Số hạng chứa trong khai triển của là .

**Lời giải**

hệ số của trong khai triển của ứng với .

Có :

1. Từ khai triển biểu thức thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức nhận được.

Ta có

**Lời giải**

Tổng các hệ số của khai triển là:

1. Tìm hệ số của trong khai triển thành đa thức của biểu thức

.

Ta có hệ số của trong khai triển thành đa thức của biểu thức là:

**Lời giải**

1. Tính tổng sau đây:

Ta có

**Lời giải**

1. Tìm số tự nhiên thỏa mãn .

Xét khai triển:

**Lời giải**

*\**

*\**

*Ta có : ==*

1. Tìm số nguyên dương sao cho .

Ta có :

**Lời giải**

1. Biết rằng . Với giá trị nào của thì lớn nhất?

Ta có : .

**Lời giải**

lớn nhất.



**BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 2**

❶. Giáo viên Soạn: Hoàng Thị Hà FB: Hà Hoàng

❷. Giáo viên phản biện :Nguyễn Thị Kim Xuyến FB: Kim Xuyến

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên , ta có

**2. 19.**

**(1)**

**Lời giải**

Ta chứng minh (1) bằng quy nạp theo .

- Với thì mệnh đề trên trở thành: . Vậy (1) đúng với

- Giả sử (1) đúng với , tức là  **(2)**

Ta cần chứng minh (1) đúng với , tức là  **(3)**

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có .

Vậy (1) đúng với mọi số tự nhiên .

Đặt .

**2. 20.**

a) Tính

b) Dự đoán công thức tính tổng và chứng minh nó bằng quy nạp.

**Lời giải**

a) Ta có: ; ; .

b) Dự đoán .

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp.

- Rõ ràng , tức công thức đúng với .

- Giả sử với .

- Ta cần chứng minh

- Ta có

Vậy ta có công thức .

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên , ta có chia hết cho .

**2. 21.**

**Lời giải**

Ta sẽ chứng minh “ chia hết cho ” bằng quy nạp.

- Với thì chia hết cho ” (đúng vì ).

- Giả sử đúng với . Khi đó với .

- Ta sẽ chứng mình đúng. Thật vậy, ta có chia hết cho .

Vậy ta có “ chia hết cho ” đúng với mọi số tự nhiên .

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên , ta có (\*).

**2. 22.**

**Lời giải**

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp.

- Với ta có (đúng).

- Giả sử (\*) đúng với , tức là , ta cần chứng minh (\*) đúng với .

Thật vậy, ta có: hay .

Vậy với mọi số tự nhiên .

a) Khai triển b) So sánh và 2.

**2. 23.**



**Lời giải**

b) Theo câu a) ta có . Suy ra, hay .

Tìm hệ số của trong khai triển thành đa thức của .

**2. 24.**

**Giải:**

Số hạng chứa trong khai triển của là

Số hạng chứa tương ứng với tức là số hạng hay .

Vậy hệ số của trong khai triển của là .

Khai triển thành đa thức thành dạng

**2. 25.**

.

Tìm hệ số lớn nhất.

**Lời giải**

Số hạng tổng quát trong khai triển của là nên có hệ số .

Xét

Tương tự, .

Do đó, và .

Vậy hệ số lớn nhất là: .

Chứng minh rằng .

**2. 26.**

Áp dụng : Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

**Lời giải**

Ta có ,

.

Suy ra hay ;

hay ;

Vậy .

Ta có .

Vậy .

Tìm giá trị lớn nhất trong các giá trị

**2. 27.**

Áp dụng: Tìm hệ số lớn nhất của khai triển , biết rằng tổng các hệ số của khai triển bằng 4096.

**Lời giải**

a) Xét .

+ Nếu thì và .

+ Nếu thì .

Vậy giá trị lớn nhất trong các giá trị là , với là phần nguyên của số

b) Số hạng tổng quát của khai triển là , nên có hệ số là .

Tổng các hệ số là .

Áp dụng kết quả trên, hệ số lớn nhất của khai triển là .

Tìm số hạng có giá trị lớn nhất của khaị triển với

**2. 28.**

**Lời giải**

Số hạng tổng quát của khai triển là , .

Nếu thì số hạng lớn nhất là .

Nếu :

Xét

.

Vì nên .

- Nếu thì . Do đó, .

- Nếu thì gọi là số nguyên lớn nhất không vượt quá .

Khi đó theo trên, . Suy ra .