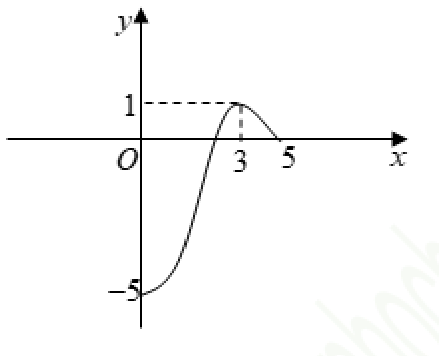
Dạng 4. Ứng dụng tích phân để giải quyết một số bài toán khác

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ được cho như hình bên.



Tìm mệnh đề đúng

A. $f(0) = f(5) < f(3)$.

B. $f(3) < f(0) = f(5)$.

C. $f(3) < f(0) < f(5)$.

D. $f(3) < f(5) < f(0)$.

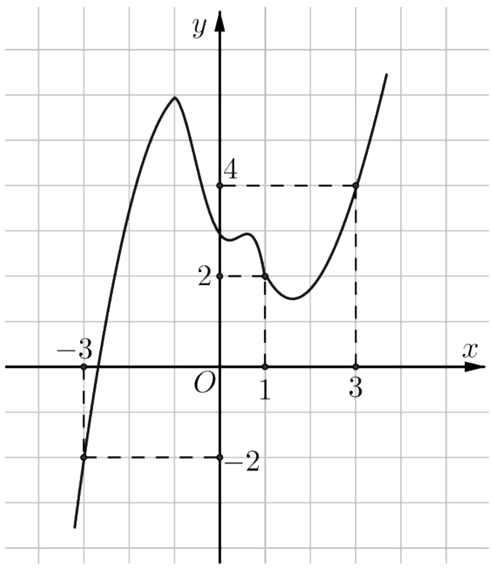
Lời giải

Ta có $\int_3^5 f'(x)\mathrm{d}x = f(5) - f(3) > 0$, do đó $f(5) > f(3)$.

$\int_0^3 f'(x)\mathrm{d}x = f(3) - f(0) < 0$, do đó $f(3) < f(0)$

$\int_0^5 f'(x)\mathrm{d}x = f(5) - f(0) < 0$, do đó $f(5) < f(0)$

Câu 2. **(Mã 110 B 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(1) > g(-3) > g(3)$

B. $g(1) > g(3) > g(-3)$

C. $g(3) > g(-3) > g(1)$

D. $g(-3) > g(3) > g(1)$

Lời giải

Chọn B

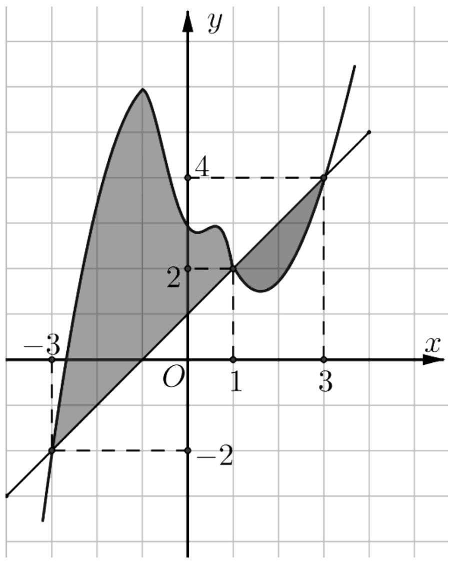
Ta có $g'(x)=2f'(x)-2(x+1)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\pm 3 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-\infty$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(-3)$	↗	$g(1)$	↘	$g(3)$	↗	$+\infty$

Suy ra $g(-3)<g(1)$ và $g(3)<g(1)$. (1)



Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=f'(x),\ y=x+1,\ x=-3,\ x=1$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=x+1,\ y=f'(x),\ x=1,\ x=3$

Dựa vào hình vẽ, ta thấy: $S_1>S_2>0$.

Suy ra: $S_1-S_2>0$

$$\Rightarrow \int_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}\left[(x+1)-f'(x)\right]\mathrm{d}x>0$$

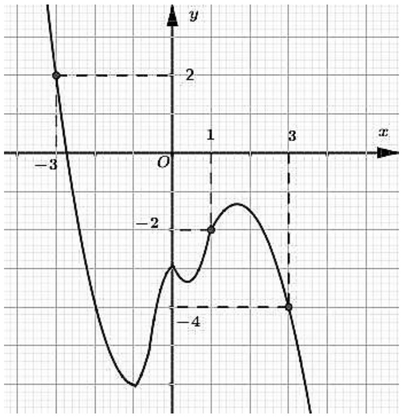
$$\Rightarrow \int_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x>0$$

$$\Rightarrow \int_{-3}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x>0.$$

Khi đó: $g(3)-g(-3)=\int\limits_{-3}^{3} g'(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-3}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x > 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $g(1) > g(3) > g(-3)$.

Câu 3. **(Mã 105 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ của hàm số như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)+x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(3)<g(-3)<g(1)$ **B.** $g(1)<g(-3)<g(3)$

C. $g(-3)<g(3)<g(-1)$ **D.** $g(1)<g(3)<g(-3)$

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=2f'(x)+2x \Rightarrow g'(x)=0 \Rightarrow x\in\{-3;1;3\}$.

Từ đồ thị của $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$.

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-3)$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$g(3)$	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra $g(3)>g(1)$.

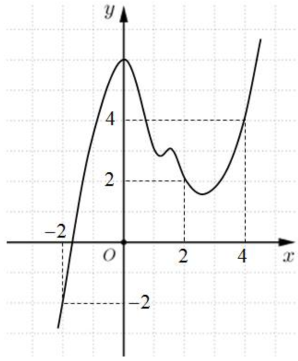
Kết hợp với BBT ta có:

$$\int_{-3}^{1}\left(-g'(x)\right)\mathrm{d}x > \int_{1}^{3} g'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_{1}^{-3} g'(x)\mathrm{d}x > \int_{1}^{3} g'(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow g(-3)-g(1) > g(3)-g(1) \Leftrightarrow g(-3) > g(3)$$

Vậy ta có $g(-3)>g(3)>g(1)$.

Câu 4. **(Mã123 2017)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Đặt $h\left(x\right)=2f\left(x\right)-x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $h\left(4\right)=h\left(-2\right)<h\left(2\right)$ **B.** $h\left(2\right)>h\left(-2\right)>h\left(4\right)$

C. $h\left(4\right)=h\left(-2\right)>h\left(2\right)$ **D.** $h\left(2\right)>h\left(4\right)>h\left(-2\right)$

Lời giải

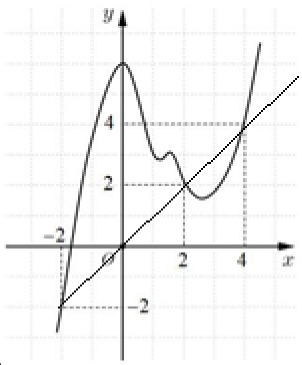
Chọn D

Ta có $h'\left(x\right)=2\left[f'\left(x\right)-x\right];h'\left(x\right)=0\Rightarrow x\in\left\{-2;2;4\right\}$.

Bảng biến thiên

x		-2		2		4	
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	↘	$h(-2)$	↗	$h(2)$	↘	$h(4)$	↗

Suy ra $h\left(2\right)>h\left(4\right)$.

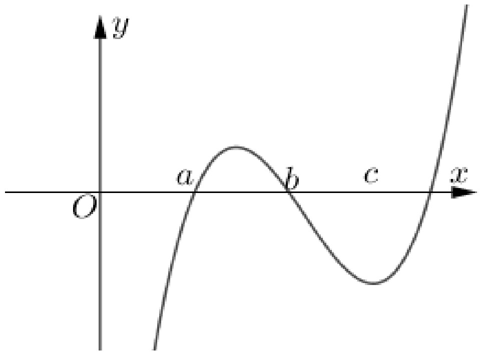


Kết hợp với đồ thị hàm số y=x ta có

$$\int_{-2}^{4}h'\left(x\right)\mathrm{d}x>0\Leftrightarrow h\left(4\right)-h\left(-2\right)>0\Leftrightarrow h\left(4\right)>h\left(-2\right).$$

Vậy ta có $h\left(2\right)>h\left(4\right)>h\left(-2\right)$.

Câu 5. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $f\left(b\right)>f\left(a\right)>f\left(c\right)$. B. $f\left(a\right)>f\left(b\right)>f\left(c\right)$.

C. $f\left(c\right)>f\left(a\right)>f\left(b\right)$. D. $f\left(c\right)>f\left(b\right)>f\left(a\right)$.

Lời giải

Chọn A

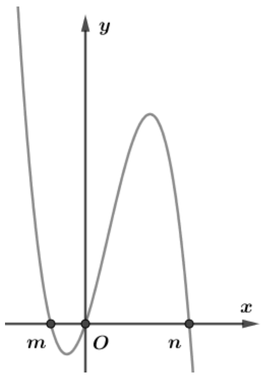
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	

Ta có $S_1=\int_a^b\left|f'(x)\right|dx=\int_a^b f'(x)dx=f\left(b\right)-f\left(a\right)$, $S_2=\int_b^c\left|f'(x)\right|dx=-\int_b^c f'(x)dx=f\left(b\right)-f\left(c\right)$.

Vì $\begin{cases}S_1<S_2\Leftrightarrow f\left(b\right)-f\left(a\right)<f\left(b\right)-f\left(c\right)\Leftrightarrow f\left(c\right)<f\left(a\right)\\ \int_a^b f'(x)dx>0\Leftrightarrow f\left(b\right)>f\left(a\right)\end{cases}\Rightarrow f\left(c\right)<f\left(a\right)<f\left(b\right)$

Câu 6. **(Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc bốn, có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



Phương trình $f\left(x\right)=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

A. $f\left(0\right)<0<f\left(m\right)$. B. $f\left(0\right)>0$.

C. $f\left(m\right)<0<f\left(n\right)$. D. $f\left(0\right)<0<f\left(n\right)$.

Lời giải

<u>**Chọn A**</u>

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=m \\ x=n \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		m		0		n		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(m)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(n)$	$\searrow$	$-\infty$

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=f'(x)$; $Ox; x=m; Oy$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=f'(x); Oy; x=n$

Từ hình vẽ ta thấy $S_2 > S_1$

$$\Leftrightarrow \int_0^n |f'(x)|dx > \int_m^0 |f'(x)|dx$$

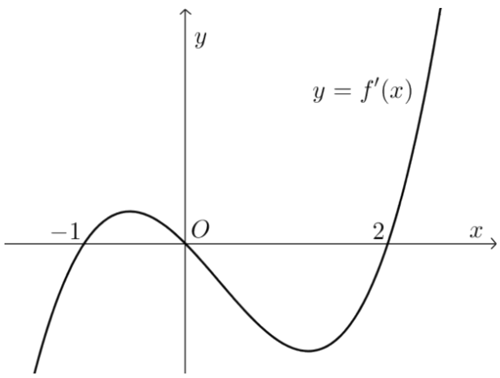
$$\Leftrightarrow \int_0^n f'(x)dx > \int_m^0 -f'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow f(n)-f(0) > -[f(0)-f(m)]$$

$$\Leftrightarrow f(n) > f(m).$$

Từ bảng biến thiên kết hợp với điều kiện $f(n) > f(m)$ ta thấy để phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow f(0) < 0 < f(m)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $f(0) > f(2) > f(-1)$.

<u>**B.**</u> $f(0) > f(-1) > f(2)$.

C. $f(2)>f(0)>f(-1)$. **D.** $f(-1)>f(0)>f(2)$.

Lời giải

Theo đồ thị, ta có:

$$f(0)-f(-1)=\int_{-1}^{0} f'(x)\mathrm{d}x>0$$

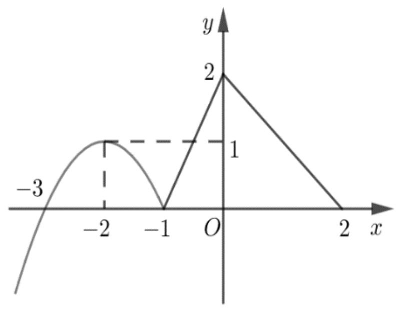
$$\Rightarrow f(0)>f(-1)\ (1),$$

$$f(2)-f(-1)=\int_{-1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} f'(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2} f'(x)\mathrm{d}x<0$$

$$\Rightarrow f(-1)>f(2)\ (2).$$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow f(0)>f(-1)>f(2)$.

Câu 8. **(Phú Thọ -2019)** Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$.)



Biết $f(-3)=0,$ giá trị của $f(-1)+f(1)$ bằng

A. $\dfrac{23}{6}$ **B.** $\dfrac{31}{6}$ **C.** $\dfrac{35}{3}$ **D.** $\dfrac{9}{2}$

Lời giải

Chọn B

Parabol $y=ax^2+bx+c$ có đỉnh $I(-2;1)$ và đi qua điểm $(-3;0)$ nên ta có

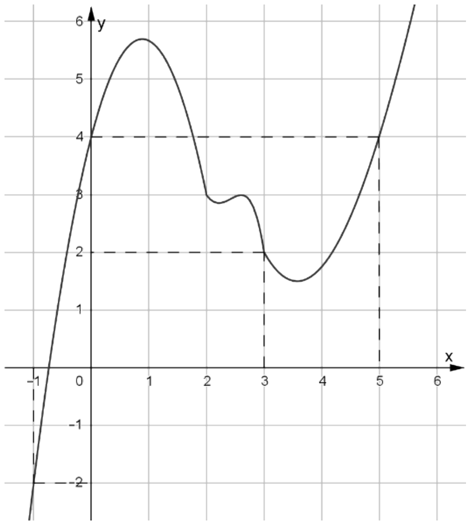
$$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=-2\\ 4a-2b+c=1\\ 9a-3b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=-4\\ c=-3\end{cases}\Rightarrow y=-x^2-4x-3.$$

Do $f(-3)=0$ nên $f(-1)+f(1)=\left[f(1)-f(0)\right]+\left[f(0)-f(-1)\right]+2\left[f(-1)-f(-3)\right]$

$$=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^0 f'(x)\mathrm{d}x+2\int_{-3}^{-1}\left(-x^2-4x-3\right)\mathrm{d}x=S_1+S_2+2\int_{-3}^{-1}\left(-x^2-4x-3\right)\mathrm{d}x=1+\frac{3}{2}+\frac{8}{3}=\frac{31}{6}.$$

Với S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=-1, x=0$ và $x=0, x=1$. Dễ thấy $S_1=1$; $S_2=\frac{3}{2}$.

Câu 9. **(THPT Lương Văn Can - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=2f(x)-(x-1)^2$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(-1)<g(3)<g(5)$. **B.** $g(-1)<g(5)<g(3)$.

C. $g(5)<g(-1)<g(3)$. **D.** $g(3)<g(5)<g(-1)$.

Lời giải

Ta có $g'(x)=2\left[f'(x)-(x-1)\right]$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1$.

Dựa vào đồ thị ta có các nghiệm sau: $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

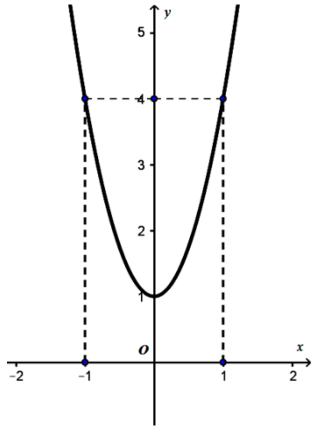
x	$-\infty$		-1		3		5		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(3)$	$\searrow$	$g(5)$	$\nearrow$	

Ngoài ra dựa vào đồ thị ta có $\frac{1}{2}\int_{-1}^{3} g'(x)\mathrm{d}x > -\frac{1}{2}\int_{3}^{5} g'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow g(x)\Big|_{-1}^{3} > -g(x)\Big|_{3}^{5}$

$\Leftrightarrow g(3)-g(-1)>g(3)-g(5) \Leftrightarrow g(5)>g(-1)$.

Vậy $g(3) > g(5) > g(-1)$.

Câu 10. **(THPT Hậu Lộc 2 - 2018)** Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\left(a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0\right)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$?



A. $H = 45$. **B.** $H = 64$. **C.** $H = 51$. **D.** $H = 58$.

Lời giải

Theo bài ra $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\left(a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0\right)$ do đó $y = f'(x)$ là hàm bậc hai có dạng $y = f'(x) = a'x^2 + b'x + c'$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\begin{cases} c' = 1 \\ a' - b' + c' = 4 \\ a' + b' + c' = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 3 \\ b' = 0 \\ c' = 1 \end{cases} \Rightarrow y = f'(x) = 3x^2 + 1$.

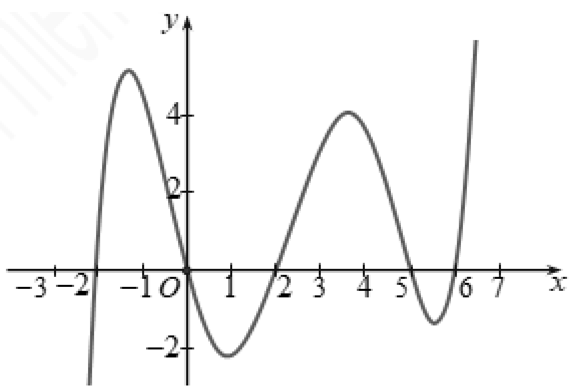
Gọi S là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, trục Ox, $x = 4$, $x = 2$.

Ta có $S = \int\limits_2^4 \left(3x^2 + 1\right) \mathrm{dx} = 58$.

Lại có: $S = \int\limits_2^4 f'(x) \mathrm{dx} = f(x)\Big|_2^4 = f(4) - f(2)$.

Do đó: $H = f(4) - f(2) = 58$.

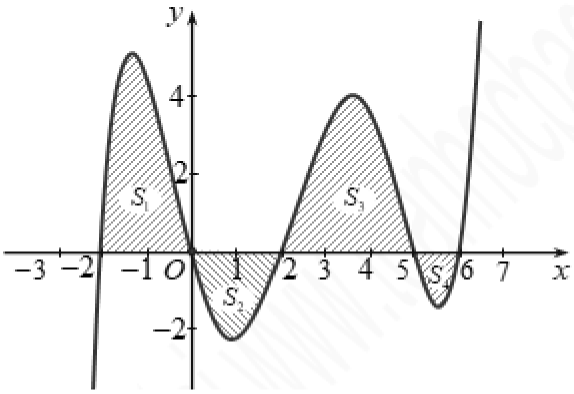
Câu 11. **(Thanh Hóa - 2018)** Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $M = \max\limits_{[-2;6]} f(x)$, $m = \min\limits_{[-2;6]} f(x)$, $T = M + m$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $T=f(0)+f(-2)$. **B.** $T=f(5)+f(-2)$.

C. $T=f(5)+f(6)$. **D.** $T=f(0)+f(2)$.

Lời giải



Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ với và trục hoành.

Quan sát hình vẽ, ta có

◈ $\int\limits_{-2}^{0} f'(x)\mathrm{d}x > \int\limits_{0}^{2} -f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{-2}^{0} > f(x)\Big|_{2}^{0}$

$\Leftrightarrow f(0)-f(-2)>f(0)-f(2) \Leftrightarrow f(-2)<f(2)$

◈ $\int\limits_{0}^{2} -f'(x)\mathrm{d}x < \int\limits_{2}^{5} f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{2}^{0} < f(x)\Big|_{2}^{5}$

$\Leftrightarrow f(0)-f(2)<f(5)-f(2) \Leftrightarrow f(0)<f(5)$

◈ $\int\limits_{2}^{5} f'(x)\mathrm{d}x > \int\limits_{5}^{6} -f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{2}^{5} > f(x)\Big|_{6}^{5}$

$\Leftrightarrow f(5)-f(2)>f(5)-f(6) \Leftrightarrow f(2)<f(6)$

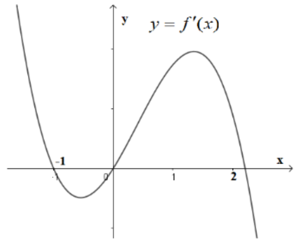
Ta có bảng biến thiên

x	-2		0		2		5		6
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(5)$	$\searrow$	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $M=\max\limits_{[-2;6]} f(x)=f(5)$ và $m=\min\limits_{[-2;6]} f(x)=f(-2)$

Khi đó $T=f(5)+f(-2)$.

Câu 12. **(THPT Thăng Long 2019)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?



A. $a+c>0$. **B.** $a+b+c+d<0$.

C. $a+c<b+d$. **D.** $b+d-c>0$.

Lời giải

Chọn A

Theo đồ thị ta có $f'(0)=0 \Leftrightarrow d=0$ và hệ số $a<0$.

Xét $\int_{-1}^{0} f'(x)dx = f(x)\Big|_{-1}^{0} = -a+b-c+d$, mà $\int_{-1}^{0} f'(x)dx<0$ nên ta có $-a+b-c+d<0$ (1)

Hay $a+c>b+d$. Do đó ta loại **C.**

Thay $d=0$ ta có $a>b-c$, vì $a<0$ nên $b-c<0$. Loại **D.**

Xét $\int_{0}^{1} f'(x)dx = f(x)\Big|_{0}^{1} = a+b+c+d$, mà $\int_{0}^{1} f'(x)dx>0$ nên ta có $a+b+c+d>0$ (2).

Do đó ta loại **B.**

Từ (2) ta có $-a-b-c-d<0$ cộng từng vế với (1) ta có $a+c>0$

Câu 13. **(THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội – 2022)** $\int_0^4 \min\{2x+1, x+2, -3x+14\}dx$ bằng

A. $\frac{31}{2}$.

B. 30.

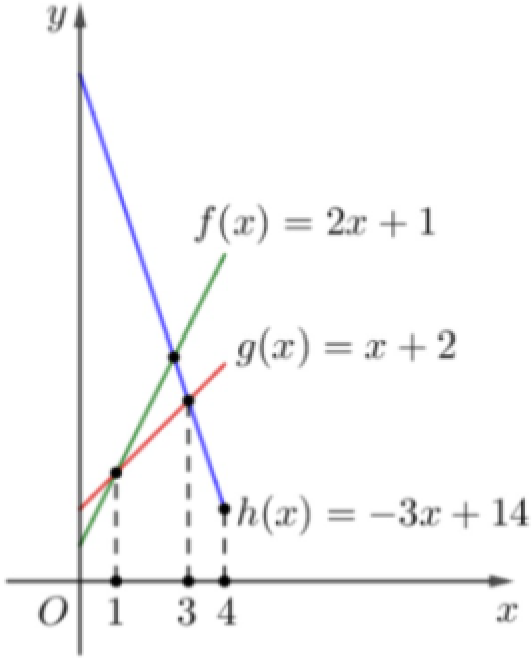
C. $\frac{27}{2}$.

D. 36.

Lời giải

Xét $2x+1=x+2 \Leftrightarrow x=1; x+2=-3x+14 \Leftrightarrow x=3; -3x+14=2x+1 \Leftrightarrow x=\frac{13}{5}$.

Vẽ đồ thị của ba hàm số $f(x)=2x+1; g(x)=x+2; h(x)=-3x+14$ trên đoạn $[0;4]$ trên cùng một hệ trục toạ độ và quan sát suy ra:



$\min\{2x+1, x+2, -3x+14\} = 2x+1, \forall x \in [0;1]$
$\min\{2x+1, x+2, -3x+14\} = x+2, \forall x \in [1;3]$
$\min\{2x+1, x+2, -3x+14\} = -3x+14, \forall x \in [3;4]$

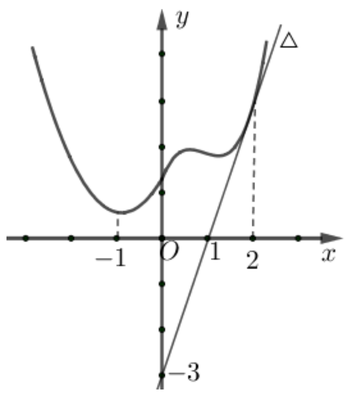
Khi đó $\int_0^4 \min\{2x+1, x+2, -3x+14\}dx = \int_0^1 (2x+1)dx + \int_1^3 (x+2)dx + \int_3^4 (-3x+14)dx = \frac{27}{2}$.

Cách 2: Dùng công thức $\min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$ và $\min\{a,b,c\} = \min\{a, \min\{b,c\}\}$ khi đó $\min\{x+2, -3x+14\} = \frac{x+2-3x+14-|(x+2)-(-3x+14)|}{2} = -x+8-|2x-6|$.

Suy ra $\min\{2x+1, x+2, -3x+14\} = \min\{2x+1, \min\{x+2, -3x+14\}\} = \frac{2x+1-x+8-|2x-6|-|2x+1-(-x+8-|2x-6|)|}{2}$.

Tích phân cần tính bằng $\int_0^4 \frac{2x+1-x+8-|2x-6|-|2x+1-(-x+8-|2x-6|)|}{2}dx = \frac{27}{2}$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$, có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $x = 2$. Tính $\int_1^4 f''(x-2)\mathrm{d}x$



A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

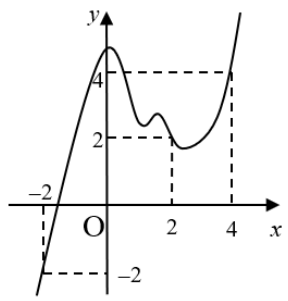
Chọn C

Dễ thấy đường thẳng Δ đi qua các điểm $(0;-3)$ và $(1;0)$ nên $\Delta: y=3x-3$ suy ra hệ số góc của Δ là $k=3 \Rightarrow f'(2)=3$.

Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ suy ra $f'(-1)=0$.

Vậy $\int\limits_1^4 f''(x-2)\mathrm{d}x = f'(x-2)\Big|_1^4 = f'(2)-f'(-1)=3-0=3$.

Câu 15. **(SGD Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị của biểu thức $I=\int\limits_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 10.

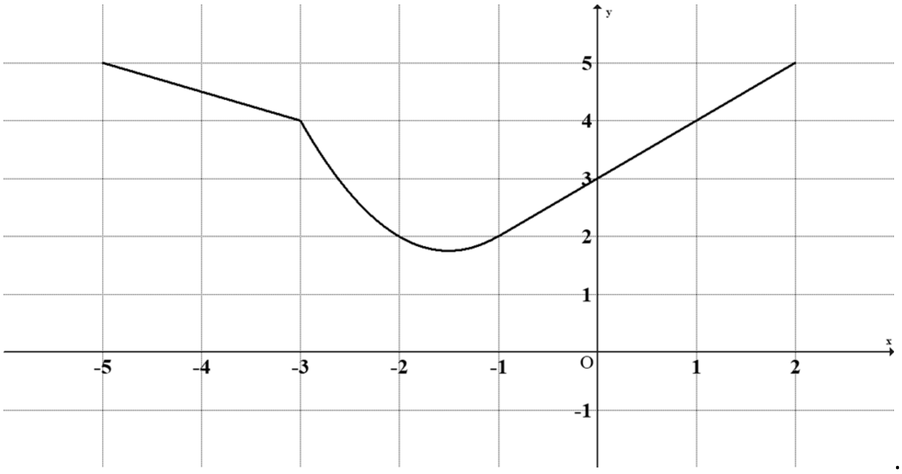
Lời giải

Chọn C

Xét $I=\int\limits_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}x=\int\limits_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}(x-2)+\int\limits_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}(x+2)$

$$=f(x-2)\Big|_0^4+f(x+2)\Big|_0^2=\left[f(2)-f(-2)\right]+\left[f(4)-f(2)\right]=f(4)-f(-2)=4-(-2)=6.$$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục có đồ thị như hình bên dưới.



Biết $F'(x)=f(x),\forall x\in[-5;2]$ và $\int_{-3}^{-1} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{14}{3}$. Tính $F(2)-F(-5)$

A. $\dfrac{-145}{6}$. **B.** $\dfrac{-89}{6}$. **C.** $\dfrac{145}{6}$. **D.** $\dfrac{89}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta nhận thấy, đồ thị hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên đoạn $[-5;2]$được xây dựng bởi ba hàm số $f(x)=\begin{cases} f_1(x)\text{khi}-5\le x<-3 \\ f_2(x)\text{khi}-3\le x\le -1 \\ f_3(x)\text{khi}-1<x\le 2 \end{cases}$. Trong đó:.

$f_1(x)$ là đường thẳng qua hai điểm $(-5;5)$ và $(-3;4)$ có phương trình: $f_1(x)=\dfrac{-x+5}{2}$.

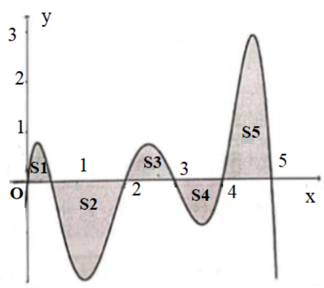
$f_2(x)$ có đồ thị là một đường cong nối từ điểm $(-3;4)$ đến điểm $(-1;2)$.

$f_3(x)$ là đường thẳng qua hai điểm $(-1;2)$ và $(0;3)$ có phương trình $f_3(x)=x+3$.

Vậy: $F(2)-F(-5)=\int_{-5}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-5}^{-3} f_1(x)\mathrm{d}x+\int_{-3}^{-1} f_2(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2} f_3(x)\mathrm{d}x$.

$=\int_{-5}^{-3}\dfrac{-x+5}{2}\mathrm{d}x+\int_{-3}^{-1} f_2(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2}(x+3)\mathrm{d}x==9+\dfrac{14}{3}+\dfrac{21}{2}=\dfrac{145}{6}$.

Câu 17. **(Chuyên Long An - 2021)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và diện tích hình phẳng trong hình bên là $S_1=3,S_2=10,S_3=5,S_4=6,S_5=16$. Tính tích phân $\int_{-3}^{4} f(|x+1|)dx$.



A. 1 **B.** 53 **C.** 10 **D.** 4

Lời giải

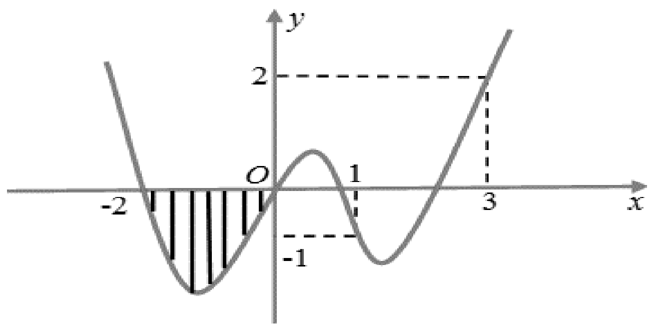
Chọn A

Ta có: $\int_{-3}^{4} f(|x+1|)dx = \int_{-3}^{-1} f(-x-1)dx + \int_{-1}^{4} f(x+1)dx = -\int_{2}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{5} f(u)du$

$= \int_{0}^{2} f(t)dt + \int_{0}^{5} f(u)du = S_1 - S_2 + S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5 = 1$

Câu 18. **(Cụm Ninh Bình – 2021)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng phần sọc kẻ bằng 3. Tính giá trị của biểu thức:

$T = \int_1^2 f'(x+1)\mathrm{dx} + \int_2^3 f'(x-1)\mathrm{dx} + \int_3^4 f(2x-8)\mathrm{dx}$



A. $T = \frac{9}{2}$. **B.** $T = 6$. **C.** $T = 0$. **D.** $T = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng phần sọc kẻ bằng 3

$\Rightarrow \int_{-2}^{0} |f(x)|\mathrm{dx} = 3 \Leftrightarrow -\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{dx} = 3 \Leftrightarrow \int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{dx} = -3$

Ta có: $T = \int_1^2 f'(x+1)\mathrm{dx} + \int_2^3 f'(x-1)\mathrm{dx} + \int_3^4 f(2x-8)\mathrm{dx}$

$= f(x+1)\Big|_1^2 + f(x-1)\Big|_2^3 + \int_3^4 f(2x-8)\mathrm{dx}$

$= f(3) - f(2) + f(2) - f(1) + \int_3^4 f(2x-8)\mathrm{dx}$

$= 2 - (-1) + \int_3^4 f(2x-8)\mathrm{dx} = 3 + \int_3^4 f(2x-8)\mathrm{dx}$

Đặt $t = 2x - 8 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

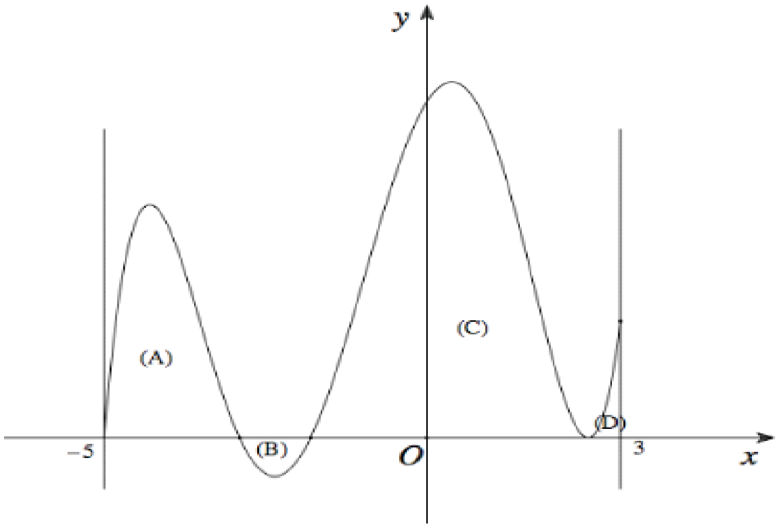
Đổi cận:

$x = 3 \Rightarrow t = -2$

$x = 4 \Rightarrow t = 0$

Suy ra: $T=3+\int\limits_{-2}^{0} f(t)\frac{1}{2}\mathrm{dt}=3+\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0} f(t)\mathrm{dt}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết diện tích của hình phẳng $(A),(B),(C),(D)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành lần lượt là $6;\ 3;\ 12;\ 2$. Tính tích phân $\int_{-3}^{1}\left[2f(2x+1)+1\right]dx$ bằng



A. 27. **B.** 25. **C.** 17. **D.** 21.

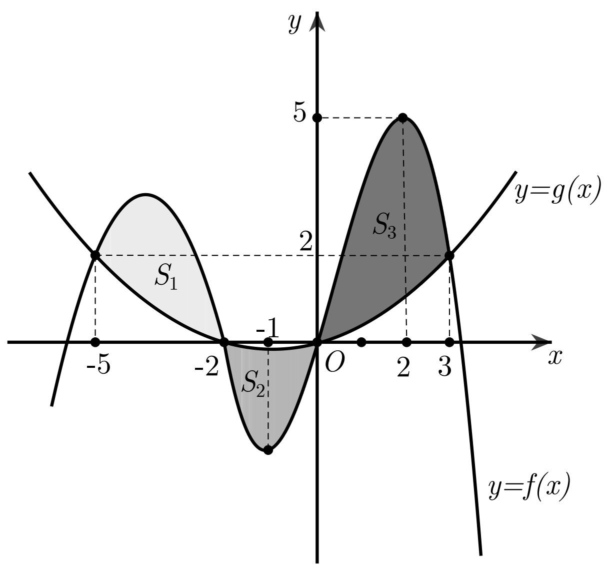
Hướng dẫn giải

Ta có $\int_{-3}^{1}\left[2f(2x+1)+1\right]dx=2\int_{-3}^{1} f(2x+1)dx+x\Big|_{-3}^{1}=\int_{-5}^{3} f(x)dx+4$

Mà $\int_{-5}^{3} f(x)dx=S_{(A)}-S_{(B)}+S_{(C)}+S_{(D)}=6-3+12+2=17$

Vậy $\int_{-3}^{1}\left[2f(2x+1)+1\right]dx=21$

Câu 20. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng $S_1,\ S_2,\ S_3$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và đường parabol $y=g(x)=ax^2+bx+c$ lần lượt là m,n,p.



Tích phân $\int\limits_{-5}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-m+n-p-\frac{208}{45}$. **B.** $m-n+p+\frac{208}{45}$ **C.** $m-n+p-\frac{208}{45}$. **D.** $-m+n-p+\frac{208}{45}$.

Lời giải

Chọn B

$$S_1=\int\limits_{-5}^{-2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-5}^{-2}f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-5}^{-2}g(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_{-5}^{-2}f(x)\,\mathrm{d}x=S_1+\int\limits_{-5}^{-2}g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$S_2=\int\limits_{-2}^{0}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}g(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-2}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_{-2}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}g(x)\,\mathrm{d}x-S_2.$$

$$S_3=\int\limits_{-5}^{-2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{3}g(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_{0}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x=S_1+\int\limits_{0}^{3}g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Do vậy: $\int\limits_{-5}^{3}f(x)dx=S_1-S_2+S_3+\int\limits_{-5}^{3}g(x)dx.$

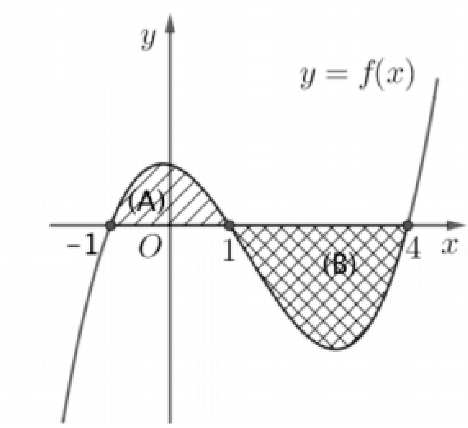
Từ đồ thị ta thấy $\int\limits_{-5}^{3}g(x)dx$ là số dương. Mà 4 đáp án chỉ có B là phù hợp, nên ta chọn**B.**

Chú ý: Có thể tính $\int\limits_{-5}^{3}g(x)dx$ như sau:

Từ đồ thị hàm số $y=g(x)$ ta thấy nó đi qua các điểm $(-5;2)$, $(-2;0)$, $(0;0)$ nên ta có:

$$\begin{cases}25a-5b+c=2\\4a-2b+c=0\\c=0\end{cases}\Rightarrow a=\frac{2}{15},\ b=\frac{4}{15},\ c=0.$$ Do đó: $\int\limits_{-5}^{3}g(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-5}^{3}\left(\frac{2}{15}x^2+\frac{4}{15}x\right)\mathrm{d}x=\frac{208}{45}$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích các phần $(A),(B)$ lần lượt bằng 3 và 7. Tích phân $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f(5\sin x-1)\,\mathrm{d}x$ bằng



A. $-\dfrac{4}{5}$ **B.** 2 **C.** $\dfrac{4}{5}$ **D.** -2

Lời giải

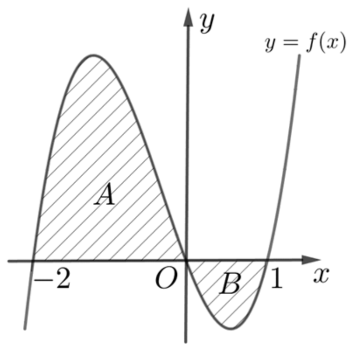
Chọn A

Theo giả thiết ta có $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x = -7$ suy ra $\int\limits_{-1}^{4} f(x)\mathrm{d}x = -4$.

Đặt $t = 5\sin x - 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 5\cos x\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f(5\sin x - 1)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{5}\int\limits_{-1}^{4} f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{5}\int\limits_{-1}^{4} f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{4}{5}$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và diện tích hai phần A, B lần lượt bằng 11 và 2.



Giá trị của $I = \int\limits_{-1}^{0} f(3x+1)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\dfrac{13}{3}$. **C.** 9. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

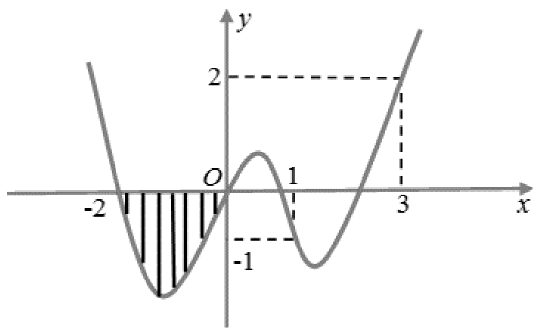
+) Xét $I = \int\limits_{-1}^{0} f(3x+1)\mathrm{d}x$, đặt $(3x+1) = t \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{3}$

+) Đổi cận $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = -2 \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow I = \dfrac{1}{3}\int\limits_{-2}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}\left[\int\limits_{-2}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t\right] = \dfrac{1}{3}(S_A - S_B) = \dfrac{1}{3}(11-2) = 3$

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng phần sọc kẻ bằng 3. Tính giá trị của biểu thức:

$$T = \int\limits_{1}^{2} f'(x+1)\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{3} f'(x-1)\mathrm{d}x + \int\limits_{3}^{4} f(2x-8)\mathrm{d}x$$



A. $T=\dfrac{9}{2}$. **B.** $T=6$. **C.** $T=0$. **<u>D</u>.** $T=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

- Diện tích phần kẻ sọc là: $S=\int\limits_{-2}^{0}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{dx}\ =3$.

Vì $f\left(x\right)\le 0\ \ \forall x\in\left[-2;0\right]\ \Rightarrow 3=\int\limits_{-2}^{0}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{dx}=\int\limits_{-2}^{0}\left[-f\left(x\right)\right]\mathrm{dx}\Leftrightarrow\int\limits_{-2}^{0}f\left(x\right)\mathrm{dx}=-3$.

- Tính $I=\int\limits_{3}^{4}f\left(2x-8\right)\mathrm{dx}$.

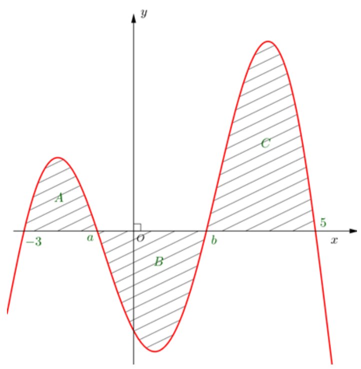
Đặt $t=2x-8\ \Rightarrow \mathrm{dt}=2\mathrm{dx}$; $x=3\Rightarrow t=-2$; $x=4\Rightarrow t=0$.

Suy ra: $I=\int\limits_{-2}^{0}f\left(t\right).\dfrac{1}{2}\mathrm{dt}=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0}f\left(x\right)\mathrm{dx}\ =-\dfrac{3}{2}$.

- Vậy $T=\int\limits_{1}^{2}f'\left(x+1\right)\mathrm{dx}+\int\limits_{2}^{3}f'\left(x-1\right)\mathrm{dx}+\int\limits_{3}^{4}f\left(2x-8\right)\mathrm{dx}$

$=f\left(x+1\right)\Big|_{1}^{2}+f\left(x-1\right)\Big|_{2}^{3}+I=f\left(3\right)-f\left(2\right)+f\left(2\right)-f\left(1\right)-\dfrac{3}{2}\ =2-\left(-1\right)-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 24. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng - 2021)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đồ thị trên $[-3;5]$ như hình bên.



Biết các miền $A,\ B,\ C$ có diện tích lần lượt là $S_A=188, S_B=\dfrac{1377}{4}, S_C=\dfrac{2673}{4}$. Khi đó $\int\limits_{-3}^{5}\left[f\left(x\right)+1\right]dx$ bằng

<u>A</u>. 520. **B.** $\dfrac{2417}{2}$. **C.** -504. **D.** $\dfrac{2401}{2}$.

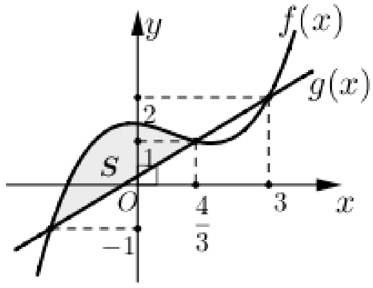
Lời giải

Chọn A

$$\int_{-3}^{5}\left[f(x)+1\right]dx=\int_{-3}^{5}f(x)dx+\int_{-3}^{5}dx=\int_{-3}^{a}f(x)dx+\int_{a}^{b}f(x)dx+\int_{b}^{5}f(x)dx+8=S_A-S_B+S_C+8$$

$$=188-\frac{1377}{4}+\frac{2673}{4}+8=520$$

Câu 25. **(Trung Tâm Thanh Tường - 2021)** Cho $f(x),g(x)$ lần lượt là các hàm đa thức bậc ba và bậc nhất có đồ thị như hình vẽ.



Biết diện tích hình S (được tô màu) bằng $\frac{250}{81}$. Tính $\int_{0}^{2}f(x)dx$.

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{38}{15}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{34}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g(x)$ là hàm số bậc nhất đi qua $A\left(\frac{4}{3};1\right)$ và $B(3;2)$ nên $g(x)=\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$.

Với $y=-1\Rightarrow\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}=-1\Leftrightarrow x=-2\Rightarrow C(-2;-1)$ là giao điểm của $f(x)$ và $g(x)$.

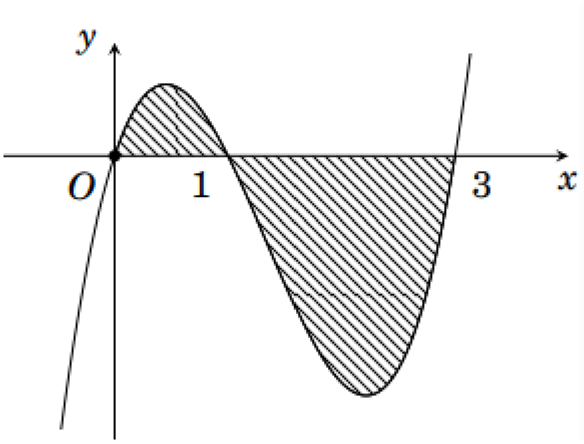
Do đó $f(x)-g(x)=a(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3)$.

Lại có $S=\int_{-2}^{\frac{4}{3}}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{250}{81}=\int_{-2}^{\frac{4}{3}}\left[a(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3)\right]\mathrm{d}x\Leftrightarrow a=\frac{3}{20}$.

Suy ra $f(x)-g(x)=\frac{3}{20}(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3)\Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{20}(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3)+\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$.

Vậy $\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{2}\left[\frac{3}{20}(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-3)+\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\right]dx=\frac{34}{15}$.

Câu 26. **(Sở Hà Tĩnh 2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Miền hình phẳng trong hình vẽ được giới hạn bơi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và trục hoành đồng thời có diện tích $S=a$. Biết rằng $\int_0^1(x+1)f'(x)dx=b$



A. $I = a - b + c.$ **B.** $I = -a + b - c$.

C. $-a + b + c$. **D.** $I = a - b - c$.

Lời giải

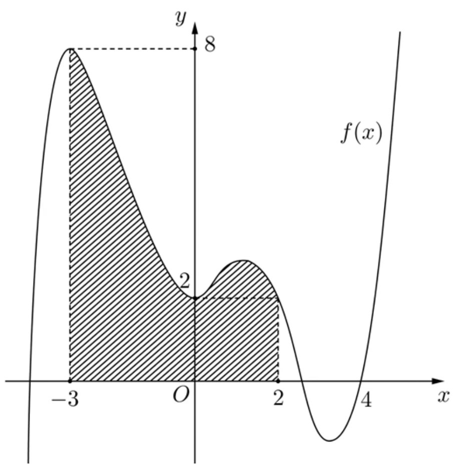
Ta có

$$S = a \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x)dx - \int_1^3 f'(x)dx = a \Leftrightarrow 2f(1) - f(0) - f(3) = a \Leftrightarrow 2f(1) - f(0) = a + c.$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần với $u = x + 1$ và $dv = f'(x)dx$, ta được

$$\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = b \Leftrightarrow (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = b \Leftrightarrow 2f(1) - f(0) - I = b \Leftrightarrow a + c - I = b \Leftrightarrow I = a - b -$$

Câu 27. **(THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh - 2022)** Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Giả sử diện tích phần kẻ sọc trên hình vẽ có diện tích bằng a. Tính theo a giá trị của tích phân $I = \int\limits_{-3}^{2} \left(2x+1\right)f'\left(x\right)dx$?



A. $I = 50 - 2a$. **B.** $I = 50 - a$. **C.** $I = -30 - 2a$. **D.** $I = -30 + 2a$.

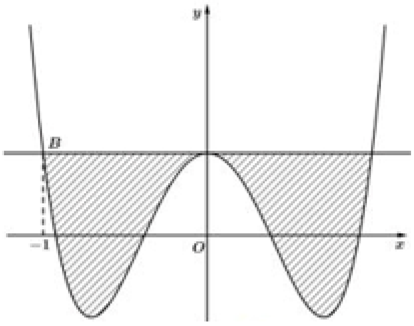
Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = 2x + 1 \\ dv = f'\left(x\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = f\left(x\right) \end{cases}.$

$$\Rightarrow I=\left[(2x+1)f(x)\right]\Big|_{-3}^{2}-2\int_{-3}^{2}f(x)\,dx=5f(2)+5f(-3)-2a=5.2+5.8-2a=50-2a.$$

Câu 28. **(Sở Phú Thọ 2022)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Biết miền tô đậm có diện tích bằng $\frac{4}{15}$ và điểm B có hoành độ bằng -1. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3;3]$ để hàm số $y=f\left(m-3^x\right)$ có đúng một điểm cực trị là



A. 1.

B. 6.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

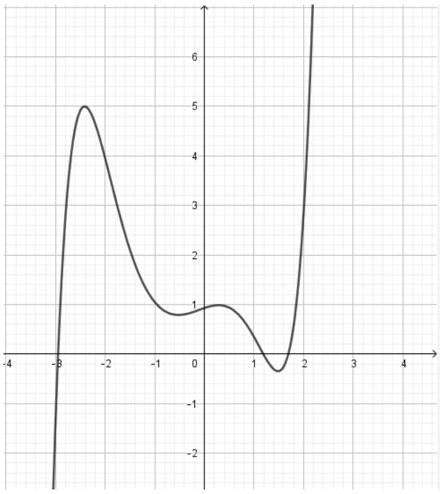
Đường thẳng $(d): y=g(x)$ song song với trục hoành cắt đồ thị $(C): y=ax^4+bx^2+c$ tại hai điểm B và C. Mà điểm B có hoành độ bằng -1 nên điểm C có hoành độ bằng 1. Khi đó ta có: $S=\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|\,dx=\int_{-1}^{1}\left|ax^2\left(x^2-1\right)\right|dx=\frac{4}{15}|a|$, mà $S=\frac{4}{15}$ nên suy ra $a=1$, tức $y=x^4+bx^2+c$. Mà mặt khác $f(-1)=1+b+c=f(0)=c\Rightarrow b=-1\Rightarrow y=f(x)=x^4-x^2+c\Rightarrow f'(x)=4x^3-2x$.

Giải phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-2x=2x\left(2x^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=0;x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Xét hàm số $y=h(x)=f\left(m-3^x\right)$ có $h'(x)=-3^x\ln 3 f'\left(m-3^x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-3^x=0\\ m-3^x=\frac{1}{\sqrt{2}};m-3^x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3^x\\ m=3^x+\frac{1}{\sqrt{2}};m=3^x-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.(*)$. Mà $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}3^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}3^x-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}};\lim\limits_{x\to-\infty}3^x+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ nên ta suy ra để $g(x)$ có đúng 1 điểm cực trị (tức (*) có 1 nghiệm duy nhất) thì $m=0$.

Câu 29. **(Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Đặt $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\dfrac{x^2}{2}-x+2022$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g\left(2\right)>g\left(-3\right)>g\left(0\right)$.

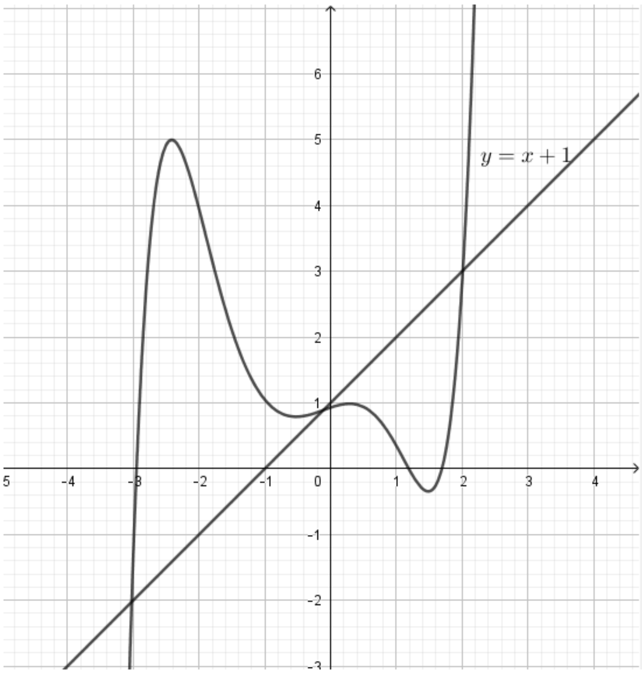
B. $g\left(-3\right)>g\left(0\right)>g\left(2\right)$.

C. $g\left(2\right)>g\left(0\right)>g\left(-3\right)$.

D. $g\left(0\right)>g\left(2\right)>g\left(-3\right)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-\left(x+1\right)=0 \Leftrightarrow f'\left(x\right)=\left(x+1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

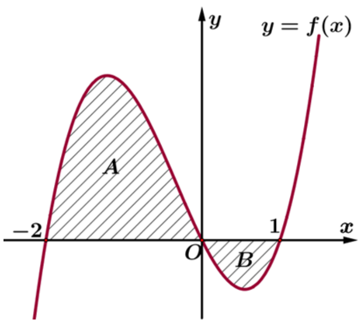
Dựa vào bảng biến thiên suy ra $g(0) > g(2) \quad (1)$.

Mặt khác, từ đồ thị ta có:

$$\int_{-3}^{0}\left(f'(x)-x-1\right)\mathrm{d}x > \int_{0}^{2}\left(x+1-f'(x)\right)\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow g(0)-g(-3) > g(0)-g(2)$$
$$\Leftrightarrow g(-3) < g(2) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta được $g(0) > g(2) > g(-3)$.

Câu 30. **(THPT Nguyễn Huệ - Huế - 2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và diện tích hai phần A, B lần lượt bằng 11 và 2.



Giá trị của $I=\int_{-1}^{0} f(3x+1)\mathrm{d}x$ bằng

A. 9. **B.** 13. **C.** 3. **D.** $\frac{13}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích hai phần A, B lần lượt bằng 11 và 2.

Ta được: $A=\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x=11$; $B=-\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=2 \Rightarrow \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=-2$.

Ta có $I=\int\limits_{-1}^{0} f(3x+1)\mathrm{d}x$

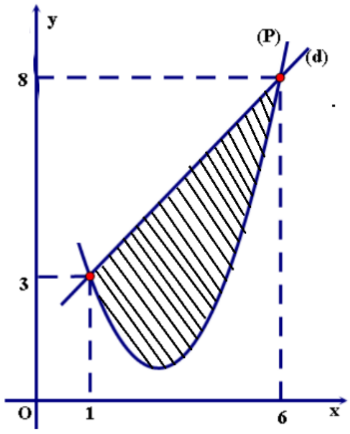
Đặt $t=3x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t=3\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$

$x=-1 \Rightarrow t=-2$

$\Rightarrow I=\frac{1}{3}\int\limits_{-2}^{1} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(\int\limits_{-2}^{0} f(t)\mathrm{d}t+\int\limits_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{3}(11-2)=3$.

Câu 31. **(Mã 101-2023)** Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\frac{125}{9}$. Tích phân $\int\limits_{1}^{6}(2x-5)f'(x)\mathrm{d}x$ bằng



A. $\frac{830}{9}$ **B.** $\frac{178}{9}$ **C.** $\frac{340}{9}$. **D.** $\frac{925}{18}$.

Lời giải

Đường thẳng (d) đi qua hai điểm $(1;3)$ và $(6;8)$.

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $(d): y=x+2$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x+2, y=f(x), x=1, x=6$ là:

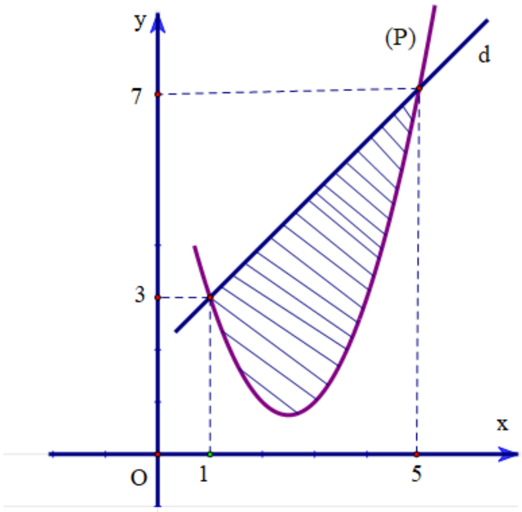
$S=\int\limits_{1}^{6}\left[(x+2)-f(x)\right]\mathrm{d}x=\frac{55}{2}-\int\limits_{1}^{6} f(x)\mathrm{d}x=\frac{125}{9} \Rightarrow \int\limits_{1}^{6} f(x)\mathrm{d}x=\frac{245}{18}$.

Ta có: $I=\int\limits_{1}^{6}(2x-5)f'(x)dx=\int\limits_{1}^{6}(2x-5)\mathrm{d}(f(x))=(2x-5)f(x)\Big|_{1}^{6}-\int\limits_{1}^{6}2f(x)\mathrm{d}x$

$I=7f(6)+3f(1)-2\int\limits_{1}^{6} f(x)\mathrm{d}x=7.8+3.3-2.\frac{245}{18}=\frac{340}{9}$. Vậy: $I=\frac{340}{9}$.

Chọn đáp án C

Câu 32. **(Mã 102-2023)** Cho hàm số bậc hai $y=f\left(x\right)$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và (d) có diện tích $S=\dfrac{32}{3}$. Tính tích phân và $\int\limits_1^5 (2x-5)f'\left(x\right)dx$.



A. $\dfrac{104}{3}$. **B.** $\dfrac{76}{3}$. C. $\dfrac{22}{3}$. D. $\dfrac{188}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta có: $f(1)=3,\ f(5)=7$.

Gọi $d:\ y=ax+b$.

Ta có:

$$\begin{cases} A(1,3)\in d \\ B(5,7)\in d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 5a+b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow d: y=x+2$.

$$S=\int\limits_1^5 \left(x+2-f(x)\right)dx=\int\limits_1^5 (x+2)dx-\int\limits_1^5 f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{32}{3}=20-\int\limits_1^5 f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_1^5 f(x)dx=\frac{28}{3}$$

Xét $I=\int\limits_1^5 (2x-5)f'\left(x\right)dx$

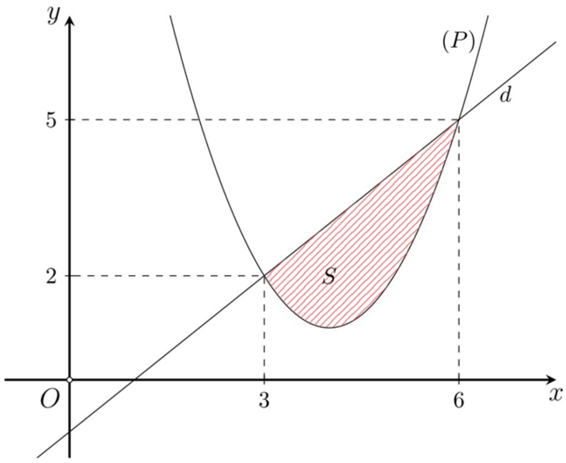
Đặt $\begin{cases} u=2x-5 \\ dv=f'\left(x\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2dx \\ v=f(x) \end{cases}$

$$I=(2x-5)f(x)\Big|_1^5-2\int_1^5 f(x)dx$$

$$=5f(5)+3f(1)-2\int_1^5 f(x)dx$$

$$=5.7+3.3-2.\frac{28}{3}=\frac{76}{3}$$

Câu 33. **(Mã 103 - 2023)** Cho hàm số bậc hai $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $\left(P\right)$ và đường thẳng d cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm như trong hình bên dưới. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi $\left(P\right)$ và d có diện tích $S=\frac{9}{2}$.



Tích phân $\int_3^6 \left(2x-3\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 33. **B.** 51. **C.** 39. **D.** 27.

Lời giải

Gọi đường thẳng $d:y=ax+b$. Vì đường thẳng d đi qua hai điểm $\left(3;2\right)$ và $\left(6;5\right)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}3a+b=2\\6a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}.$$

Từ đó suy ra $d:y=x-1$.

Gọi parapol $\left(P\right):y=mx^2+nx+p$. Vì $\left(P\right)$đi qua hai điểm $\left(3;2\right)$ và $\left(6;5\right)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}9m+3n+p=2 & \left(1\right)\\36m+6n+p=5 & \left(2\right)\end{cases}$$

Mặt khác ta lại có hình phẳng giới hạn bởi $\left(P\right)$ và d có diện tích $S=\frac{9}{2}$ nên ta có

$$S=\int_3^6\left(x-1-mx^2-nx-p\right)\mathrm{d}x=\frac{9}{2}\Leftrightarrow\int_3^6\left(-mx^2-(n-1)x-(p+1)\right)\mathrm{d}x=\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[-\frac{mx^3}{3}-\frac{(n-1)x^2}{2}-(p+1)x\right]\Bigg|_3^6=\frac{9}{2}\Leftrightarrow -63m-\frac{27}{2}n-3p=-6\ \ (3)$$

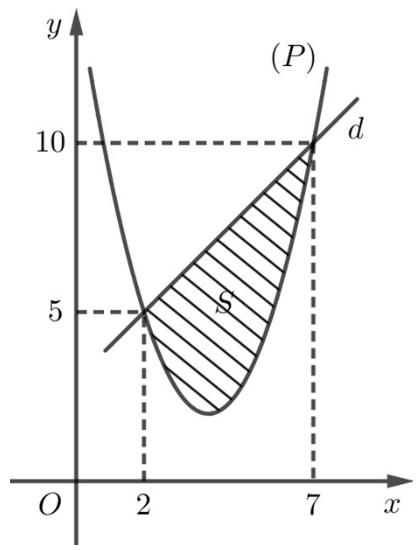
Từ $(1),(2),(3)$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}9m+3n+p=2\\36m+6n+p=5\\-63m-\dfrac{27}{2}n-3p=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\n=-8\\p=17\end{cases}.$$

Suy ra $y=f(x)=x^2-8x+17$ và $f'(x)=2x-8$.

Vậy $\int_3^6(2x-3)f'(x)\mathrm{d}x=\int_3^6(2x-3)(2x-8)\mathrm{d}x=27.$

Câu 34. **(Mã 104-2023)** Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\frac{125}{6}$. Tích phân $\int_2^7(2x-3)f'(x)\mathrm{d}x$ bằng



A. $\frac{215}{3}$. **B.** $\frac{265}{3}$. **C.** $\frac{245}{3}$. **D.** $\frac{415}{3}$.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $(2;5)$ và $(7;10)$ có phương trình là $y=x+3$.

Diện tích hình phẳng $S=\frac{125}{6}=\int_2^7\left(x+3-f(x)\right)\mathrm{d}x=\frac{75}{2}-\int_2^7f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_2^7f(x)\mathrm{d}x=\frac{50}{3}$.

Tích phân $I=\int\limits_2^7(2x-3)f'(x)\mathrm{d}x=(2x-3)f(x)\Big|_2^7-\int\limits_2^7 2f(x)\mathrm{d}x$

$=11f(7)-f(2)-2.\dfrac{50}{3}=11.10-5-2.\dfrac{50}{3}=\dfrac{215}{3}$.

Câu 35. **(Sở Thừa Thiên Huế 2023)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Xác định tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $F(x)=\int\left[f(x)+m\right]dx$ nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

A. $-5\le m\le 1$. **B.** $m\le -5$. **C.** $-1\le m\le 5$. **D.** $m\ge -1$.

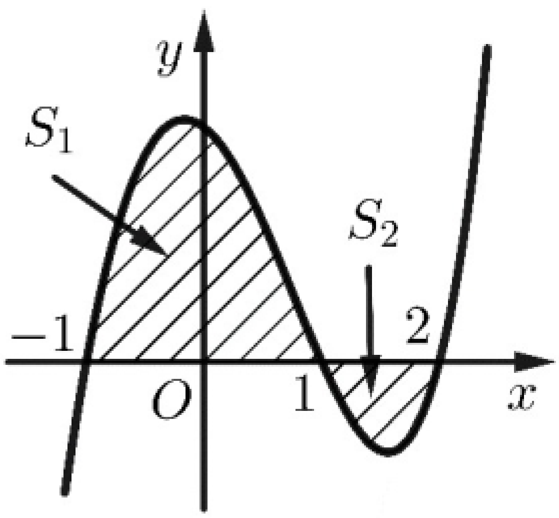
Lời giải

Ta có $F(x)=\int\left[f(x)+m\right]dx\Rightarrow F'(x)=f(x)+m$.

Do đó hàm số $F(x)$ nghịch biến trên $(0;3)\Leftrightarrow F'(x)\le 0,\forall x\in(0;3)\Leftrightarrow f(x)+m\le 0,\forall x\in(0;3)$.

$\Leftrightarrow \max_{x\in[0;3]}(f(x)+m)\le 0\Leftrightarrow m+5\le 0\Leftrightarrow m\le -5$.

Câu 36. **(Đại học Quốc Gia Hà Nội 2023)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị trong hình dưới đây. Biết rằng diện tích các hình phẳng S_1 và S_2 lần lượt bằng $\dfrac{5}{2}$ và $\dfrac{1}{2}$.



Tích phân $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1}\dfrac{f(3\ln x+2)}{x}dx$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 6.

D. $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn **D.**

Xét $I=\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1}\dfrac{f(3\ln x+2)}{x}dx$, đặt $t=3\ln x+2$ suy ra $dt=\dfrac{3}{x}dx$.

Đổi cận: $x=\dfrac{1}{e}\Rightarrow t=-1$ và $x=1\Rightarrow t=2$. Khi đó:

$$I=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{2}f(t)dt=\frac{1}{3}\left(\int\limits_{-1}^{1}f(t)dt+\int\limits_{1}^{2}f(t)dt\right)=\frac{1}{3}\left(S_1-S_2\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$$

Câu 37. **(Sở Lạng Sơn 2023)** Cho hàm số $f(x)=x^3-4x^2-3x$. Xét các số thực $a<b$, giá trị nhỏ nhất của $f(b)-f(a)$ bằng

A. $-\dfrac{16}{3}$.

B. $-\dfrac{500}{81}$.

C. -16.

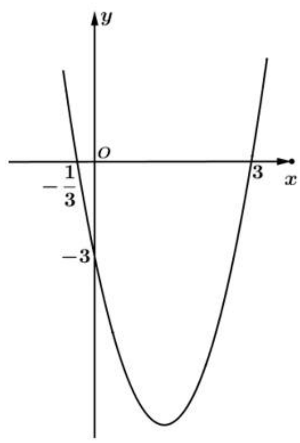
D. $-\dfrac{500}{27}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=3x^2-8x-3$

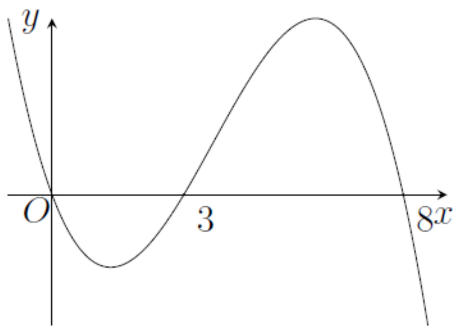
Ta thấy $f(b)-f(a)=\int\limits_{a}^{b}f'(x)dx$



Từ đồ thị của $f^{'}(x)$ suy ra $f(b)-f(a)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\int\limits_{-1}^{3} f'(x)dx=-\frac{500}{27}$.

Câu 38. **(Sở Hà Tĩnh 2023)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành bằng 8 và $\int\limits_{0}^{8} f(x)\mathrm{d}x=4$. Giá trị của

$I=\int\limits_{3}^{8}(2023-x)f'(x)\mathrm{d}x$ bằng



A. 6. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 2023.

Lời giải

Đặt $\int\limits_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x=a$ và $\int\limits_{3}^{8} f(x)\mathrm{d}x=b$.

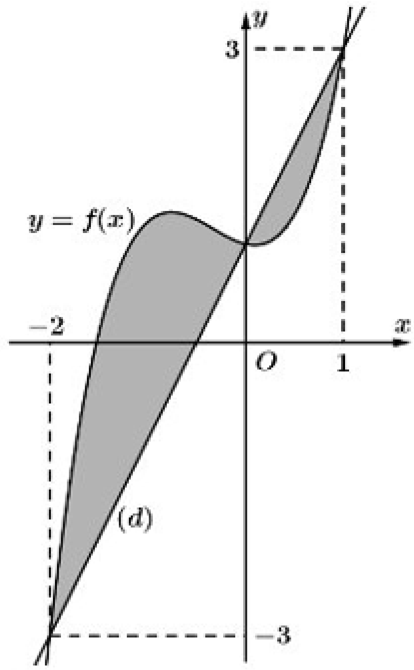
Từ giả thiết bài toán ta có hệ $\begin{cases} a+b=4 \\ -a+b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=6 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u=2023-x \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=-\mathrm{d}x \\ v=f(x). \end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= (2023-x)f(x)\Big|_3^8+\int\limits_{3}^{8} f(x)\mathrm{d}x \\ &= (2023-8)f(8)-(2023-3)f(3)+b \\ &= 0-0+b \\ &= 6. \end{aligned}$$

Câu 39. **(Sở Hòa Bình 2023)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đường thẳng $d: y=ax+b$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết diện tích phần tô đậm bằng $\frac{37}{12}$ và $\int_0^1 f(x)dx = \frac{19}{12}$. Tích phân $\int_{-1}^0 xf'(2x)dx$ bằng

A. $-\frac{15}{8}$.

B. $-\frac{20}{3}$.

C. $-\frac{15}{2}$.

D. $-\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Đầu tiên từ hình vẽ ta thấy với d qua hai điểm $A(-2;-3), B(1;3)$ ta suy ra $d: y = 2x+1$

Khi đó từ giả thiết ban đầu ta suy ra:

$$S = \int_{-2}^0 (f(x)-2x-1)dx + \int_0^1 (2x+1-f(x))dx = \int_{-2}^0 f(x)dx - \frac{19}{12} + \int_0^1 (2x+1)dx - \int_{-2}^0 (2x+1)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \frac{29}{12}$$

Mà mặt khác:

$$\int_{-1}^0 xf'(2x)dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^0 (2x)f'(2x)d(2x) = \frac{1}{4}\int_{-2}^0 xf'(x)dx = \frac{1}{4}\left[(xf(x))_{-2}^0 - \int_{-2}^0 f(x)dx\right] = -\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\int_{-2}^0 f(x)dx$$

Nên suy ra: $\int_{-1}^0 xf'(2x)dx = -\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\left(S - \frac{29}{12}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{37}{12} - \frac{29}{12}\right) = -\frac{5}{3}$.

Câu 40. (Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương 2023) Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị $x=-1$ và $x=3$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ có diện tích bằng 12. Giá trị $|f(-1)-f(3)|$ bằng

A. 18.

B. 16.

C. 48

D. 19.

Lời giải

Chọn C

Đầu tiên ta gọi $g(x)$ là đồ thị có dạng đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $h(x)=f(x)-g(x)$. Đường thẳng khi đi qua hai điểm cực trị thì sẽ đi qua cả điểm uốn của đồ thị $y=f(x)$. Lấy hoành độ trung điểm của hai điểm cực trị, suy ra điểm uốn có hoành độ là $x=1$ tức phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=g(x)$ sẽ cho ra 3 nghiệm lần lượt là $-1;1;3$.

Khi đó từ giả thiết ban đầu ta suy ra: $h(x)=a(x+1)(x-1)(x-3)$.

Với $x\in[-1;1]:f(x)>g(x)$ và $x\in[1;3]:f(x)<g(x)$, ta suy ra:

$$S=\int_{-1}^{3}|f(x)-g(x)|\,dx=\int_{-1}^{3}\left|a\left(x^2-1\right)(x-3)\right|dx=a\left(\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)(x-3)dx-\int_{1}^{3}\left(x^2-1\right)(x-3)dx\right)=12.$$

Từ ấy ta dễ dàng tính được $a=\dfrac{3}{2}$ tức $f'(x)=3a(x+1)(x-3)=\dfrac{9}{2}(x+1)(x-3)$.

Vậy $|f(-1)-f(3)|=\left|-\int_{-1}^{3}f'(x)dx\right|=\dfrac{9}{2}\left|-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx\right|=\dfrac{9}{2}\left|\dfrac{32}{3}\right|=48$.

x