**ĐỀ 69**

**Bài 1.** Cho biểu thức M = $\frac{x^{2}-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$ $-\frac{x^{2}+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức M

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B = M + x $-1$

**Bài 2**. a) Giải phương trình $\frac{x^{2}}{3+\sqrt{9-x^{2}}}$ $+$ $\frac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^{2}}\right)}$ $=1$

b) Giải hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{c}x^{2}+y^{2}+\frac{2xy}{x+y}=1\\\sqrt{x+y}=x^{2}-y\end{array}\right.$

**Bài 3.** Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB. Gọi C là một điềm trên nửa đường tròn (O)(C khác A,B ). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, D là điểm đối xứng với A qua C , I là trung điểm của CH , J là trung điểm của DH

a) Chứng minh rằng $\hat{CIJ}=\hat{CBH}$

b) Chứng minh rằng $△$CJH$\~△$HIB

c) Gọi E là giao điểm của HD và BI . Chứng minh rằng HE.HD = $HC^{2}$

**Bài 4.** Cho điểm M ở bên trong tam giác ABC, các đường thẳng AM,BM,CM cắt các cạnh của tam giác ABC lần lượt tại D,E,F. Tìm vị trí của điểm M trong tam giác ABC sao cho biểu thức

P $=$ $\frac{MA}{MD}$ $+\frac{MB}{ME}+\frac{MC}{MF}$ đạt giá trị nhỏ nhất

**Bài 5**. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (x; y;z) thỏa mãn

3(xy + yz + zx) = 4xyz

**--------- HẾT -----------**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Bài 1.** Cho biểu thức M = $\frac{x^{2}-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$ $-\frac{x^{2}+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức M

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B = M + x $-1$

**Lời giải**

a) ĐKXĐ: x $\geq $ 0

Ta có:

M = $\frac{x^{2}-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$ $-\frac{x^{2}+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$ = $\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x^{3}}-1\right)}{x+\sqrt{x}+1}$ $-\frac{\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x^{3}}-1\right)}}{2x-\sqrt{x}+1}$

= $\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{x+\sqrt{x}+1}$ $-\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{x-\sqrt{x}+1}$

= $\left(x-\sqrt{x}\right)-\left(x+\sqrt{x}\right)=-2\sqrt{x}$

b) Ta có:

B = M$ + x-1=x-2\sqrt{x}-1=\left(\sqrt{x}-1\right)^{2}-2\geq -2$

Vậy GTNN của B bằng $-2$ khi x = 1

**Bài 2**. a) Giải phương trình $\frac{x^{2}}{3+\sqrt{9-x^{2}}}$ $+$ $\frac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^{2}}\right)}$ $=1$

b) Giải hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{c}x^{2}+y^{2}+\frac{2xy}{x+y}=1\\\sqrt{x+y}=x^{2}-y\end{array}\right.$

**Lời giải**

a. Điều kiện: $\left\{\begin{array}{c}-3\leq x\leq 3\\x\ne 0\end{array}\right.$

Đặt $\sqrt{9-x^{2}}=a$ ( a $\geq 0$, $a\ne 3$) $⇔$ $x^{2}=9-a^{2}$

Theo bài ra, tao có:

$\frac{x^{2}}{3+\sqrt{9-x^{2}}}$ $+$ $\frac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^{2}}\right)}$ $=1$ $⇔$ $\frac{9-a^{2}}{3+a}$ $+$ $\frac{1}{4\left(3-a\right)}=1$

$⇔3-a+\frac{1}{4\left(3-a\right)}$ $=1$ $⇔\frac{1}{4\left(3-a\right)}$ $=a-2$

$⇔4(a-2)(-b-a)=1$ $⇔4(-a^{2}+5a-6)=1$

$⇔-4a^{2}+20a-25=0$ $⇔\left(2a-5\right)^{2}=0$ $⇔a=\frac{5}{2}$

$⇔\sqrt{9-x^{2}}$ $=\frac{5}{2}$ $⇔9-x^{2}$ $=\frac{25}{4}$ $⇔x^{2}=9-\frac{25}{4}$

$⇔x^{2}=9-\frac{25}{4}$ $⇔x^{2}=\frac{11}{4}$ $⇔$ $\left[\begin{array}{c}x=-\frac{\sqrt{11}}{2}\\x=\frac{\sqrt{11}}{2}\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=-\frac{\sqrt{11}}{2}$, $x=\frac{\sqrt{11}}{2}$

b) Ta có: $\left\{\begin{array}{c}x^{2}+y^{2}+\frac{2xy}{x+y}=1\\\sqrt{x+y}=x^{2}-y\end{array}\right.$

ĐKXĐ: $x+y>0$

Từ (1) ta có: $\left(x+y\right)^{2}-2xy+\frac{2xy}{x+y}=1$

Đặt $\left\{\begin{array}{c}x+y=a\\2xy=b\end{array},a>\right.$0

Ta có: $a^{2}-b+\frac{b}{a}=1$ $⇒$ $a^{3}-ab+b-a=0$

$⇔$ a($a^{2}-1)-b(a-1)=0⇔$ $\left(a-1\right)$($a^{2}+a-b)=0$

**TH1:** $a-1=0$

$⇔$ $a=1⇒x+y=1⇒y=1-x$

Thay vào (2) ta được: $1=x^{2}+x-1⇔x^{2}+x-2=0⇔\left[\begin{array}{c}x=1\\x=-2\end{array}\right.$

$⇒\left[\begin{array}{c}y=0\\y=3\end{array}\right.$

**TH2**: $a^{2}+a-b=0$ $⇔\left(x+y\right)^{2}+x+y-2xy=0$

$$⇔x^{2}+y^{2}+x+y=0$$

Vì $x^{2}+y^{2}\geq 0, x+y>0⇒x^{2}+y^{2}+x+y>0$

Trường hợp này không tồn tại các giá trị x, y

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: (x, y) = (1;0), (x, y) = ($-2;3)$

**Bài 3.** Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB. Gọi C là một điềm trên nửa đường tròn (O)(C khác A,B ). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, D là điểm đối xứng với A qua C , I là trung điểm của CH , J là trung điểm của DH

a) Chứng minh rằng $\hat{CIJ}=\hat{CBH}$

b) Chứng minh rằng $△$CJH$\~△$HIB

c) Gọi E là giao điểm của HD và BI . Chứng minh rằng HE.HD = $HC^{2}$

**Lời giải**

****

a) Ta có: $\hat{CBH}=\hat{ACH}$ (cùng phụ $\hat{HCB}$) (1)

Xét $△$CHD: I và J lần lượt là trung điểm của CH & DH $⇒$ IJ là đường trung điểm $△$CHD

$⇒$ IJ//CD $⇒$ IJ//AC $⇒$ $\hat{CIJ}=\hat{ACH}$ (So le trong) (2)

Từ (1) và (2) $⇒$ $\hat{CIJ}=\hat{CBH}$ (đpcm)

b) Thấy CJ là đường trung bình của tam giác ADH $⇒$ $\frac{CJ}{AH}$ $=\frac{1}{2}$

Mà $\frac{HI}{CH}$ $=\frac{1}{2}$ (do I là trung điểm CH) $⇒$ $\frac{CJ}{AH}=\frac{HI}{CH}$ $⇒\frac{CJ}{HI}=\frac{AH}{CH}$

Dễ chứng minh $△AHC\~△$CHB $⇒$ $\frac{AH}{CH}=\frac{CH}{HB}$ $⇒\frac{CJ}{HI}=\frac{CH}{HB}$

Lại có: CJ//AB và CH vuông AB $⇒$ CH vuông CJ $⇒$ $\hat{JCH}=90°$

Xét $△$CJH$ và△$HIB: $\hat{JCH}=\hat{IHB}$; $\frac{CJ}{CH}=\frac{CH}{HB}⇒△$CJH$\~△$HIB (c.g.c) (đpcm)

c) Ta có: $\hat{HIB}+\hat{HBI}=90°$. Mà $\hat{HBI}=\hat{CHJ}$ (do $△$CJH$\~△$HIB)

 $⇒$ $\hat{HIB}+\hat{CHJ}=90°$

$⇒$ Tam giác HEI vuông tại E $⇒$ $\hat{IEJ }=90°$

Xét tứ giác CIEJ: $\hat{IEJ }=\hat{ICJ}=90°$ $⇒$ Tứ giác CIEJ nội tiếp đường tròn

$⇒$ $\hat{ECI }=\hat{EJI}$ hay $\hat{ECH }=\hat{HJI}$. Mà $\hat{HJI}$ $=\hat{HDC}$ (IJ//CD) $⇒$ $\hat{ECH }=\hat{HDC}$

Xét $△HEC và△$HCD: $\hat{ECH }=\hat{CDH}$ (Cmt); $\hat{CHD} $chung

$⇒$ $△HEC\~△$HCD (g.g)

Suy ra $\frac{HE}{HC}=\frac{HC}{HD}$ $⇒$ HE.HD = $HC^{2}$ (dpcm)

**Bài 4.** Cho điểm M ở bên trong tam giác ABC, các đường thẳng AM,BM,CM cắt các cạnh của tam giác ABC lần lượt tại D,E,F. Tìm vị trí của điểm M trong tam giác ABC sao cho biểu thức

P $=$ $\frac{MA}{MD}$ $+\frac{MB}{ME}+\frac{MC}{MF}$ đạt giá trị nhỏ nhất

**Lời giải**

****

Gọi $S\_{MBC}=S\_{1}$; $S\_{AMC}=S\_{2}$; $S\_{AMB}=S\_{3}$ (với $S\_{N}$ là diện tích của hình N)

Ta có: $\frac{MA}{MA'}$ $=$ $\frac{S\_{2}}{S\_{MA'C}}$ $=$ $\frac{S\_{3}}{S\_{MA'B}}=$ $\frac{S\_{2}+S\_{3}}{S\_{MA'C}+S\_{MA'B}}$ $=$ $\frac{S\_{2}+S\_{3}}{S\_{1}}$

Bn làm tương tự:

$\frac{MB}{MB'}$ $=$ $\frac{S\_{1}+S\_{3}}{S\_{2}}$ ; $\frac{MC}{MC'}$ $=$ $\frac{S\_{1}+S\_{2}}{S\_{3}}$

Cộng các Tỉ số trên ta có:

S = $\frac{MA}{MA'}$ $+$ $\frac{MB}{MB'}+\frac{MC}{MC'}$ $=$ $\frac{S\_{2}+S\_{3}}{S\_{1}}+$ $\frac{S\_{1}+S\_{3}}{S\_{2}}+\frac{S\_{1}+S\_{2}}{S\_{3}}$

= $\left(\frac{S\_{1}}{S\_{2}}+\frac{S\_{2}}{S\_{1}}\right)+\left(\frac{S\_{2}}{S\_{3}}+\frac{S\_{3}}{S\_{2}}\right)+\left(\frac{S\_{3}}{S\_{1}}+\frac{S\_{1}}{S\_{3}}\right)$ $\geq $ 6

Dấu “=” xảy ra $⇔$ $\left(S\_{1}-S\_{2}\right)^{2}=\left(S\_{2}-S\_{3}\right)^{2}=\left(S\_{3}-S\_{1}\right)^{2}=0$

$⇔$ $S\_{1}=S\_{2}=S\_{3}$ $⇔$ M là trọng tâm tam giác ABC (bn tự cm nha)

Vậy M là trọng tâm của tam giác ABC thì S đạt giá trị nhỏ nhất (=6)

**Bài 5**. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (x; y;z) thỏa mãn

3(xy + yz + zx) = 4xyz

**Lời giải**

Nhận thấy x = y = z = 0 là nghiệm phương trình

Xét x, y, z khác ta có

$\frac{5\left(xy+yz+zx\right)}{xyz}$ = 4 $⇔$ 5$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ = 4 $⇔\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\vdots 4$

Ta có $\left|x\right|\geq 1⇔\frac{1}{\left|x\right|}$ $\leq 1$

Tương tự với 2 cái còn lại

$\frac{1}{\left|x\right|}$ $+\frac{1}{\left|y\right|}+\frac{1}{\left|z\right|}$ $\leq $ 3$⇔\frac{1}{\left|x\right|}$ $+\frac{1}{\left|y\right|}+\frac{1}{\left|z\right|}$ $\geq $ $\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right|$ $⇔$ $\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right|\leq $ 3

$⇔$ $-3\leq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq 3$

Mà $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\vdots 4$ từ $-3$ đến 3 chỉ có số 0 chia hết cho 4 mà x, y, z khác 0 (loại)

Vậy bộ nghiệm duy nhất của pt là x = y = z = 0

**-------------- HẾT -------------**