

Chủ đề 5. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

BÀI 15. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho hai biến cố A và B . Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất của A với điều kiện B , kí hiệu là $P(A|B)$.

Nếu $P(B) > 0$ thì
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

2. NHẬN XÉT

- Từ định nghĩa của xác suất có điều kiện, ta suy ra:

Nếu $P(B) > 0$ thì
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

- Người ta chứng minh được rằng:

Nếu A, B là hai biến cố bất kì thì
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Công thức trên được gọi là công thức nhân xác suất.

- Cho hai biến cố A và B với $P(B) > 0$. Khi đó, ta có:
$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$
- Cho A và B là hai biến cố với $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$.

Khi đó, A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi
$$P(A) = P(A|B) = P(A|\bar{B})$$
 và
$$P(B) = P(B|A) = P(B|\bar{A}).$$

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Trong một công viên cây xanh có 70% cây có hoa, số cây phượng vĩ chiếm 6,3% trong tổng số cây của công viên. Trong giờ thực hành ngoài trời, nhóm học sinh của lớp 10A1 chọn một cây trong công viên để đo chiều cao. Tính xác suất để cây được chọn là cây phượng vĩ, biết rằng cây được chọn là loài cây có hoa.

Bài 2. Tại một sở thú, các em bé được đặt câu hỏi: Sắp tới vườn thú của chúng ta sẽ nhận nuôi thêm một con vật nữa, con thích sư tử hay voi hơn? Kết quả khảo sát của các bé như sau:

	Sư tử	Voi	Tổng cộng
Bé trai	90	110	200

Bé gái	75	85	160
Tổng cộng	165	195	360

Chọn ngẫu nhiên một bé tham gia khảo sát, tính xác suất để

- Bé thích sư tử, biết bé được chọn là bé trai.
- Bé thích voi, biết bé được chọn là bé gái.

Bài 3. Lớp 12B1 có 25 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Trong số đó có 16 bạn nam và 6 bạn nữ thích chơi thể thao. Chọn một bạn bất kì của lớp 12B1. Tính xác suất

- Học sinh được chọn thích chơi thể thao, biết rằng học sinh đó là nữ.
- Học sinh được chọn là nữ, biết rằng học sinh đó thích chơi thể thao.

Bài 4. Một hộp có 6 viên bi đen và 8 viên bi trắng cùng kích thước và khối lượng. An lấy một viên và không hoàn lại. Sau đó Bình lấy một viên. Gọi A là biến cố “An lấy được viên bi trắng”, B là biến cố “Bình lấy được viên bi trắng”. Tính $P(B|A)$ và $P(AB)$.

Bài 5. Có hai hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 4 bi đỏ và 5 bi vàng. Hộp thứ hai chứa 6 bi đỏ và 4 bi vàng. Chọn ngẫu nhiên một hộp và sau đó lấy ngẫu nhiên 1 bi từ hộp đó. Tính xác suất để lấy được viên bi đỏ.

Bài 6. Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II . Xác suất bắn trúng đích của xạ thủ loại I là 0,9; của xạ thủ loại II là 0,8. Chọn ngẫu nhiên ra 1 xạ thủ và xạ thủ đó bắn một viên đạn tìm xác suất để viên đạn đó trúng đích.

Bài 7. Trong một đội tuyển có hai vận động viên A và B thi đấu. A thi đấu trước và có hy vọng 80% thắng trận. Do ảnh hưởng tinh thần, nếu A thắng trận thì có 60% khả năng B thắng trận, còn nếu A thua thì khả năng này của B chỉ còn 30%.

Tính xác suất của các biến cố sau:

- Đội tuyển thắng hai trận.
- Đội tuyển thắng ít nhất một trận.

Bài 8. Ban giám đốc một công ty liên doanh với nước ngoài đang xem xét khả năng đình công của công nhân để đòi tăng lương ở hai nhà máy A và B . Kinh nghiệm cho họ biết cuộc đình công ở nhà máy A và B xảy ra lần lượt với xác suất 0,75 và 0,65. Ngoài ra, họ cũng biết rằng nếu công nhân ở nhà máy B đình công thì có 90% khả năng để công nhân ở nhà máy A đình công ủng hộ.

- Tính xác suất để công nhân ở cả hai nhà máy đình công.
- Nếu công nhân ở nhà máy A đình công thì xác suất để công nhân ở nhà máy B đình công để ủng hộ bằng bao nhiêu?

Bài 9. Một nhân viên kiểm toán nhận thấy 15% các bản cân đối thu chi chứa các sai lầm. Trong các bản chứa sai lầm, 60% được xem là các giá trị bất thường so với các số xuất phát từ gốc. Trong tất cả các bản cân đối thu chi thì 20% là những giá trị bất thường. Nếu một con số ở một bảng cân đối tỏ ra bất thường thì xác suất để số ấy là một sai lầm là bao nhiêu?

Bài 10. Một nhóm nghiên cứu đang nghiên cứu về nguy cơ một sự cố tại một nhà máy điện nguyên tử sẽ gây ra sự rò rỉ phóng xạ. Nhóm nghiên cứu nhận thấy các loại sự cố chỉ có thể là: hoả hoạn, sự gãy đổ của vật liệu hoặc sai lầm của con người, và 2 hay nhiều hơn 2 sự cố không bao giờ cùng xảy ra.

Nếu có hoả hoạn thì sự rò rỉ phóng xạ xảy ra khoảng 20% số lần. Nếu có sự gãy đổ của vật liệu thì sự rò rỉ phóng xạ xảy ra khoảng 50% số lần, và nếu có sự sai lầm của con người thì sự rò rỉ sẽ xảy ra khoảng 10% số lần. Nhóm nghiên cứu cũng tìm được xác suất để: Hoả hoạn và sự rò rỉ phóng xạ cùng xảy ra là $0,0010$, gãy đổ vật liệu và sự rò rỉ phóng xạ cùng xảy ra là $0,0015$, sai lầm của con người và sự rò rỉ phóng xạ cùng xảy ra là $0,0012$. Tìm xác suất để

- a) có hoả hoạn; có gãy đổ vật liệu và có sai lầm của con người;
- b) có một sự rò rỉ phóng xạ;
- c) một sự rò rỉ phóng xạ được gây ra bởi sự sai lầm của con người.

Bài 11. Một hộp có 5 quả cầu màu xanh và 3 quả cầu màu vàng. Lần lượt lấy ra hai quả cầu theo phương thức không hoàn lại.

- a) Tính xác suất lần thứ hai lấy được quả màu vàng với điều kiện lần thứ nhất lấy được quả cầu xanh.
- b) Tính xác suất để hai quả cầu lấy ra cùng màu.

Bài 12. Một lớp học của Trường Đại học AG có $\frac{2}{3}$ là nam sinh viên và $\frac{1}{3}$ là nữ sinh viên. Số sinh viên quê ở An Giang chiếm tỉ lệ 40% trong nữ sinh viên, và chiếm tỉ lệ 60% trong nam sinh viên.

- a) Chọn ngẫu nhiên một sinh viên của lớp. Tính xác suất để chọn được một sinh viên quê ở An Giang. Nếu biết rằng sinh viên vừa chọn quê ở An Giang thì xác suất để sinh viên đó là nam bằng bao nhiêu?
- b) Chọn ngẫu nhiên không hoàn lại hai sinh viên của lớp. Tính xác suất để có ít nhất một sinh viên quê ở An Giang, biết rằng lớp học có 60 sinh viên.

Bài 13. Nhà trường muốn chọn một số học sinh từ một tổ gồm 7 nam^{sinh} và 6 nữ^{sinh}. Lần đầu chọn ngẫu nhiên 2 học sinh; sau đó, chọn tiếp 1 học sinh nữa.

- a) Tính xác suất để học sinh được chọn lần sau là nam sinh.
- b) Biết rằng học sinh được chọn lần sau là nữ sinh, tính xác suất để cả hai học sinh được chọn lần đầu đều là nam sinh.

Bài 14. Gieo ba con xúc sắc cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để:

- a) Tổng số nốt xuất hiện là 8 nếu biết rằng ít nhất có một con ra nốt 1.
- b) Có ít nhất một con ra lục nếu biết rằng số nốt trên 3 con là khác nhau.

Bài 15. Có ba hộp A, B và C đựng các lọ thuốc. Hộp A có 10 lọ tốt và 5 lọ hỏng, hộp B có 6 lọ tốt và 4 lọ hỏng, hộp C có 5 lọ tốt và 5 lọ hỏng.

- a) Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một lọ thuốc, tính xác suất để được 3 lọ cùng loại.
- b) Lấy ngẫu nhiên một hộp rồi từ hộp đó lấy ra 3 lọ thuốc thì được 1 lọ tốt và 2 lọ hỏng. Tính xác suất để hộp A đã đ c chọn.

Bài 16. Có 5% dân số mắc bệnh X . Có một xét nghiệm để phát hiện bệnh X . Đối với người mắc bệnh X , xác suất xét nghiệm này không dương tính là 2%. Đối với người không mắc bệnh X , xác suất xét nghiệm này dương tính là 3%. Chọn ngẫu nhiên một người và tiến hành xét nghiệm. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất các biến cố:

W : “người đó không bị bệnh X và kết quả xét nghiệm dương tính”

Y : “người đó bị bệnh X và kết quả xét nghiệm không dương tính”

Bài 17. Cửa hàng nhận trứng của 3 cơ sở nuôi gà R, S, T theo tỉ lệ lần lượt là 25%, 35% và 40%. Biết rằng tỉ lệ trứng hỏng của 3 cơ sở R, S, T lần lượt là 5%, 4% và 2%. Bạn Hân mua một quả trứng từ cửa hàng. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố:

M : “quả trứng Hân mua thuộc cơ sở T và quả trứng đó không bị hỏng”

N : “quả trứng Hân mua thuộc cơ sở R hoặc S và quả trứng đó bị hỏng”

BÀI 16. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Trong mục này, ta luôn giả thiết phép thử T có không gian mẫu là tập hợp Ω gồm hữu hạn phần tử và các kết quả của phép thử là đồng khả năng, các biến cố đều liên quan đến phép thử đó.

1. Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A, B với $0 < P(B) < 1$, ta có:

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

2. Công thức Bayes

Với hai biến cố A, B mà $P(A) > 0, P(B) > 0$, ta có:

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$$

Nhận xét: Cho hai biến cố A, B với $P(A) > 0, 0 < P(B) < 1$.

Do $P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})$ nên công thức Bayes còn có dạng:

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})}$$

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Một cửa hàng sách ước lượng rằng: Trong tổng số các khách hàng đến cửa hàng, có 30% khách cần hỏi nhân viên bán hàng, 20% khách mua sách và 15% khách thực hiện cả hai điều trên. Gặp ngẫu nhiên một khách trong nhà sách. Tính xác suất để người này

- không thực hiện cả hai điều trên;
- không mua sách, biết rằng người này đã hỏi nhân viên bán hàng.

Bài 2. Một cuộc điều tra cho thấy, ở một thành phố, có 20,7% dân số dùng loại sản phẩm X , 50% dùng loại sản phẩm Y và trong số những người dùng Y , có 36,5% dùng X . Phỏng vấn ngẫu nhiên một người dân trong thành phố đó, tính xác suất để người ấy

- Dùng cả X và Y ;
- Dùng Y , biết rằng người ấy không dùng X .

Bài 3. Theo một cuộc điều tra thì xác suất để một hộ gia đình có máy vi tính nếu thu nhập hàng năm trên 20 triệu (VNĐ) là 0,75. Trong số các hộ được điều tra thì 60% có thu nhập trên 20 triệu và 52% có máy vi tính. Tính xác suất để một hộ gia đình được chọn ngẫu nhiên

- có máy vi tính và có thu nhập hàng năm trên 20 triệu;

- b) có máy vi tính, nhưng không có thu nhập trên 20 triệu.
- c) có thu nhập hàng năm trên 20 triệu, biết rằng hộ đó không có máy vi tính.

Bài 4. Trong một đội tuyển có hai vận động viên A và B thi đua. Nếu A thi đấu trước và có hy vọng 80% thắng trận. Do ảnh hưởng tinh thần, nếu A thắng trận thì có 60% khả năng B thắng trận, còn nếu A thua thì khả năng này của B chỉ còn 30% . Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) B thắng trận;
- b) Đội tuyển chỉ thắng có một trận.

Bài 5. Trong năm học vừa qua, ở trường đại học X , tỉ lệ sinh viên thi trượt môn Toán là 34% , thi trượt môn Tâm lý là $20,5\%$, và trong số các sinh viên trượt môn Toán, có 50% sinh viên trượt môn Tâm lý. Gặp ngẫu nhiên một sinh viên của trường X .

- a) Tính xác suất để anh ta trượt cả hai môn Toán và Tâm lý;
- b) Tính xác suất đậu cả hai môn Toán và Tâm lý.
- c) Nếu biết rằng sinh viên này trượt môn Tâm lý thì xác suất để anh ta đậu môn Toán là bao nhiêu?

Bài 6. Ba máy 1,2 và 3 của một xí nghiệp sản xuất, theo thứ tự $60\%, 30\%$ và 10% tổng số sản phẩm của một xí nghiệp. Tỉ lệ sản xuất ra phế phẩm của các máy trên, theo thứ tự, là 2% , 3% và 4% . Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm từ lô hàng của xí nghiệp, trong đó để lẫn lộn các sản phẩm do 3 máy sản xuất.

- a) Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt. Ý nghĩa của xác suất đó đối với lô hàng là gì?
- b) Nếu sản phẩm lấy được là phế phẩm, thì nhiều khả năng nhất là do máy nào sản xuất?

Bài 7. Một hãng sản xuất một loại tủ lạnh X ước tính rằng khoảng 80% số người dùng tủ lạnh có đọc quảng cáo tủ lạnh do hãng ấy sản xuất. Trong số những người được quảng cáo, có 30% mua loại tủ lạnh X ; 10% không được quảng cáo cũng mua loại tủ lạnh X . Tính xác suất để một người tiêu dùng đã mua loại tủ lạnh X mà có được quảng cáo.

Bài 8. Một đa phương có tỉ lệ người dân nghiện thuốc lá là 30% . Biết rằng tỉ lệ người bị viêm họng trong số người nghiện thuốc lá là 60% , còn tỉ lệ đó trong số người không nghiện thuốc lá là 40% . Chọn ngẫu nhiên một người từ địa phương trên.

- a) Nếu người đó bị viêm họng, tính xác suất để người đó nghiện thuốc lá.
- b) Nếu người đó không bị viêm họng, tính xác suất để người đó nghiện

Bài 9. Một nhà xuất bản gửi bản giới thiệu sách mới đến 80% giảng viên của một trường đi học. Sau một thời gian, nhà xuất bản nhận thấy: Có 30% giảng viên mua sách trong số những người nhận được bản giới thiệu, và trong số những giảng viên không nhận được bản giới thiệu, có 10% mua sách. Tìm tỉ lệ những giảng viên nhận được bản giới thiệu trong số những người mua sách.

Bài 10. Giả sử một xét nghiệm X cho kết quả dương tính $(+)$ đối với những người nhiễm HIV với xác suất 95% và cho kết quả $(+)$ đối với những người không nhiễm HIV với xác suất 1% . Một người đến từ địa phương có tỉ lệ nhiễm HIV là 1% được làm xét nghiệm X và cho kết quả $(+)$. Tính xác suất để người này thực sự nhiễm HIV.

Bài 11. Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử với 96% sản phẩm có chất lượng cao. Một qui trình kiểm tra chất lượng sản phẩm có được điểm: 2% sản phẩm có chất lượng cao lại không được công nhận và 5% sản phẩm không có chất lượng cao lại được công nhận. Hãy tính xác suất để sau khi kiểm tra, một sản phẩm được công nhận có chất lượng cao đúng là sản phẩm có chất lượng cao.

Bài 12. Một cặp trẻ sinh đôi có thể do cùng một trứng (sinh đôi thật), hay do hai trứng khác nhau sinh ra (sinh đôi giả). Các cặp sinh đôi thật luôn có cùng giới tính. Đối với cặp sinh đôi giả thì giới tính của mỗi đứa độc lập với nhau và có xác suất $0,5$ là con trai. Thống kê cho thấy 34% cặp sinh đôi đều là trai, 30% cặp sinh đôi đều là gái, và 36% cặp sinh đôi có giới tính khác nhau.

a) Tìm tỉ lệ cặp sinh đôi thật.

b) Chọn ngẫu nhiên một cặp sinh đôi thì được một cặp có cùng giới tính. Tính xác suất để đó là cặp sinh đôi thật.

Bài 13. Có hai chuồng thỏ. Chuồng thứ nhất có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng thứ hai có 3 con thỏ trắng và 7 thỏ đen. Từ chuồng thứ hai ta bắt ngẫu nhiên một con thỏ cho vào chuồng thứ nhất, rồi sau đó lại bắt ngẫu nhiên một con thỏ ở chuồng thứ nhất ra, thì được một thỏ trắng. Tính xác suất để thỏ trắng này là của chuồng thứ nhất.

Bài 14. Hộp thứ nhất có 8 sản phẩm loại A và 2 sản phẩm loại B ; hộp thứ hai có 5 sản phẩm loại A và 3 sản phẩm loại B . Lấy ngẫu nhiên một hộp, rồi lấy ngẫu nhiên từ đó ra 4 sản phẩm.

a) Tính xác suất để được 3 sản phẩm loại A ;

b) Giả sử lấy được một sản phẩm loại B và 3 sản phẩm loại A . Nhiều khả năng là sản phẩm loại B thuộc hộp nào? Tại sao?

Bài 15. Một phân xưởng có 2 máy tự động: máy I sản xuất 45%, máy II sản xuất 55% số sản phẩm. Tỷ lệ phế phẩm tương ứng của các nhà máy lần lượt là 0,1% và 0,2%. Chọn ngẫu nhiên ra một sản phẩm của phân xưởng, tính xác suất sản phẩm được chọn là phế phẩm.

Bài 16. Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: hạt trơn và hạt nhăn, có hai gene ứng với hai kiểu hình này là gene trội B và gene lặn b .

Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cây con lấy ngẫu nhiên một cách độc lập một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ để hình thành một cặp gene. Giả sử cây bố và cây mẹ được chọn ngẫu nhiên từ một quần thể các cây đậu Hà Lan, ở đó tỉ lệ cây mang kiểu gene bb , Bb tương đương là 40% và 60%. Tính xác suất để cây con có kiểu gene bb

Bài 17. Trong một kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông, một tỉnh X có 80% học sinh lựa chọn vào tổ hợp A00 (gồm các môn Toán, Vật Lí, Hóa học). Biết rằng, nếu học sinh chọn tổ hợp A00 thì xác suất học sinh đó đỗ đại học là 0,6; còn nếu học sinh đó không chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,7. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của tỉnh X đã tốt nghiệp trung học phổ thông trong kì thi trên. Biết rằng học sinh đã đỗ đại học. Tính xác suất để học sinh đó chọn tổ hợp A00.

Bài 18. Giả sử một loại bệnh mà tỉ lệ người mắc bệnh là 0,1%. Giả sử có một loại xét nghiệm, mà ai mắc bệnh khi xét nghiệm cũng có phản ứng dương tính, nhưng tỉ lệ dương tính giả là 5% (tức là trong số những người không bị bệnh có 5% số người xét nghiệm lại có phản ứng dương tính). Tính xác suất khi một người xét nghiệm phản ứng dương tính thì khả năng mắc bệnh của người đó là bao nhiêu?

Bài 19. Có hai hộp đựng các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Hộp thứ nhất có chứa 4 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh, hộp thứ hai có 6 viên đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai, sau đó lấy ra ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ hai.

a) Tính xác suất để viên bi được lấy ra từ hộp thứ hai là viên bi đỏ.

b) Giả sử viên bi lấy ra được từ hộp II có màu đỏ. Tính xác suất viên bi màu đỏ thuộc hộp I.

Bài 20. Một nhà máy sản xuất bóng đèn có tỉ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất xưởng ra thị trường mỗi bóng đèn đều được qua kiểm tra chất lượng. Vì sự kiểm tra không thể tuyệt đối hoàn hảo, nên một bóng đèn tốt có xác suất 0,9 được công nhận là tốt, và một bóng đèn hỏng có xác suất 0,95 bị loại bỏ. Hãy tính tỉ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn sau khi qua khâu kiểm tra chất lượng sản phẩm.

Bài 21. Có bốn nhóm xạ thủ tập bắn. Nhóm thứ nhất có 5 người, nhóm thứ hai có 7 người, nhóm thứ ba có 4 người và nhóm thứ tư có 2 người. Xác suất bắn trúng đích của mỗi người trong nhóm thứ nhất, nhóm thứ hai, nhóm thứ ba và nhóm thứ tư theo thứ tự là 0,

$8; 0,7; 0,6$ và $0,5$. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ và xạ thủ này bắn trượt. Hãy xác định xem xạ thủ này có khả năng ở trong nhóm nào nhất.

Bài 22. Trong số bệnh nhân ở một bệnh viện có 50% điều trị bệnh A ; 30% điều trị bệnh B và 20% điều trị bệnh C . Xác suất để chữa khỏi các bệnh A, B và C trong bệnh viện này tương ứng là $0,7; 0,8$ và $0,9$. Hãy tính tỉ lệ bệnh nhân được chữa khỏi bệnh A trong tổng số bệnh nhân đã được chữa khỏi bệnh.

Bài 23. Trong một kho rượu số lượng rượu loại A và rượu loại B bằng nhau. Người ta chọn ngẫu nhiên một chai rượu trong kho và đưa cho 5 người sành rượu nếm thử để xác định xem đây là loại rượu nào. Giả sử mỗi người có xác suất đoán đúng là 75% . Có 4 người kết luận chai rượu loại A và 1 người kết luận chai rượu loại B . Hỏi khi đó xác suất để chai rượu được chọn thuộc loại A là bao nhiêu?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chủ đề 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Vận tốc chuyển động của vật được xác định theo công thức

$$v(t) = s'(t) = -6t^2 + 48t + 9$$

Ta có $v'(t) = -12t + 48; v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$

Từ đó ta có bảng biến thiên:

t	0	4	10
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$			

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Từ thời điểm bắt đầu chuyển động đến thời điểm $t = 4$ giây, vật chuyển động nhanh dần. Từ thời điểm $t = 4$ giây đến thời điểm $t = 10$ giây, vật chuyển động chậm dần.

$$v(t) = V'(t) = \frac{1}{100}(90t^2 - t^3)$$

Bài 2. Ta có

$$v'(t) = \frac{1}{100}(180t - 3t^2).$$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 60 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	60	90	
$v'(t)$	0	+	0	-
$v(t)$	0	1080		0

Từ bảng biến thiên ta thấy: Tốc độ bơm nước lớn nhất bằng 1080, tại thời điểm $t = 60$ phút.

Bài 3. Giả sử cần giảm giá bán mỗi cái tivi là x triệu đồng ($x < 14$).

Do giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi

tháng nên số lượng tivi bán ra tăng lên bây giờ là: $\frac{10x}{0,5} = 20x$.

Khi đó, doanh thu một tháng của cửa hàng là:

$$(100 + 20x) \cdot (14 - x) = -20x^2 + 180x + 1400$$

Xét hàm số $f(x) = -20x^2 + 180x + 1400$ ($x < 14$)

Ta có $f'(x) = -40x + 180$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4,5$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	4,5	14
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1805	0

Từ bảng biến thiên ta thấy: Để doanh thu cửa hàng đạt cao nhất thì giá bán mỗi cái tivi là $14 - 4,5 = 9,5$ triệu đồng

$$P'(t) = \frac{18,75 \cdot e^{-0,75t}}{(0,25 + e^{-0,75t})^2} > 0, \forall t > 0$$

Bài 4. Ta có . Suy ra số lượng quần thể nấm men được nuôi cấy luôn tăng.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{0,25 + e^{-0,75t}} = 100$$

Ta lại có . Do đó, số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100, nên không thể tăng lên vô cùng được.

Bài 5. Theo đề bài ta có: $OA = 2 \text{ km}, OB = 3 \text{ km}$ và $528 \text{ m} = 0,528 \text{ km}$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm $O(0;0), A(2;0), C(3;0)$ suy ra
 $y = f(x) = ax(x-2)(x-3) = a(x^3 - 5x^2 + 6x)$ với $a > 0$.

$$y' = a(3x^2 - 10x + 6), y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{7}}{3} \\ x = \frac{5 - \sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

Ta có:

Từ độ cao của đồi ta có tại vị trí điểm cực đại $x_{CD} = \frac{5 - \sqrt{7}}{3}; y_{CD} = 0,528$ suy ra

$$a = \frac{0,528}{\left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}\right)} \approx 0,25$$

Điểm sâu nhất của hồ ứng với vị trí của điểm cực tiểu $x_{CT} = \frac{5 + \sqrt{7}}{3}, y_{CT} \approx 0,1578$

Vậy độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất xấp xỉ $0,1578 \text{ km}$ hay xấp xỉ 158 m .

$$\angle QPR = \varphi (\text{rad}), \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Bài 6. Đặt

Ta có $\triangle PQR$ vuông tại $Q \Rightarrow PQ = PR \cdot \cos \varphi = 4 \cos \varphi$.

Mà $\angle QOR = 2\angle QPR = 2\varphi$.

Độ dài cung tròn $QR = 2 \cdot 2\varphi = 4\varphi$.

Thời gian anh Tài chèo từ P đến Q là: $\frac{4 \cos \varphi}{3}$ (giờ).

