

Bài 28. Thể tích, khoảng cách trong không gian
 Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

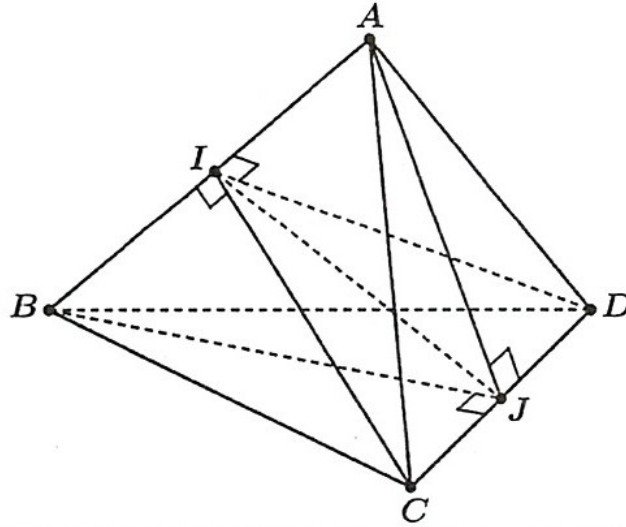
PHẦN E. CÂU HỎI TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh $2a$. Tìm đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau AB, CD và tính độ dài của nó theo a .

Lời giải

Lời giải

Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB, CD .



Các tam giác ABC, ABD đều có I là trung điểm AB nên

$$\begin{cases} AB \perp CI \\ AB \perp DI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ICD), \quad \text{mà } IJ \subset (ICD) \Rightarrow AB \perp IJ. \quad (1)$$

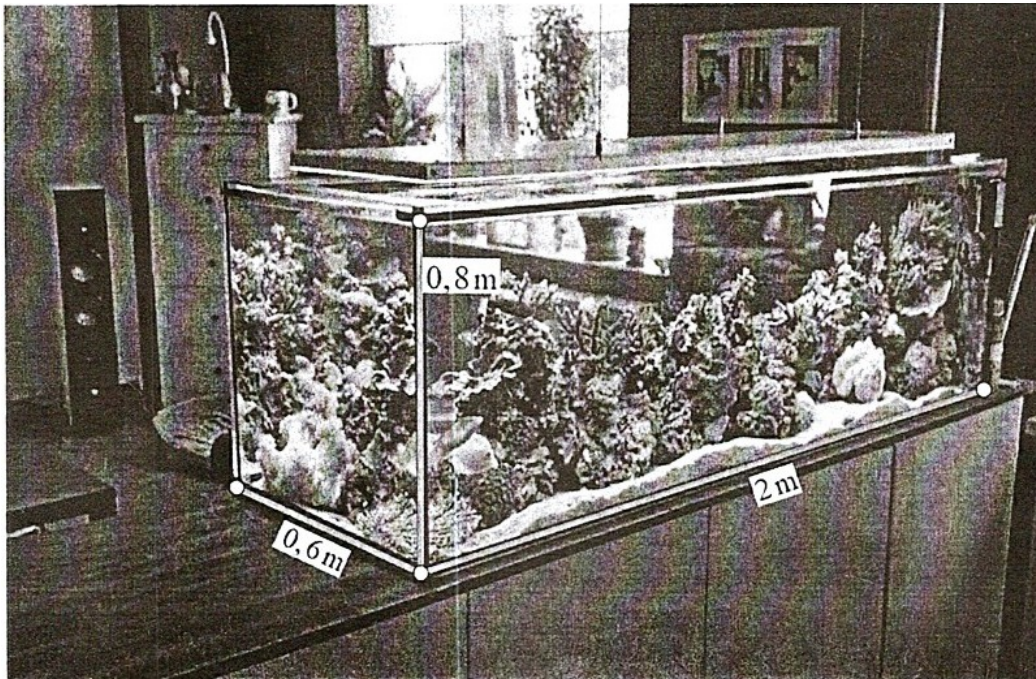
Tương tự, các tam giác ACD, BCD đều có J là trung điểm CD nên

$$\begin{cases} CD \perp AJ \\ CD \perp BJ \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABJ), \quad \text{mà } IJ \subset (ABJ) \Rightarrow CD \perp IJ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra IJ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB, CD .

Ta có: $CI = \frac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}; IJ = \sqrt{CI^2 - CJ^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$

Câu 2. Một bể cá được làm bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $0,6m; 2m; 0,8m$. Tìm thể tích và độ dài đường chéo của bể cá đó.



Lời giải

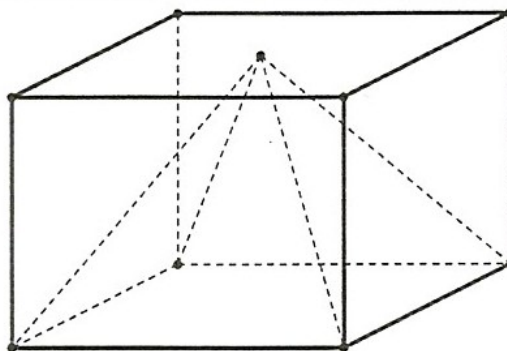
Lời giải

Thể tích của bể cá hình hộp chữ nhật có ba kích thước $a=0,6m; b=2m; c=0,8m$ là:
 $V=abc=0,6 \cdot 2 \cdot 0,8=0,96(m^3)$

Độ dài đường chéo bề kính hình hộp chữ nhật là:

$$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{0,6^2+2^2+0,8^2}=\sqrt{5}\approx 2,236(m).$$

Câu 3. Một cái hộp hình lập phương, bên trong nó đựng một mô hình đồ chơi có dạng hình chóp tứ giác đều mà đỉnh của hình chóp đó trùng với tâm của một mặt chiếc hộp, giả sử hình vuông đáy của hình chóp trùng với một mặt của chiếc hộp (mặt này cùng với mặt chứa đỉnh hình chóp là hai mặt đối nhau). Biết cạnh của chiếc hộp bằng $30cm$, hãy tính thể tích phần không gian bên trong chiếc hộp không bị chiếm bởi mô hình đồ chơi dạng hình chóp (mô hình đồ chơi được làm bởi chất liệu nhựa đặc bên trong).



Lời giải

Lời giải

Thể tích cái hộp (khối lập phương) là: $V_1=30^3=27000(cm^3)$

Xét đồ chơi có dạng hình chóp tứ giác đều, chiều cao của hình chóp bằng với một cạnh của hình lập phương, hay $h=30cm$, đáy của hình chóp có diện tích $S=30^2=900cm^2$.

Thể tích khối đồ chơi (khối chóp tứ giác đều) là:

$$V_2=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\cdot 900\cdot 30=9000(cm^3).$$

Thể tích phần không gian bên trong chiếc hộp không bị chiếm bởi mô hình đồ chơi dạng hình chóp:

$$V=V_1-V_2=27000-9000=18000(cm^3)$$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tìm thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

Lời giải

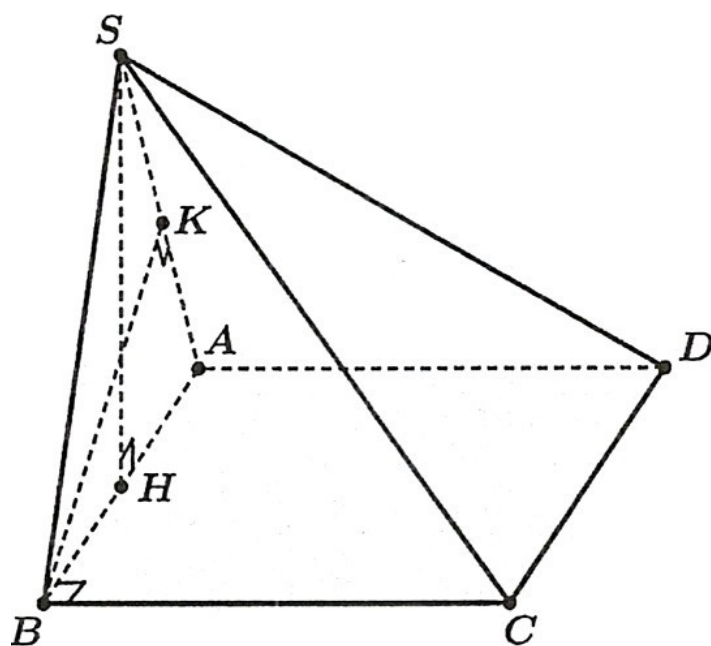
Gọi H là trung điểm AB , suy ra $SH \perp AB$ (do tam giác SAB đều).

Mặt khác $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Đường cao hình chóp là $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; diện tích đáy hình chóp $S_{ABCD} = a^2$.

Thể tích khối chóp là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} \text{ (đơn vị thể tích).}$$



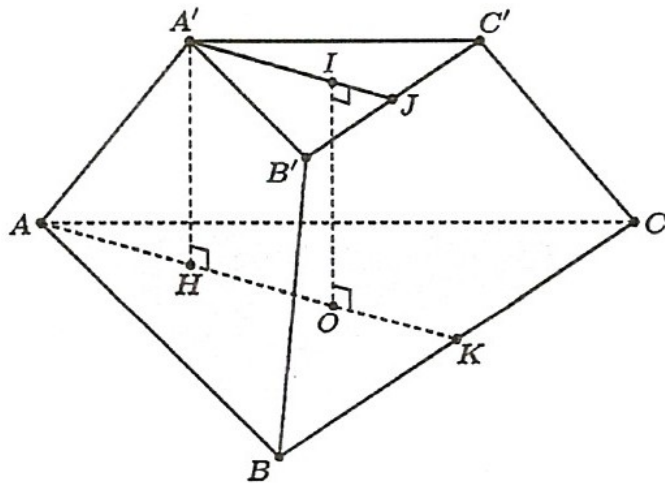
Câu 5. Một hình chóp cắt đều $ABC \cdot A'B'C'$ có cạnh đáy lớn bằng $4a$, cạnh đáy nhỏ bằng $2a$ và chiều cao của nó bằng $\frac{3a}{2}$. Tìm thể tích của khối chóp cắt đều đó.

Lời giải

Lời giải

Gọi O, I theo thứ tự là tâm của đáy lớn ABC và đáy bé $A'B'C'$; K, J theo thứ tự là trung điểm của BC và $B'C'$.

Ta có $h = IO = \frac{3a}{2}$ là chiều cao của hình chóp cắt đều $ABC \cdot A'B'C'$.



Diện tích hai đáy hình chóp cắt đều là:

$$S_1 = S_{\triangle ABC} = \frac{(4a)^2 \sqrt{3}}{4} = 4a^2 \sqrt{3}; S_2 = S_{\triangle A'B'C'} = \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3}$$

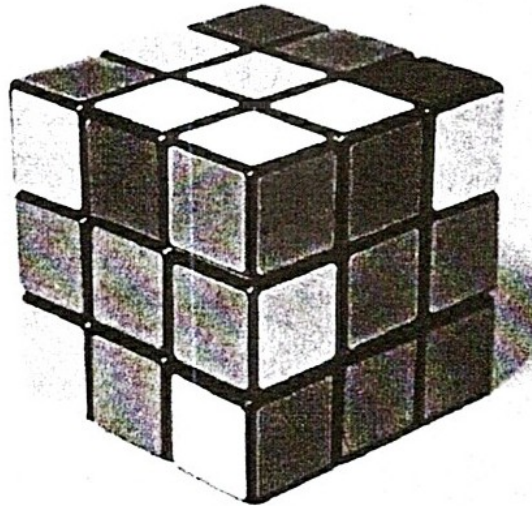
Thể tích khối chóp cắt đều là:

$$V = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} (4a^2 \sqrt{3} + \sqrt{4a^2 \sqrt{3} \cdot a^2 \sqrt{3}} + a^2 \sqrt{3}) = \frac{7a^3 \sqrt{3}}{2} \quad (\text{đơn vị thể tích})$$

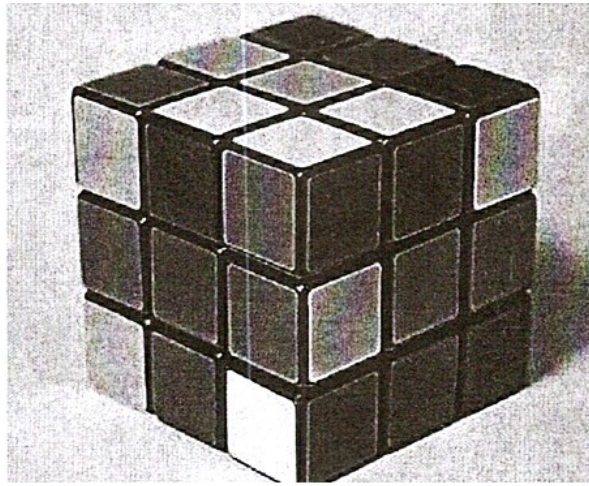
Câu 6. Một khối rubik 3×3 (được chia làm 27 khối lập phương nhỏ) có dạng một hình lập phương với kích thước cạnh bằng 6 cm .

Tìm thể tích của khối rubik đó, biết khoảng hở giữa các khối lập phương nhỏ không đáng kể.



Lời giải

Lời giải



Thể tích khối rubik là:

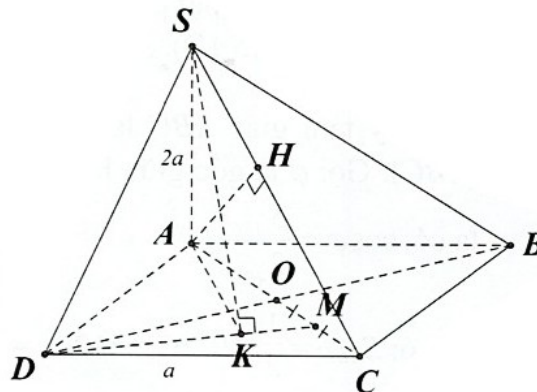
$$V = 6^3 = 216 (cm^3).$$

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Gọi O là tâm của $ABCD$.

Tính khoảng cách từ S đến DM với M là trung điểm OC .

Lời giải

Lời giải



Kẻ $SK \perp DM$ tại $K \Rightarrow d(S, DM) = SK$.

Ta có: $\begin{cases} DM \perp SA \\ DM \perp SK \end{cases} \Rightarrow DM \perp (SAK) \Rightarrow DM \perp AK$

Ta có: $\triangle KMA \sim \triangle OMD$

$$\Rightarrow \frac{KA}{OD} = \frac{AM}{DM} \Rightarrow KA = \frac{AM \cdot OD}{DM} = \frac{\frac{3}{4}a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}a$$

$$SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{3\sqrt{10}}{5}a\right)^2} = \frac{\sqrt{190}}{5}a$$

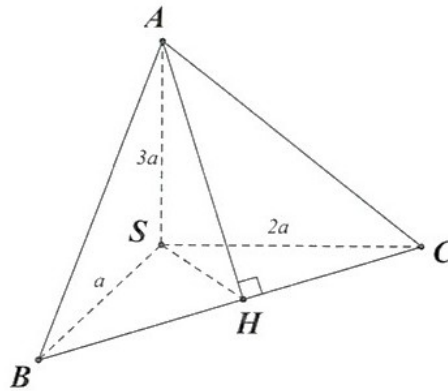
Ta có:

$$\text{Vậy } d(S, DM) = \frac{\sqrt{190}}{5}a.$$

Câu 8. Cho tứ diện $S.ABC$ trong đó SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và $SA = 3a, SB = a, SC = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng BC .

Lời giải

Lời giải



Kẻ $AH \perp BC$ tại $H \Rightarrow d(A, BC) = AH$.

Ta có:
$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$$

$$SH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SC^2} + \frac{1}{SB^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{a^2}}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$$

Ta có:

$$AH = \sqrt{SA^2 + SH^2} = \sqrt{(3a)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}a\right)^2} = \frac{7\sqrt{5}}{5}a$$

Ta có:

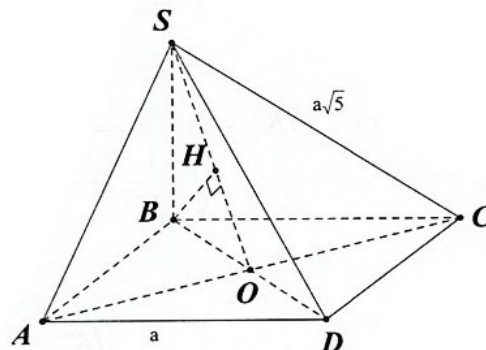
$$d(A, BC) = \frac{7\sqrt{5}}{5}a$$

Vậy

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = a\sqrt{5}$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) .

Lời giải

Lời giải



Kẻ $BH \perp SO$ tại H

Ta có:
$$\begin{cases} AC \perp SB \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp BH$$

Ta lại có: $BH \perp SO \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow d(B, (SAC)) = BH$

Ta có: $SB = \sqrt{SC^2 - BC^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - a^2} = 2a$

$$BH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SB^2} + \frac{1}{OB^2}}}$$

Ta có:

Vậy $d(B, (SAC)) = \frac{2}{3}a$

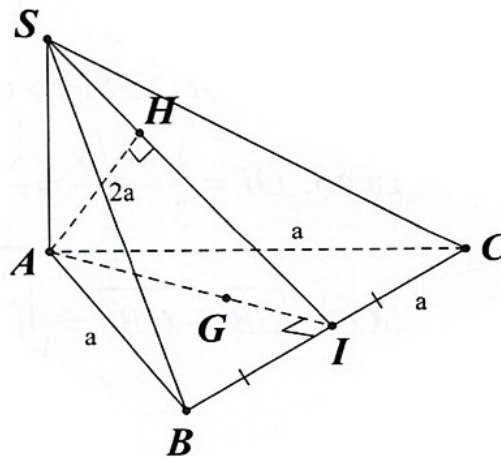
Ta có: DB cắt (SAC) tại O

$$\Rightarrow \frac{d(D, (SAC))}{d(B, (SAC))} = \frac{DO}{BO} = 1 \Rightarrow d(D, (SAC)) = d(B, (SAC)) = \frac{2}{3}a$$

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SB = 2a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải

Lời giải



Kẻ $AI \perp BC$, kẻ $AH \perp SI$ tại H

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$

Ta lại có: $AH \perp SI \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$

Ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - BA^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$

$$AH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{3}a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}} = \frac{\sqrt{15}}{5}a$$

Ta có:

Vậy $d(A, (SBC)) = \frac{\sqrt{15}}{5}a$

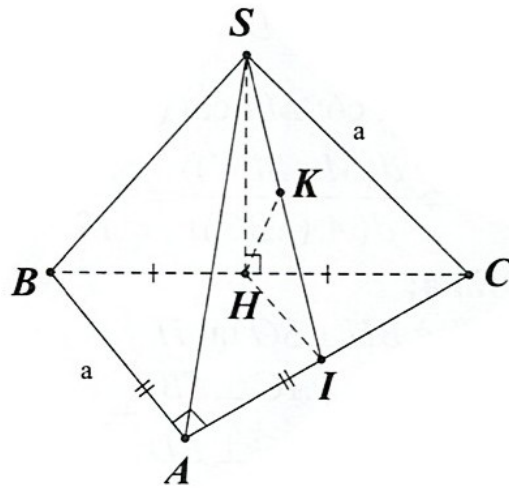
Ta có: GA cắt (SBC) tại I

$$\Rightarrow \frac{d(G, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{GI}{AI} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(G, (SBC)) = \frac{1}{3}d(A, (SBC)) = \frac{\sqrt{15}}{15}a$$

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $SH \perp (ABC)$ với H là trung điểm BC . Biết $AB = SC = a$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .

Lời giải

Lời giải



Kẻ $HI \perp AC$, kẻ $HK \perp SI$ tại K

Ta có:
$$\begin{cases} AC \perp SH \\ AC \perp HI \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK$$

Ta lại có: $HK \perp SI \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow d(H, (SAC)) = HK$

Ta có: $HI = \frac{1}{2}a$;

$$SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$HK = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}a\right)^2}}} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

Ta có:

$$d(H, (SAC)) = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

Vậy

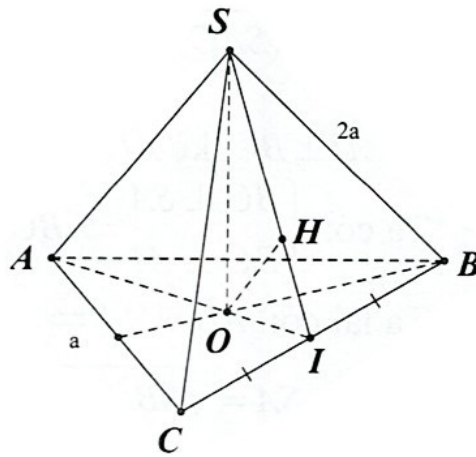
Ta có: BH cắt (SAC) tại C

$$\Rightarrow \frac{d(B, (SAC))}{d(H, (SAC))} = \frac{BC}{HC} = 2 \Rightarrow d(B, (SAC)) = 2d(H, (SAC)) = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Câu 12. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh a và cạnh bên $2a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải

Lời giải



Kẻ $OH \perp SI$ tại H

Ta có: $\begin{cases} BC \perp OI \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOI) \Rightarrow BC \perp OH$

Ta lại có: $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O, (SBC)) = OH$

Ta có: $OI = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$;

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}a$$

$$OH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{33}}{3}a\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}}} = \frac{\sqrt{165}}{45}a$$

Ta có:

$$d(O, (SBC)) = \frac{\sqrt{165}}{45}a$$

Vậy

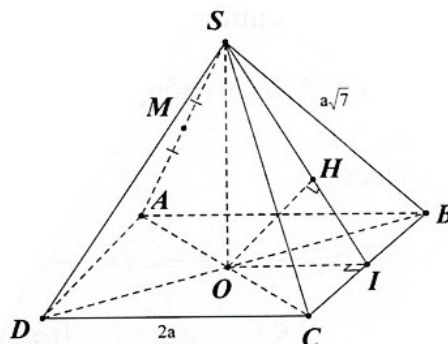
Ta có: AO cắt (SBC) tại I

$$\Rightarrow \frac{d(A, (SBC))}{d(O, (SBC))} = \frac{AI}{OI} = 3 \Rightarrow d(A, (SBC)) = 3d(O, (SBC)) = \frac{\sqrt{165}}{15}a$$

Câu 13. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy cạnh $2a$ và cạnh bên $a\sqrt{7}$, gọi M là trung điểm SA . Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải

Lời giải



Dựng và chứng minh được $d(O, (SBC)) = OH$

$$OI = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$$

Ta có:

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(a\sqrt{7})^2 - \left(\frac{2a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{5}a$$

$$OH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{5}a)^2} + \frac{1}{a^2}}} = \frac{\sqrt{30}}{6}a$$

Ta có:

$$d(O, (SBC)) = \frac{\sqrt{30}}{6}a.$$

Vậy

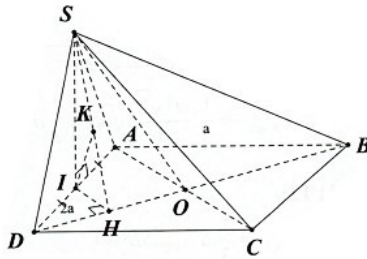
$$MO \parallel (SBC) \Rightarrow d(M, (SBC)) = d(O, (SBC)) = \frac{\sqrt{30}}{6}a$$

Ta lại có:

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a$. Tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) .

Lời giải

Lời giải



Gọi I là trung điểm của AD

Vì $\triangle SAD$ đều nên $SI \perp AD$

$$\begin{cases} (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ \text{Trong}(SAD), SI \perp AD \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$$

Ta có

Dựng và chứng minh được $d(I, (SBD)) = IK$

Ta có: $\triangle HDI \sim \triangle ADB$

$$\Rightarrow \frac{IH}{AB} = \frac{ID}{BD} \Rightarrow IH = \frac{AB \cdot ID}{BD} = \frac{a \cdot a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

$$IK = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SI^2} + \frac{1}{HI^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}a\right)^2}}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

Ta có:

$$d(I, (SBD)) = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

Vậy

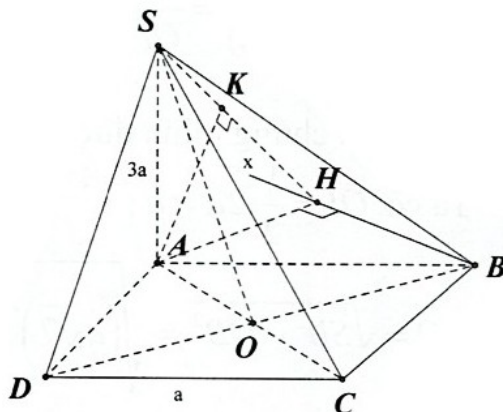
Ta có: AI cắt (SBD) tại D

$$\Rightarrow \frac{d(A, (SBD))}{d(I, (SBD))} = \frac{AD}{ID} = 2 \Rightarrow d(A, (SBD)) = 2d(I, (SBD)) = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 3a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB .

Lời giải

Lời giải



Dựng $Bx \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (SBx)$

Suy ra $d(AC, SB) = d(AC, (SBx)) = d(A, (SBx))$

Dựng và chứng minh được $d(A, (SBx)) = AK$

Ta có: $\triangle AHB$ vuông cân tại H nên $AH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Ta có:

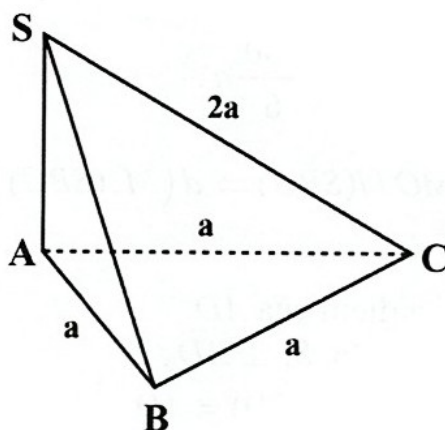
$$AK = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(3a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}}} = \frac{3\sqrt{19}}{19}a$$

Vậy $d(AC, SB) = \frac{3\sqrt{19}}{19}a$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SC = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

Lời giải



$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

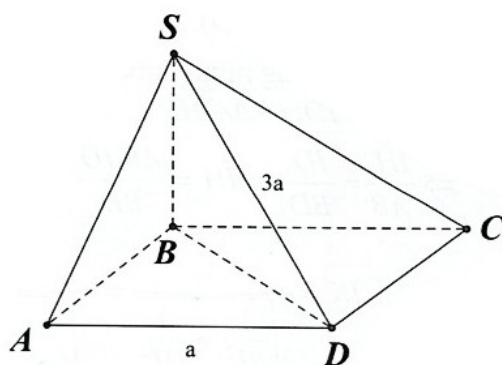
$$SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3}a = \frac{1}{4}a^3$$

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SB \perp (ABCD)$ và $SD = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

Lời giải



$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SB$$

$$S_{ABCD} = a^2$$

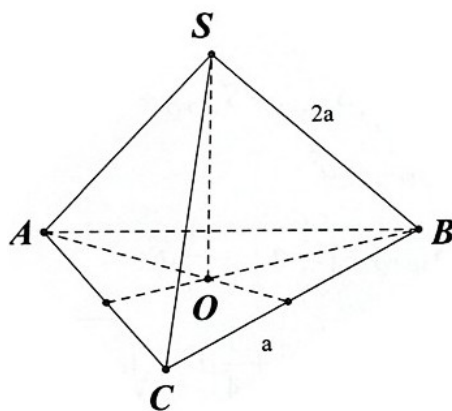
$$SB = \sqrt{SD^2 - BD^2} = \sqrt{(3a)^2 - (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}a$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{7}a = \frac{\sqrt{7}}{3}a^3$$

Câu 18. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh a và cạnh bên $2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

Lời giải



$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SO$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

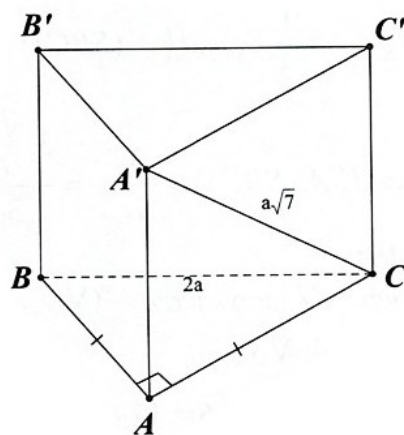
$$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}a$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{33}}{3}a = \frac{\sqrt{11}}{12}a^3$$

Câu 19. Cho khối lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $BC = 2a$ và $A'C = a\sqrt{7}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Lời giải

Lời giải



$$V = S_{ABC} \cdot AA'$$

$$AB = AC = \frac{2a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$$

$$S_{ABC} = \frac{(\sqrt{2}a)^2}{2} = a^2$$

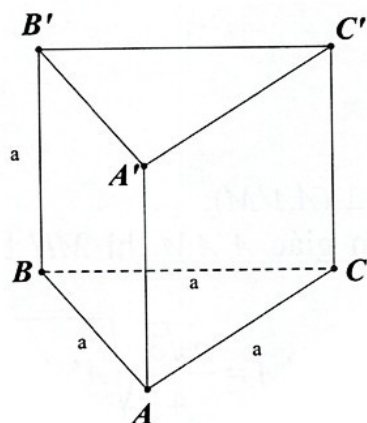
$$AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{5}a$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = a^2 \cdot \sqrt{5}a = \sqrt{5}a^3$$

Câu 20. Cho khối lăng trụ đều $ABC \cdot A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Lời giải

Lời giải

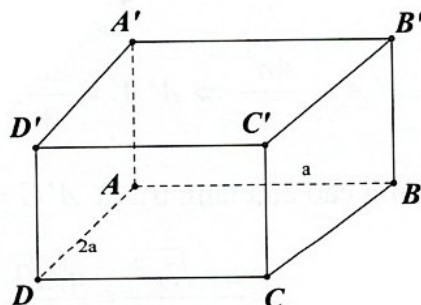


$$\begin{aligned}
 V &= S_{ABC} \cdot A'A \\
 &= \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{2} a^3
 \end{aligned}$$

Câu 21. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a$. Biết thể tích khối hộp chữ nhật là $14a^3$. Tính chiều cao $A'C$.

Lời giải

Lời giải

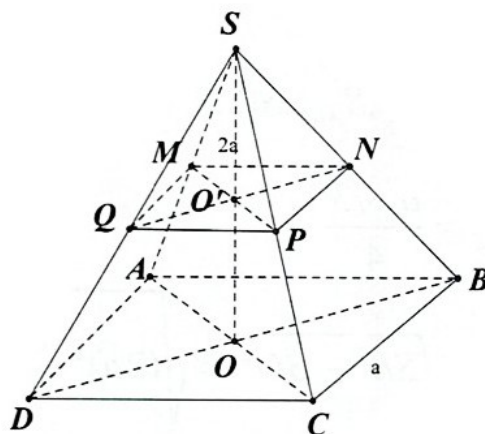


$$\begin{aligned}
 V &= AB \cdot AD \cdot AA' \\
 \Rightarrow AA' &= \frac{V}{AB \cdot AD} = \frac{14a^3}{a \cdot 2a} = 7a \\
 A'C &= \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{AA'^2 + AB^2 + AD^2} \\
 &= \sqrt{(7a)^2 + (2a)^2 + a^2} = 3\sqrt{6}a
 \end{aligned}$$

Câu 22. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy cạnh a và chiều cao $SO = 2a$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tính thể tích khối chóp cắt đều $ABCD.MNPQ$.

Lời giải

Lời giải

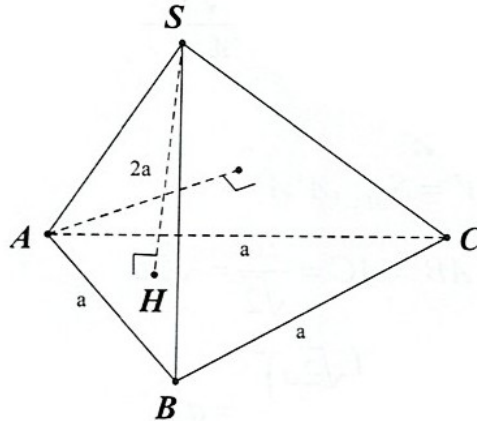


$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{3} (S_{ABCD} + S_{MNPQ} + \sqrt{S_{ABCD} \cdot S_{MNPQ}}) \cdot OO' \\
 S_{ABCD} &= a^2 \\
 S_{MNPQ} &= \left(\frac{1}{2}a \right)^2 = \frac{1}{4}a^2 \\
 \Rightarrow V &= \frac{1}{3} \left(a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{4}a^2} \right) \cdot a = \frac{7}{12}a^3
 \end{aligned}$$

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , chiều cao của hình chóp kẻ từ S là $2a$. Biết diện tích tam giác SBC là $3a^2$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải

Lời giải



$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \frac{\sqrt{3}}{6} a^3$$

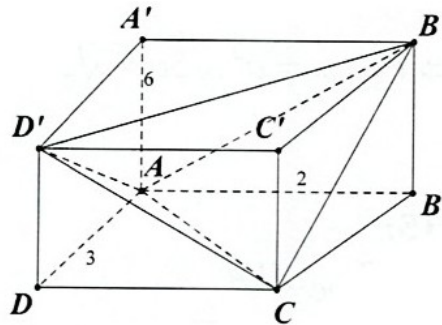
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{SBC} \cdot d(A, (SBC))$$

$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = \frac{3V}{S_{SBC}} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} a^3}{3a^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} a$$

Câu 24. Một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước là $2cm, 3cm$ và $6cm$. Tính thể tích của khối tứ diện $ACB'D'$.

Lời giải

Lời giải



$$V_{ACB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - (V_{D'.ACD} + V_{B'.ABC} + V_{A'.ABD'} + V_{C'.BCD'})$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 6 - 4 \cdot V_{D'.ACD}$$

$$= 36 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 12 (cm^3)$$

Câu 25. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

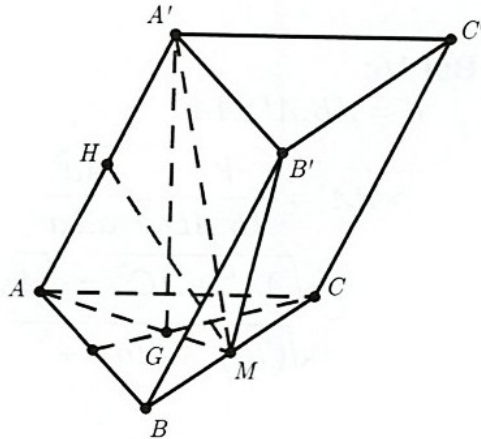
Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải

Lời giải

M là trung điểm của BC thì $BC \perp (AA'M)$.

Gọi MH là đường cao của tam giác $A'M$ thì $MH \perp AA'$ và $HM \perp BC$ nên HM là khoảng cách AA' và BC .



Ta có
$$A'AHM = A'GAM \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot AA' = \frac{a\sqrt{3}}{4} \sqrt{A'A^2 - \frac{a^2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow A'A^2 = 4 \left(A'A^2 - \frac{a^2}{3} \right) \Leftrightarrow 3A'A^2 = \frac{4a^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow A'A^2 = \frac{4a^2}{9} \Leftrightarrow A'A^2 = \frac{2a}{3}$$

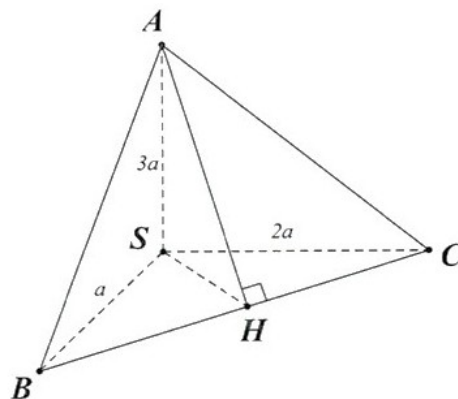
Đường cao của lăng trụ là
$$AG = \sqrt{\frac{4a^2}{9} - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a}{3}$$

Thể tích
$$V_{L\Gamma} = \frac{a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

Câu 26. Cho tứ diện $S \cdot ABC$ trong đó SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và $SA = 3a, SB = a, SC = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng BC .

Lời giải

Lời giải



Kẻ $AH \perp BC$ tại $H \Rightarrow d(A, BC) = AH$

Ta có:
$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$$

$$SH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SC^2} + \frac{1}{SB^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{a^2}}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$$

Ta có:

$$AH = \sqrt{SA^2 + SH^2} = \sqrt{(3a)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}a\right)^2} = \frac{7\sqrt{5}}{5}a$$

Ta có:

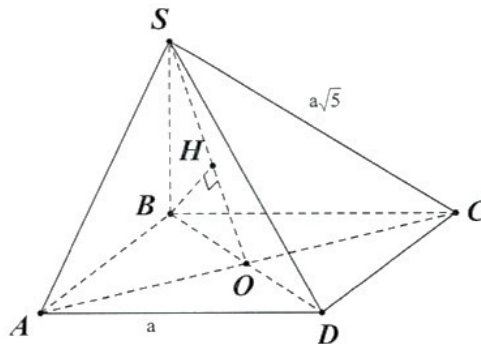
$$d(A, BC) = \frac{7\sqrt{5}}{5}a$$

Vậy

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = a\sqrt{5}$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) .

Lời giải

Lời giải



Kẻ $BH \perp SO$ tại H

$$\left\{ \begin{array}{l} AC \perp SB \\ AC \perp BD \end{array} \right. \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp BH$$

Ta có:

Ta lại có: $BH \perp SO \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow d(B, (SAC)) = BH$.

$$\text{Ta có: } SB = \sqrt{SC^2 - BC^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - a^2} = 2a$$

$$BH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SB^2} + \frac{1}{OB^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}} = \frac{2}{3}a$$

Ta có:

$$d(B, (SAC)) = \frac{2}{3}a$$

Vậy

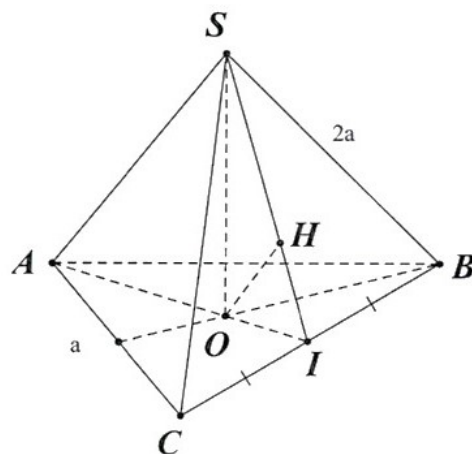
Ta có: DB cắt (SAC) tại O

$$\Rightarrow \frac{d(D, (SAC))}{d(B, (SAC))} = \frac{DO}{BO} = 1 \Rightarrow d(D, (SAC)) = d(B, (SAC)) = \frac{2}{3}a.$$

Câu 28. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh a và cạnh bên $2a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải

Lời giải



Kẻ $OH \perp SI$ tại H

Ta có: $\begin{cases} BC \perp OI \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOI) \Rightarrow BC \perp OH$

Ta lại có: $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O, (SBC)) = OH$

Ta có: $OI = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$; $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}a$

$$OH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{33}}{3}a\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}}} = \frac{\sqrt{165}}{45}a$$

Ta có:

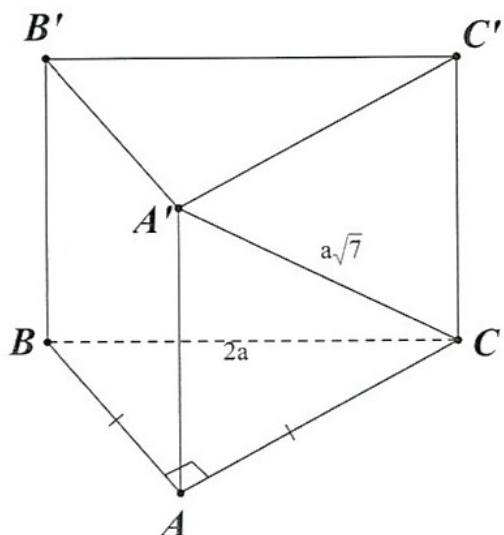
Vậy $d(O, (SBC)) = \frac{\sqrt{165}}{45}a$.

Ta có: AO cắt (SBC) tại $I \Rightarrow \frac{d(A, (SBC))}{d(O, (SBC))} = \frac{AI}{OI} = 3 \Rightarrow d(A, (SBC)) = 3d(O, (SBC)) = \frac{\sqrt{165}}{15}a$.

Câu 29. Cho khối lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $BC = 2a$ và $A'C = a\sqrt{7}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Lời giải

Lời giải



$$V = S_{ABC} \cdot \overset{\cdot}{A} A$$

$$AB = AC = \frac{2a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$$

$$S_{ABC} = \frac{(\sqrt{2}a)^2}{2} = a^2$$

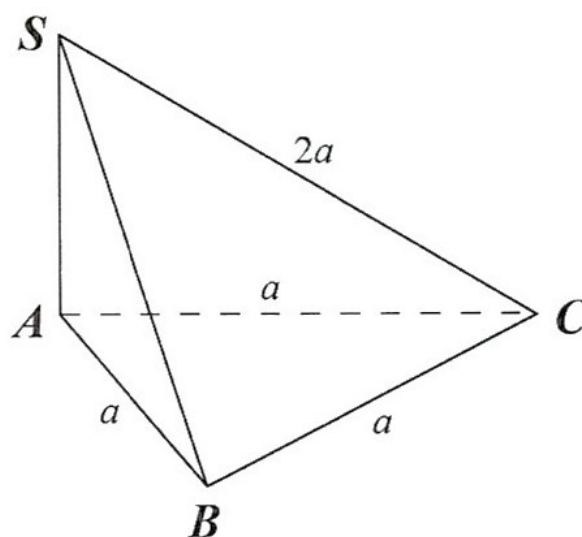
$$\overset{\cdot}{A} A = \sqrt{\overset{\cdot}{A} C^2 - AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{5}a$$

$$\Rightarrow V_{S_{ABC}} = a^2 \cdot \sqrt{5}a = \sqrt{5}a^3.$$

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, SA \perp (ABC)$ và $SC = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

Lời giải



$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

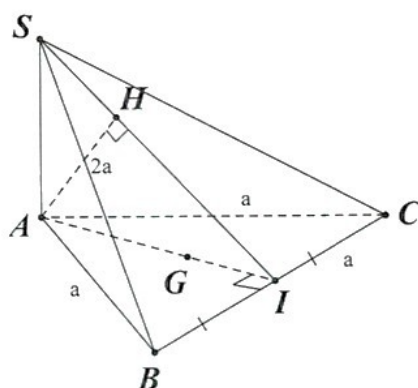
$$SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3}a = \frac{1}{4}a^3$$

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SB = 2a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải

Lời giải



Kẻ $AI \perp BC$, kẻ $AH \perp SI$ tại H

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$

Ta lại có: $AH \perp SI \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$

Ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - BA^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$

$$AH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{3}a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}} = \frac{\sqrt{15}}{5}a$$

Ta có:

$$d(A, (SBC)) = \frac{\sqrt{15}}{5}a$$

Vậy

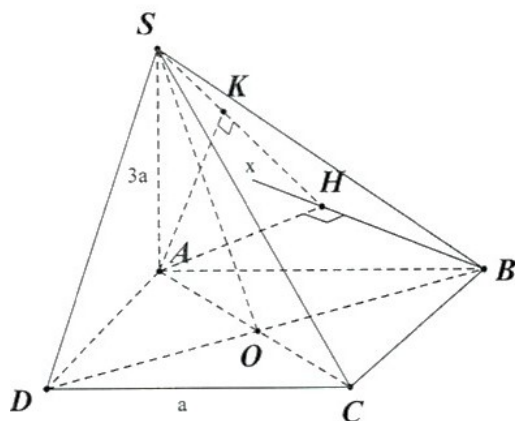
Ta có: GA cắt (SBC) tại I

$$\Rightarrow \frac{d(G, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{GI}{AI} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(G, (SBC)) = \frac{1}{3}d(A, (SBC)) = \frac{\sqrt{15}}{15}a.$$

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 3a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB .

Lời giải

Lời giải



Dựng $Bx \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (SBx)$

Suy ra $d(AC, SB) = d(AC, (SBx)) = d(A, (SBx))$

Dựng và chứng minh được $d(A, (SBx)) = AK$

Ta có: $\triangle AHB$ vuông cân tại H nên $AH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$AK = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(3a)^2}}} = \frac{3\sqrt{19}}{19}a$$

Ta có:

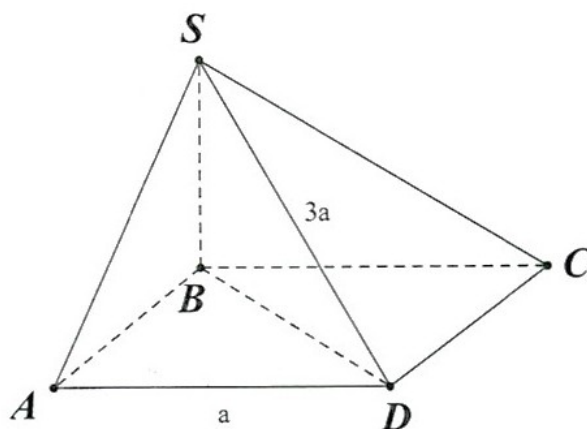
$$d(AC, SB) = \frac{3\sqrt{19}}{19}a$$

Vậy

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SB \perp (ABCD)$ và $SD = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

Lời giải



$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SB$$

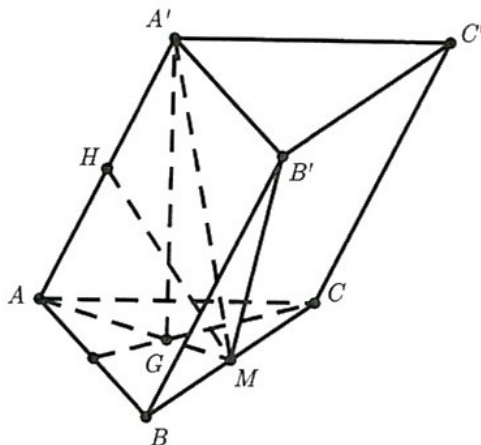
$$S_{ABCD} = a^2$$

$$SB = \sqrt{SD^2 - BD^2} = \sqrt{(3a)^2 - (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}a \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{7}a = \frac{\sqrt{7}}{3}a^3.$$

Câu 34. Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$.

Lời giải

Lời giải



M là trung điểm của BC thì $BC \perp (AA'M)$.

Gọi MH là đường cao của tam giác $A'AM$ thì $MH \perp AA'$ và $HM \perp BC$ nên HM là khoảng cách AA' và BC .

Ta có $AA' \cdot HM = AG \cdot AM \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \sqrt{AA'^2 - \frac{a^2}{3}}$

$$\Leftrightarrow AA'^2 = 4 \left(AA'^2 - \frac{a^2}{3} \right) \Leftrightarrow 3AA'^2 = \frac{4a^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow AA'^2 = \frac{4a^2}{9} \Leftrightarrow AA' = \frac{2a}{3}$$

Đường cao của lăng trụ là $AG = \sqrt{\frac{4a^2}{9} - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a}{3}$.

Thể tích $V_{LT} = \frac{a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

---HẾT---