ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN TRIỆU PHONG
NĂM HỌC 2019-2020

Câu 1. (4,0 điểm)

1) Cho $A = n^4 - 10n^2 + 9$

   Với mọi số nguyên n lẻ, chứng minh A chia hết cho 384

2) Tìm các số nguyên a, b thỏa mãn $\dfrac{5}{a + b\sqrt{2}} - \dfrac{4}{a - b\sqrt{2}} + 18\sqrt{2} = 3$

Câu 2. (4,0 điểm)

Cho biểu thức $B = \dfrac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} \cdot \left(\dfrac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \dfrac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x - y}\right)$

a) Rút gọn B

b) So sánh B và $\sqrt{B}$

Câu 3. (6,0 điểm)

1) Biết $x^2 + y^2 = x + y$

   Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $C = x - y$

2) Cho biểu thức

$$D = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \sqrt{2}\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{14 - 5\sqrt{3}}\right)$$

   Chứng minh D là nghiệm của phương trình $D^2 - 14D + 44 = 0$

3) Cho x, y, z là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + zx} + \frac{1}{z^2 + xy} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$$

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng $a.$ Gọi I là trung điểm của cạnh $AB.$ Điểm H thuộc cạnh DI sao cho AH vuông góc với DI

1) Chứng minh rằng ΔCHD cân

2) Tính diện tích ΔCHD

Câu 5. (2,0 điểm)

Xác định M nằm trong tam giác ABC sao cho tích các khoảng cách từ M đến các cạnh của tam giác đạt giá trị lớn nhất.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1) Ta có:

$$A = n^4 - 10n^2 + 9 = n^4 - n^2 - 9n^2 + 9 = n^2\left(n^2 - 1\right) - 9\left(n^2 - 1\right)$$

$$= \left(n^2 - 1\right)\left(n^2 - 9\right) = (n-1)(n+1)(n-3)(n+3)$$

Theo giả thiết n là số nguyên lẻ, nên đặt $n = 2k+1 (k \in \mathbb{N})$, ta viết lại
$A = (2k+2).2k.(2k+4)(2k-2) = 16(k+1).k.(k+2)(k-1)$

Ta nhận thấy rằng $(k+1), k, (k+2), (k-1)$ là 4 số nguyên liên tiếp nên sẽ chia hết cho $2.3.4 = 24 \Rightarrow A \vdots (16.24)\ hay\ A \vdots 384$ với mọi số nguyên n lẻ

2) ĐK: $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 \neq 0, a \neq b\sqrt{2}$

Ta có: $\dfrac{5}{a + b\sqrt{2}} - \dfrac{4}{a - b\sqrt{2}} + 18\sqrt{2} = 3$, với

$$\Leftrightarrow \frac{5\left(a - b\sqrt{2}\right) - 4\left(a + b\sqrt{2}\right)}{a^2 - 2b^2} + 18\sqrt{2} = 3$$

$$\Leftrightarrow a - 9b\sqrt{2} = \left(3 - 18\sqrt{2}\right)\left(a^2 - 2b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a - 9b\sqrt{2} = \left(3a^2 - 6b^2\right) - 18\sqrt{2}\left(a^2 - 2b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(18a^2 - 36b^2 - 9b\right)\sqrt{2} = 3a^2 - 6b^2 - a$$

Nếu $18a^2 - 36b^2 - 9b \neq 0 \Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{3a^2 - 6b^2 - a}{18a^2 - 36b^2 - 9b}$

Vì a, b nguyên nên $\dfrac{3a^2 - 6b^2 - a}{18a^2 - 36b^2 - 9b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, vô lý vì $\sqrt{2}$ là số vô tỉ

Vì thế ta có:

$$18a^2 - 36b^2 - 9b = 0 \Rightarrow \begin{cases} 18a^2 - 36b^2 - 9b = 0 \\ 3a^2 - 6b^2 - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 6b^2 = \dfrac{3}{2}b \\ 3a^2 - 6b^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2}b \\ 3a^2 - 6b^2 = a \end{cases}$$

Thay $a = \dfrac{3b}{2}$ vào $3a^2 - 6b^2 - a = 0,$ ta có:

$$3.\frac{9}{4}b^2 - 6b^2 - \frac{3}{2}b = 0 \Leftrightarrow 27b^2 - 24b^2 - 6b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 (ktm) \\ b = 2 (tm) \Rightarrow a = 3 (tm) \end{array}\right.$$

Vậy $a = 3, b = 2$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 2.

$a) x, y > 0, x \neq y$. Ta có:

$$B = \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)}.\left(\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(x+\sqrt{xy}+y\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y}.\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\frac{x+\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y}.\frac{x+2\sqrt{xy}+y-x-\sqrt{xy}-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y}.\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$= \frac{\sqrt{xy}}{x-\sqrt{xy}+y}$$

b)Vì $x, y > 0 \Rightarrow \sqrt{xy} > 0$ và $x - \sqrt{xy} + y = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2 + \frac{3y}{4} > 0, \forall x, y > 0$

Nên $B > 0 \left(\forall x, y\right)$ thỏa mãn điều kiện

Lại có: $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x + y - \sqrt{xy} \geq \sqrt{xy}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+y-\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}} \Rightarrow \frac{\sqrt{xy}}{x+y-\sqrt{xy}} \leq \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} = 1$$

Dấu $"="$ không xảy ra vì $x \neq y$. Vậy $0 < B < 1$ nên $\sqrt{B} > B$

Câu 3.

1) Ta có:

$$C = x - y = x + y - 2y = x^2 + y^2 - xy = x^2 + \left(y-1\right)^2 - 1 \geq -1$$

Dấu $"="$ xảy ra khi $x = 0, y = 1$

Vậy $MinC = -1 \Leftrightarrow x = 0, y = -1$.

Lại có:

$$C = x - y = 2x - \left(x+y\right) = 2x - \left(x^2+y^2\right) = -\left(x^2 - 2x + 1\right) - y^2 + 1$$

$$= -\left(x-1\right)^2 - y^2 + 1 \leq 1$$

Dấu $"="$ xảy ra khi $x = 1, y = 0$

Vậy $MaxC = 1 \Leftrightarrow x = 1, y = 0$

2) Ta có:

$$D=\sqrt{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-\sqrt{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}+\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{14-5\sqrt{3}}\right)$$

$$D=\sqrt{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-\sqrt{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{28-10\sqrt{3}}$$

$$D=\sqrt{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-\sqrt{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}+\sqrt{3}+1+5-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow D-6=\sqrt{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-\sqrt{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\,(D-6<0)$$

$$\Leftrightarrow (D-6)^2=8-2\sqrt{16-10+2\sqrt{5}}=8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow (D-6)^2=8-2.\left(\sqrt{5}+1\right)=6-2\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow D-6=1-\sqrt{5}\; hay\; D=7-\sqrt{5}$$

Ta có:

$$D^2-14D+44=0\Leftrightarrow \left(7-\sqrt{5}\right)^2-14\left(7-\sqrt{5}\right)+44=0$$

$$\Leftrightarrow 54-14\sqrt{5}-98+14\sqrt{5}+44=0(luon\,dung)$$

Vậy bài toán được chứng minh .

3) Ta có $x^2+yz\ge 2x\sqrt{yz}\Rightarrow \dfrac{1}{x^2+yz}\le\dfrac{1}{2x\sqrt{yz}}=\dfrac{\sqrt{yz}}{2xyz}$

Tương tự ta cũng có : $\dfrac{1}{y^2+zx}\le\dfrac{\sqrt{zx}}{2xyz};\dfrac{1}{z^2+xy}\le\dfrac{\sqrt{xy}}{2xyz}$

Mà $yz\le\dfrac{y+z}{2}\Rightarrow \dfrac{\sqrt{yz}}{2xyz}\le\dfrac{\frac{y+z}{2}}{2xyz}=\dfrac{y+z}{4xyz}$

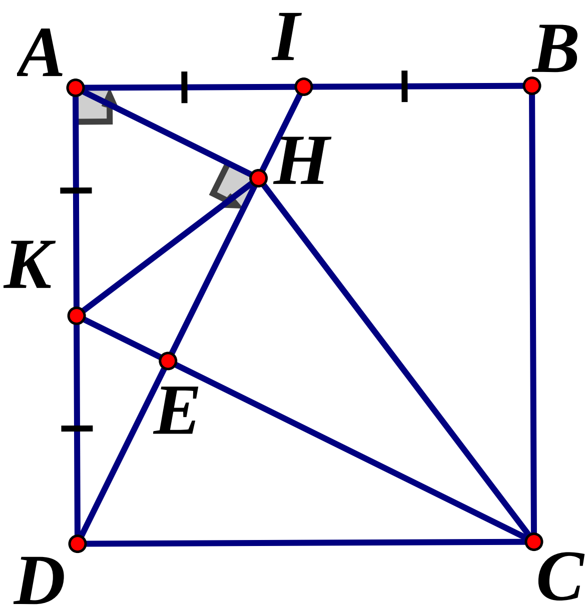
Tương tự ta có: $\dfrac{\sqrt{zx}}{2xyz}\le\dfrac{z+x}{4xyz};\dfrac{\sqrt{xy}}{2xyz}\le\dfrac{x+y}{4xyz}$. Từ đó ta có:

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{y+z}{4xyz}+\frac{z+x}{4xyz}+\frac{x+y}{4xyz}=\frac{1}{4xyz}(2x+2y+2z)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$$

Dấu " =" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$

Câu 4.



1) Gọi K là trung điểm của AD, E là giao điểm của CK và DI

Xét ΔADI và ΔDCK có:

$$\angle CDK = \angle DAI = 90^0 (gt); CD = AD(gt); AI = DK\left(= \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} \right)$$

Suy ra $\Delta ADI = \Delta DCK (c.g.c) \Rightarrow \angle ADI = \angle DCK$ mà $\angle DCK + \angle DKC = 90^0$

$\Rightarrow \angle ADI + \angle DKC = 90^0 \Rightarrow KC \perp DI \quad (1)$

Lại có HK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $AD \Rightarrow HK = KD \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra : KC là đường trung trực của DH

$\Rightarrow CH = CD \Rightarrow \Delta CHD$ cân tại C

2) Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ADI, ta tính được $DI = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ADI, đường cao AH ta có:

$$DH.DI = AD^2 \Rightarrow DH = \frac{AD^2}{DI} = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

$$AH.DI = AI.AD \Rightarrow AH = \frac{AI.AD}{DI} = \frac{a^2}{2} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Mà EK là đường trung bình của $\Delta AHD \Rightarrow EK = \frac{1}{2}AH = \frac{a}{2\sqrt{5}}$

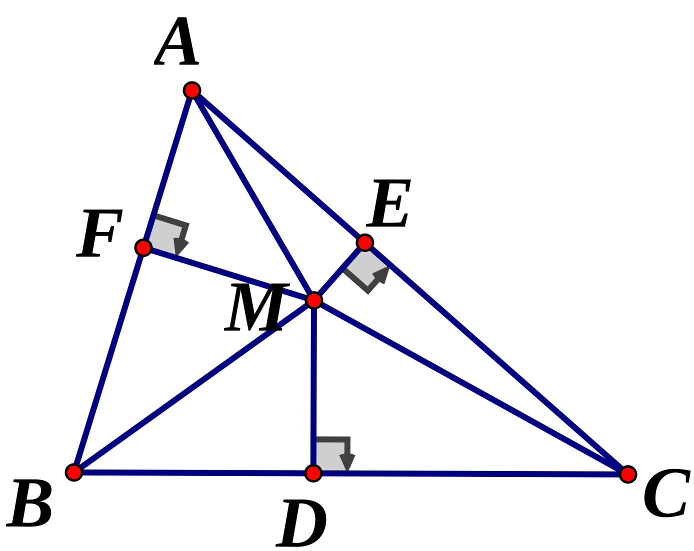
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $DKC,$ đường cao DE ta có:

$$KE.CK = KD^2 \Rightarrow CK = \frac{KD^2}{KE} = \frac{a^2}{4}:\frac{a}{2\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow CE = CK - KE = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Diện tích ΔCHD là $S_{CHD} = \frac{1}{2}CE.DH = \frac{1}{2}.\frac{2a}{\sqrt{5}}.\frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{2a^2}{5}(dvdt)$

Câu 5.



Đặt $AB = c, BC = a, AC = b$

Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh BC, AC, AB và đặt MD, ME, MF lần lượt là x, y, z

Ta có: $S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MAC} = \frac{xa + yb + zc}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{xa.yb.zc}}{2}$

$\Rightarrow S_{ABC} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{abc}.\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{2S_{ABC}}{3\sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow xyz \leq \frac{8S_{ABC}^3}{27abc}$ (luôn là hằng số không đổi)

Vậy tích các khoảng cách từ M đến 3 cạnh của ΔABC đạt $GTLN$ bằng $\frac{8S_{ABC}^3}{27abc}$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow xa = by = cz \Leftrightarrow S_{MAB} = S_{MBC} = S_{MAC}$

Hay M là trọng tâm của ΔABC