

Bài 8. Cấp số nhân

Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

PHẦN E. CÂU HỎI TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đó.

Lời giải

Lời giải

Ta có $u_1 = S_1 = 5 - 1 = 4$ và $u_2 = S_2 - S_1 = (5^2 - 1) - (5 - 1) = 20$.

Vậy $u_1 = 4, q = 5$.

Câu 2. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; \dots; 4096$. Tính tổng S của tất cả các số hạng của cấp số nhân đã cho.

Lời giải

Lời giải

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4} \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow 4096 = 2^{12} = u_1 q^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-3} \Leftrightarrow n = 15$$

Cấp số nhân đã cho có

Khi đó: cấp số nhân đã cho có tất cả 15 số hạng.

$$S_{15} = u_1 \cdot \frac{1 - q^{15}}{1 - q} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - 2^{15}}{1 - 2} = \frac{32767}{4}$$

Vậy

Câu 3. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết: $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$

Lời giải

Lời giải

Áp dụng công thức: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot (1 + q^4) = 51 \\ u_1 q \cdot (1 + q^4) = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{51}{1 + q^4} \\ \frac{u_1 \cdot (1 + q^4)}{u_1 q \cdot (1 + q^4)} = \frac{51}{102} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow q = 2$$

$$\text{Khi đó: } u_1 = \frac{51}{1 + 2^4} = 3$$

Vậy $u_1 = 3; q = 2$.

Câu 4. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết: $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases}$

Lời giải

Lời giải

Áp dụng công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ và $S_n = \frac{u_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \\ \frac{u_1 \cdot (1 - q^3)}{1 - q} = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \\ u_1(1 + q + q^2) = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{6}{q} \\ \frac{q}{1 + q + q^2} = \frac{6}{43} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 43q = 6 \cdot (1 + q + q^2) \Leftrightarrow 6q^2 - 37q + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 6 \\ q = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\text{Với } q = 6 \text{ thì } u_1 = \frac{6}{6} = 1. \text{ Với } q = \frac{1}{6} \text{ thì } u_1 = \frac{6}{\frac{1}{6}} = 36$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} q = 6 \\ u_1 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} q = \frac{1}{6} \\ u_1 = 36 \end{cases}.$$

Câu 5. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 31 \\ u_1 + u_3 = 26 \end{cases}$

Lời giải

Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 31 \\ u_1 + u_3 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 31 \\ u_1 + u_1 q^2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 31 \\ u_1(1 + q^2) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 + q + q^2}{1 + q^2} = \frac{31}{26} \\ u_1 = \frac{26}{1 + q^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 26 \cdot (1 + q + q^2) = 31 \cdot (1 + q^2)$$

$$\Leftrightarrow 26 + 26q + 26q^2 = 31 + 31q^2 \Leftrightarrow 5q^2 - 26q + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 5 \\ q = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\text{Với } q = 5 \text{ thì } u_1 = \frac{26}{1 + 5^2} = 1.$$

$$\text{Với } q = \frac{1}{5} \text{ thì } u_1 = \frac{26}{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = 25. \text{ Vậy } \begin{cases} q = 5 \\ u_1 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} q = \frac{1}{5} \\ u_1 = 25 \end{cases}.$$

Câu 6. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết: $\begin{cases} u_5 + u_2 = 36 \\ u_6 - u_4 = 48 \end{cases}$

Lời giải

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_5 + u_2 = 36 \\ u_6 - u_4 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^4 + u_1 \cdot q = 36 \\ u_1 \cdot q^5 - u_1 \cdot q^3 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q^4 + q) = 36 \\ u_1(q^5 - q^3) = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{36}{q^4 + q} \\ \frac{q^4 + q}{q^5 - q^3} = \frac{36}{48} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4 \cdot (q^4 + q) = 3 \cdot (q^5 - q^3)$$

$$\Leftrightarrow 4q^4 + 4q = 3q^5 - 3q^3 \Leftrightarrow 4q^4 + 4q - 3q^5 + 3q^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow q(-3q^4 + 4q^3 + 3q^2 + 4q) = 0 \Leftrightarrow -q(q+1)(q-2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q=0 \\ q=-1 \\ q=2 \\ 3q^2 - q + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow q=2 \text{ (do } q \neq 0; q \neq -1)$$

$$\text{Với } q=2 \text{ thì } u_1 = \frac{36}{2^4 + 2} = 2$$

$$\Leftrightarrow q(-3q^4 + 4q^3 + 3q^2 + 4q) = 0 \Leftrightarrow -q(q+1)(q-2)(3q^2 - q + 2) = 0$$

$$\text{Vậy } q=2; u_1=2$$

Câu 7. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1=5, u_5=405$ và tổng $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1820$. Tìm n .

Lời giải

Lời giải

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_5 = 405 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ u_1 q^4 = 405 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ q^4 = \frac{405}{u_1} = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ q = \pm 3 \end{cases}$$

Ta có:

Trường hợp 1: $u_1=5; q=3$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1820 \text{ (} n \in \mathbb{N}^* \text{)}$$

$$\Leftrightarrow u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1820 \Leftrightarrow \frac{1 - 3^n}{1 - 3} = \frac{1820}{5} \Leftrightarrow 3^n = 729 \Leftrightarrow n = 6.$$

Trường hợp 2: $u_1=5; q=-3$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1820 \text{ (} n \in \mathbb{N}^* \text{)} \Leftrightarrow u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1820 \Leftrightarrow \frac{1 - (-3)^n}{1 + 3} = \frac{1820}{5}$$

$$\Leftrightarrow (-3)^n = -1455 \Leftrightarrow n \in \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Vậy } n = 6.$$

Câu 8. Viết thêm bốn số vào giữa hai số 160 và 5 để được một cấp số nhân gồm sáu số hạng. Tìm tổng tất cả các số hạng của cấp số nhân đó.

Lời giải

Lời giải

Gọi (u_n) là cấp số nhân lập được và q là công bội của cấp số nhân đó.

Cấp số nhân cần lập có dạng: $160; u_2; u_3; u_4; u_5; 5$.

$$\begin{cases} u_1 = 160 \\ u_6 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 160 \\ u_1 q^5 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 160 \\ 160 q^5 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 160 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có :

$$S_6 = \frac{u_1 (1 - q^6)}{1 - q} = \frac{160 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^6 \right]}{\frac{1}{2}} = 315$$

Tổng các số hạng của cấp số nhân là:

Câu 9. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã cho.

Lời giải

Lời giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n) . Ta có: $u_2 = u_1 q = 3q; u_3 = u_1 q^2 = 3q^2$.

Suy ra $15u_1 - 4u_2 + u_3 = 45 - 12q + 3q^2 = 3(q - 2)^2 + 33 \geq 33, \forall q \in \mathbb{R}$.

Ta có: $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất (bằng 33) khi và chỉ khi $q = 2$.

Khi đó: $u_{13} = u_1 q^{12} = 3 \cdot 2^{12} = 12288$.

Câu 10. Tính tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39366.

Lời giải

Lời giải

Gọi (u_n) là cấp số nhân cần tìm, q là công bội của cấp số nhân đó.

$$u_1 = 18, u_2 = 54 \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{54}{18} = 3$$

Ta có:

Xét số hạng cuối $u_n = 39366$

$$\Leftrightarrow u_1 q^{n-1} = 39366 \Leftrightarrow 18 \cdot 3^{n-1} = 39366 \Leftrightarrow 3^{n-1} = 3^7 \Leftrightarrow n = 8.$$

$$S_8 = \frac{u_1(1 - q^8)}{1 - q} = 18 \cdot \frac{1 - 3^8}{1 - 3} = 59040$$

Vậy tổng tám số hạng của cấp số nhân là:

$$S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$$

Câu 11. Tính tổng sau theo n :

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned} S_n &= 2^2 + \frac{1}{2^2} + 2 + 2^4 + \frac{1}{2^4} + 2 + \dots + 2^{2n} + \frac{1}{2^{2n}} + 2 \\ &= (2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2n}) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2n}}\right) + 2n \end{aligned}$$

Ta thấy S_n chứa hai tổng của cấp số nhân: cấp số nhân thứ nhất có n phần tử, số hạng đầu bằng 4, công bội bằng 4; cấp số nhân thứ hai có n phần tử, số hạng đầu bằng $\frac{1}{4}$, công bội bằng $\frac{1}{4}$.

Vì vậy

$$\begin{aligned} S_n &= 4 \cdot \frac{1 - 4^n}{1 - 4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} + 2n = -\frac{4}{3}(1 - 4^n) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) + 2n \\ &= -1 + \frac{4^{n+1}}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n} + 2n \end{aligned}$$

$$S_n = 8 + 88 + 888 + \dots + \underbrace{888}_{n \text{ chữ số}} 8$$

Câu 12. Tính tổng sau theo n :

Lời giải

Lời giải

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{8}{9}(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots9}_{n \text{ chữ số } 9}) \\
&= \frac{8}{9}(10^1 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \dots + 10^n - 1) \\
&= \frac{8}{9}[(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n) - n] = \frac{8}{9}\left[10 \cdot \frac{1 - 10^n}{1 - 10} - n\right] = \frac{80(10^n - 1)}{81} - \frac{8}{9}n
\end{aligned}$$

Câu 13. Tổng ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng là 21. Nếu lấy số thứ hai trừ đi 1 và số thứ ba cộng thêm 1 thì ba số đó lập thành một cấp số nhân. Tìm ba số đó biết số hạng đầu có giá trị nhỏ hơn 4

Lời giải

Lời giải

Gọi (u_n) là cấp số cộng có công sai d .

Ta có: $u_1 + u_2 + u_3 = 21 \Rightarrow u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) = 21 \Rightarrow u_1 + d = 7(*)$.

Theo giả thiết: $u_1; u_2 - 1; u_3 + 1$ lập thành cấp số nhân hay $u_1; u_1 + d - 1; u_1 + 2d + 1$ lập thành một cấp số nhân.

Suy ra: $(u_1 + d - 1)^2 = u_1(u_1 + 2d + 1) \Rightarrow (u_1 + d - 1)^2 = u_1[2(u_1 + d) - u_1 + 1]$

Kết hợp với (*), ta được: $(7 - 1)^2 = u_1(2 \cdot 7 - u_1 + 1) \Rightarrow 36 = u_1(15 - u_1)$

$$\Rightarrow u_1^2 - 15u_1 + 36 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 12 > 4(L) \\ u_1 = 3 \end{cases}$$

Với $u_1 = 3$ thì $d = 4 \Rightarrow u_2 = 7; u_3 = 11$.

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3 - 7x^2 + 2(m^2 + 6m)x - 8 = 0$

Lời giải

Lời giải

Điều kiện cần: Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số nhân.

Ta có:

$$x^3 - 7x^2 + 2(m^2 + 6m)x - 8 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 x_2 x_3 = 8.$$

Theo tính chất của cấp số nhân: $x_1 x_3 = x_2^2$.

Suy ra: $x_2^3 = 8 \Rightarrow x_2 = 2$.

Thay nghiệm $x = x_2 = 2$ vào phương trình đã cho, ta có:

$$8 - 28 + 2(m^2 + 6m) \cdot 2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 24m - 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -7 \end{cases}$$

Điều kiện đủ: Thử lại với các giá trị m tìm được.

$$\text{Với } m = 1, \text{ ta có phương trình: } \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Với } m = -7, \text{ ta có phương trình } \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m = 1; m = -7$ là các giá trị cần tìm.

Câu 15. Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ polonium 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa). Tính khối lượng còn lại của 20 gam polonium 210 sau 7314 ngày (khoảng 20 năm).

Lời giải

Lời giải

Gọi u_n (gam) là khối lượng còn lại của 20 gam polonium 210 sau n chu kì bán rã. Ta có 7314 ngày gồm 53 chu kì bán rã. Theo đề bài ra, ta cần tính u_{53} .

Từ giả thiết suy ra dãy (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu là $u_1 = \frac{20}{2} = 10$ và công bội $q = 0,5$. Suy ra $u_n = 10 \cdot (0,5)^{n-1}$.

Do đó $u_{53} = 10 \cdot (0,5)^{52} \approx 2,22 \cdot 10^{-15}$.

Câu 16. Ông Minh gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với hình thức lãi kép kì hạn 12 tháng lãi suất 7%/năm. Giả sử trong khoảng thời gian gửi tiền ông Minh không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi, hỏi sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà ông nhận được là bao nhiêu (đơn vị: đồng, tính kết quả gần đúng đến hàng nghìn)?

Lời giải

Lời giải

Gọi r là lãi suất tiền gửi theo năm: $r = 0,07$ / năm; tiền gửi là 10^8 (đồng).

Sau năm thứ nhất, số tiền người gửi nhận được là:

$$10^8 + 10^8 r = 10^8(1+r).$$

Sau năm thứ hai, số tiền người gửi nhận được là:

$$10^8(1+r) + 10^8(1+r)r = 10^8(1+r)(1+r) = 10^8(1+r)^2.$$

Theo quy luật đó, ta thấy số tiền mà ông Minh nhận được sau n năm là số hạng thứ n của một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 10^8(1+r)$, công bội $q = 1+r$.

Sau năm thứ n , ông Minh nhận được số tiền:

$$u_n = 10^8(1+r)^n.$$

Sau 10 năm, số tiền ông Minh nhận được:

$$u_{10} = 10^8(1+0,07)^{10} \approx 196715000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 17. Cho cấp số nhân có $u_1 = -3, q = \frac{2}{3}$. Số $\frac{-96}{243}$ là số hạng thứ mấy của cấp số này?

Lời giải

Lời giải

Số hạng tổng quát của cấp số nhân là: $u_n = u_1 q^{n-1} = -3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

$$u_n = \frac{-96}{243} \Rightarrow -3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{-96}{243} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{32}{243} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \Rightarrow n-1=5 \Rightarrow n=6$$

$$\frac{-96}{243}$$

Vậy $\frac{-96}{243}$ là số hạng thứ 6 của cấp số nhân đã cho.

Câu 18. Cho cấp số nhân (u_n) có $S_2 = 4$ và $S_3 = 13$ (trong đó S_2, S_3 theo thứ tự là tổng của hai và của ba số hạng đầu của cấp số nhân). Tìm S_5 là tổng của năm số hạng đầu của cấp số nhân có công bội dương

Lời giải

Lời giải

Ta có: $u_3 = S_3 - S_2 = 9 \Rightarrow u_1 q^2 = 9 \Rightarrow u_1 = \frac{9}{q^2}$ (1) (vì $q \neq 0$).

Mặt khác $S_2 = 4$ nên $u_1 + u_1 q = 4$. (2)

Thay (1) vào (2), ta có: $\frac{9}{q^2} + \frac{9}{q} = 4 \Leftrightarrow 4q^2 - 9q - 9 = 0 \Leftrightarrow q = 3$ hoặc $q = -\frac{3}{4}$.

Với $q = 3$ thì $u_1 = 1$, khi đó:

$$S_5 = \frac{u_1(1 - q^5)}{1 - q} = \frac{1(1 - 3^5)}{1 - 3} = 121.$$

Câu 19. Cho các số $2x - 1; x; 2x + 1$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tìm x .

Lời giải

Lời giải

Vì $2x - 1; x; 2x + 1$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân

$$\Rightarrow (2x - 1)(2x + 1) = x^2 \Rightarrow 4x^2 - 1 = x^2 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vậy có hai giá trị $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ thoả mãn đề bài.

Câu 20. Cho các số $x + 6y; 5x + 2y; 8x + y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x - 1; y + 2; x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính $x^2 + y^2$.

Lời giải

Lời giải

Theo giả thiết, ta có:
$$\begin{cases} (x + 6y) + (8x + y) = 2(5x + 2y) \\ (x - 1)(x - 3y) = (y + 2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ (3y - 1)(3y - 3y) = (y + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 0 = (y + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -2 \end{cases}$$

Suy ra $x^2 + y^2 = 40$.

Câu 21. Kết quả của tổng $S = 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \dots + 79 \cdot 5^{78}$ được viết dưới dạng $a + \frac{315}{16} \cdot 5^b$ ($b \in \mathbb{N}, a$ là phân số

tối giản). Tính giá trị biểu thức $P = a + \frac{b}{16}$.

Lời giải

Lời giải

Từ giả thiết, ta có: $5S = 5 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + 79 \cdot 5^{79}$.

$$-4S = S - 5S = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{78} - 79 \cdot 5^{79}$$

Do đó:

Xét tổng $S' = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{78}$ là tổng của 79 số hạng của một cấp số nhân có số hạng đầu bằng 1 và công bội

bằng 5, ta có: $S' = \frac{1 - 5^{79}}{1 - 5}$.

$$-4S = S' - 79 \cdot 5^{79} = \frac{1 - 5^{79}}{1 - 5} - 79 \cdot 5^{79} = -\frac{1}{4} - \frac{315 \cdot 5^{79}}{4} \Rightarrow S = \frac{1}{16} + \frac{315}{16} \cdot 5^{79}$$

Vậy

$$S = \frac{1}{16} + \frac{315}{16} \cdot 5^{79} = a + \frac{315}{16} \cdot 5^b \Rightarrow a = \frac{1}{16}, b = 79 \Rightarrow P = \frac{1}{16} + \frac{79}{16} = 5$$

Ta có:

Câu 22. Theo báo cáo của Chính phủ, dân số của nước ta tính đến tháng 12 năm 2018 là 95,93 triệu người, nếu tỉ lệ tăng trưởng dân số trung bình hằng năm là $1,33\%$ thì dân số nước ta vào tháng 12 năm 2025 là bao nhiêu? (Tính theo đơn vị triệu người, làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Lời giải

Theo tỉ lệ tăng trưởng $1,33\%$ thì:

- Tháng 12 năm 2019, dân số nước ta là:

$$u_1 = 95,93 + 95,93 \cdot \frac{1,33}{100} = 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right) \quad (\text{triệu người}).$$

- Tháng 12 năm 2020, dân số nước ta là:

$$\begin{aligned} u_2 &= 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right) + 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right) \cdot \frac{1,33}{100} \\ &= 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right) \left(1 + \frac{1,33}{100} \right) = 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right)^2 \quad (\text{triệu người}). \end{aligned}$$

- Theo quy luật đó, ta biết dân số nước ta vào tháng 12 năm thứ n kể từ năm 2019 được tính theo công thức

$$u_n = 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right)^n \quad (\text{triệu người}).$$

- Vậy vào tháng 12 năm 2025 (tức $n = 2025 - 2018 = 7$), dân số nước ta là:

$$u_7 = 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right)^7 \approx 105,23 \quad (\text{triệu người}).$$

Câu 23. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1, u_2 = 2$. Tính số hạng thứ 2019 của cấp số nhân.

Lời giải

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = u_1 \cdot q = 2 \end{cases} \Rightarrow q = 2$$

$$\text{Vậy } u_{2019} = u_1 \cdot q^{2018} = 1 \cdot 2^{2018} = 2^{2018}$$

Câu 24. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$, công bội $q = -2$. Hỏi -192 là số hạng thứ mấy của (u_n) ?

Lời giải

Lời giải

Giả sử $u_n = -192$ và (u_n) là cấp số nhân, ta có:

$$-192 = -3 \cdot (-2)^{n-1} \Leftrightarrow (-2)^{n-1} = 64 \Leftrightarrow (-2)^{n-1} = (-2)^6 \Leftrightarrow n = 7.$$

Vậy -192 là số hạng thứ 7.

Câu 25. Một cấp số nhân hữu hạn có công bội $q = -3$, số hạng thứ ba bằng 27 và số hạng cuối bằng 1594323. Hỏi cấp số nhân đó có bao nhiêu số hạng?

Lời giải

Lời giải

Gọi cấp số nhân thỏa mãn đề bài là $u_1; u_2; u_3; \dots; u_m$.

Theo đề bài, ta có: $u_3 = 27 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^2 = 27 \Leftrightarrow u_1 = 3$.

$$u_m = 1594323 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{m-1} = 1594323 \Leftrightarrow 3 \cdot (-3)^{m-1} = 1594323 \Rightarrow m - 1 = 12 \Rightarrow m = 13.$$

Vậy cấp số nhân đã cho có 13 số hạng.

Câu 26. Tính tổng $S = 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{100}$.

Lời giải

Lời giải

Ta nhận xét đây là tổng cấp số nhân với $u_1 = 10, q = 10, n = 100$.

$$S = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{10 \cdot (1 - 10^{100})}{1 - 10} = \frac{10}{9} (10^{100} - 1)$$

Vậy

$$S = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999 \dots 9}_{100 \text{ số } 9}$$

Câu 27. Tính tổng**Lời giải**

Lời giải

$$\begin{aligned} S &= 9 + \underbrace{99}_{100 \text{ số } 9} + \underbrace{999}_{100 \text{ số } 9} + \dots + \underbrace{999 \dots 9}_{100 \text{ số } 9} = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^{100} - 1) \\ &= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{100}) - 100 = \frac{10}{9} (10^{100} - 1) - 100. \end{aligned}$$

Câu 28. Cho các số nguyên x và y thỏa mãn $5x - y, 2x + 3y, x + 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng, đồng thời $(y + 1)^2, xy + 1, (x - 1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tìm x và y .

Lời giải

Lời giải

Do $5x - y, 2x + 3y, x + 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên:

$$2(2x + 3y) = 5x - y + x + 2y \Leftrightarrow 2x = 5y \quad (1)$$

Do $(y + 1)^2, xy + 1, (x - 1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên:

$$(xy + 1)^2 = (y + 1)^2 (x - 1)^2 \Leftrightarrow (4 + 2y - 2x)(4xy + 2x - 2y) = 0 \quad (2).$$

Thay (1) vào (2) ta được phương trình:

$$(4 + 2y - 5y)(10y^2 + 5y - 2y) = 0 \Leftrightarrow y(4 - 3y)(10y + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{3}{10} \end{cases}.$$

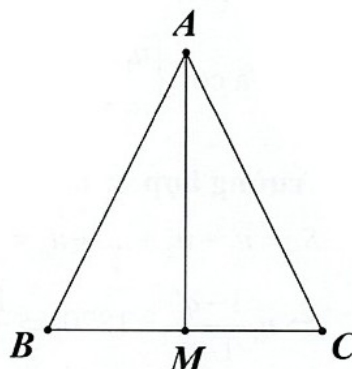
Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $y = 0$ khi đó $x = 0$.

Câu 29. Cho tam giác ABC cân tại A . Biết rằng độ dài cạnh BC , trung tuyến AM và độ dài cạnh AB theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân có công bội q . Tìm công bội q của cấp số nhân đó.

Lời giải

Lời giải

Ta có: AM là đường trung tuyến nên cũng là đường cao



$$\Rightarrow AM < AB \Rightarrow BC < AM < AB \text{ và } q = \frac{AB}{AM} > 1$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} AM = BC \cdot q \\ AB = BC \cdot q^2 \end{cases}$$

Ta có: $AB^2 = AM^2 + BM^2$ (Áp dụng định lý Pythagore cho $\triangle ABM$ vuông tại M)

$$\Leftrightarrow BC^2 \cdot q^4 = BC^2 \cdot q^2 + \frac{BC^2}{4} \Leftrightarrow q^4 = q^2 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow q^4 - q^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ q^2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{Câu 30. Tính tổng sau: } S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Lời giải

Lời giải

Ta có dãy số $\frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \dots; \frac{1}{2^n}$ là một cấp số nhân với n số hạng, số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{2}$ và công bội

$$q = \frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{u_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Khi đó:

$$\text{Vậy } S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$S_n = 3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{333}_{n} \cdot 3$$

Câu 31. Tính tổng sau:

Lời giải

Lời giải

$$S_n = 3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{333}_{n} \cdot 3$$

$$S_n = \frac{3}{9} (9 + 99 + 333 + \dots + \underbrace{99}_{n} \cdot 9)$$

$$\text{Ta có: } S_n = \frac{1}{3} [(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots + (10^n - 1)]$$

$$S_n = \frac{1}{3} [10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n - n] = \frac{1}{3} \left[\frac{10 \cdot (10^n - 1)}{10 - 1} - n \right]$$

$$\text{Vậy } S_n = \frac{10}{27} (10^n - 1) - \frac{1}{3} n$$

Câu 32. Cho 3 số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

Lời giải

Lời giải

Gọi $u_1; u_2; u_3$ theo thứ tự ba số cần tìm tạo thành cấp số cộng.

Vì ba số $u_1; u_2; u_3$ có tổng 21 nên: $u_1 + u_2 + u_3 = 21$ (1)

Vì ba số $u_1; u_2; u_3$ lập thành cấp số cộng nên: $u_1 + u_3 = 2u_2$ (2)

Vì nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân nên ta có:

$$(u_1 + 2)(u_3 + 9) = (u_2 + 3)^2$$

Từ (1), (2) và (3) ta có hpt:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ u_1 + u_3 = 2u_2 \\ (u_1 + 2)(u_3 + 9) = (u_2 + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_2 = 21 \\ u_1 + u_3 = 2u_2 \\ (u_1 + 2)(u_3 + 9) = (u_2 + 3)^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 7 \\ u_1 + u_3 = 14 \\ (u_1 + 2)(u_3 + 9) = (7 + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow u_2 = 7u_1 = 14 - u_3 \quad (14 - u_3 + 2)(u_3 + 9) = 100 (*)$$

$$\text{Giải pt } (*) : \quad (16 - u_3)(u_3 + 9) = 100 \Leftrightarrow -u_3^2 + 7u_3 + 44 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_3 = 11 \\ u_3 = -4 \end{cases}$$

Với $u_3 = 11$ thì $u_1 = 14 - 11 = 3$

Với $u_3 = -4$ thì $u_1 = 14 - (-4) = 18$

Vậy ba số cần tìm là $(3; 7; 11)$ hoặc $(18; 7; -4)$.

Câu 33. Bạn Lan thả quả bóng cao su từ độ cao 12^m theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên $\frac{2}{3}$ độ cao trước đó. Tính tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn.

Lời giải

Lời giải

Các quãng đường khi bóng đi xuống tạo thành một cấp số nhân có $u_1 = 12$ và $q = \frac{2}{3}$.

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{12}{1 - \frac{2}{3}} = 36(m)$$

Tổng các quãng đường khi bóng đi xuống là

Vậy tổng quãng đường bóng đi được (cả lên và xuống) đến khi bóng dừng hẳn là

$$2S - 12 = 2 \cdot 36 - 12 = 60(m)$$

Câu 34. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n$.

Tính giá trị tổng $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_{10}}{10}$?

Lời giải

Lời giải

Theo đề bài ta có: $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{u_n}{n}$

$$\text{Mà } u_1 = \frac{1}{3} \text{ nên } \frac{u_2}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{u_1}{1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2; \frac{u_3}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{u_2}{2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3; \dots; \frac{u_{10}}{10} = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

Do đó dãy $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3}$, công bội $q = \frac{1}{3}$.

$$S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_{10}}{10} = \frac{u_1 (1 - q^{10})}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right]}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{29524}{59049}$$

Khi đó:

Câu 35. Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng. Nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được một cấp số cộng. Tìm 3 số đó?

Lời giải

Lời giải

Gọi $u_1; u_2; u_3$ theo thứ tự là ba số cần tìm lập thành một cấp số nhân. Vì tổng của ba số $u_1; u_2; u_3$ cần tìm là 65 nên ta có pt: $u_1 + u_2 + u_3 = 65$

Vì nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được một cấp số cộng nên ta có pt: $(u_1 - 1) + (u_3 - 19) = 2u_2 \Leftrightarrow u_1 - 2u_2 + u_3 = 20$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hpt: } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 65 \\ u_1 - 2u_2 + u_3 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 65 \\ u_1 - 2u_1 q + u_1 q^2 = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 65 \\ u_1(1 - 2q + q^2) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{65}{1 + q + q^2} \\ \frac{1 + q + q^2}{1 - 2q + q^2} = \frac{65}{20} = \frac{13}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4(1 + q + q^2) = 13(1 - 2q + q^2) \Leftrightarrow 9q^2 - 30q + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 3 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vì $u_1; u_2; u_3$ theo thứ tự là ba số cần tìm lập thành một cấp số nhân tăng nên $q = 3$.

$$\text{Khi đó } u_1 = \frac{65}{1 + 3 + 3^2} = 5; u_2 = u_1 q = 5 \cdot 3 = 15; u_3 = 5 \cdot 3^2 = 45$$

Vậy ba số cần tìm là 5; 15; 45.

Câu 36. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x^3 - mx^2 - 6x - 8 = 0$ có ba nghiệm thực lập thành một cấp số nhân?

Lời giải

Lời giải

Ta chứng minh nếu $x_1; x_2; x_3$ là nghiệm của phương trình $x^3 - mx^2 - 6x - 8 = 0$ thì $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = m \\ x_1 x_2 x_3 = 8 \end{cases}$

$$\text{Thật vậy } x^3 - mx^2 - 6x - 8 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - mx^2 - 6x - 8 = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3)x - x_1 x_2 x_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = m \\ x_1 x_2 x_3 = 8 \end{cases}$$

Điều kiện cần: Phương trình $x^3 - mx^2 - 6x - 8 = 0$ có ba nghiệm thực $x_1 < x_2 < x_3$ lập thành một cấp số nhân nên $x_1 \cdot x_3 \cdot x_2 = x_2^2 \cdot x_2 \Leftrightarrow 8 = x_2^3 \Leftrightarrow x_2 = 2$.

Vậy phương trình $x^3 - mx^2 - 6x - 8 = 0$ phải có nghiệm bằng 2

Thay $x_2 = 2$ vào phương trình $x^3 - mx^2 - 6x - 8 = 0$ ta được $m = -3$.

Điều kiện đủ: Thử lại với $m = -3$ ta có:

$$x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \text{ (thỏa yêu cầu bài toán)}$$

Vậy $m = -3$ thì phương trình đã cho có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số nhân.

----HẾT---