

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HOÁ
TRƯỜNG THPT LƯƠNG ĐẮC BẰNG**

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN
VÀO MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ**

**Người thực hiện: Trương Thị Kim
Chức vụ: Giáo viên
Sáng kiến kinh nghiệm thuộc môn Toán Học**

THANH HÓA 2016

MỤC LỤC

	Trang
A. ĐẶT VẤN ĐỀ	3
I. Lí do chọn đề tài.....	3
II. Mục đích chọn đề tài.....	3
III. Đối tượng, phạm vi nghiên cứu.....	3
B. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ	4
I. Cơ sở lí luận của vấn đề.....	4
II. Thực trạng của vấn đề.....	4
III. Giải pháp và tổ chức thực hiện.....	4
IV. Kiểm nghiệm.....	17
C. KẾT LUẬN	18

A. ĐẶT VẤN ĐỀ

I. Lí do chọn đề tài

1.1. Bất đẳng thức và các bài toán quy về bất đẳng thức là một trong những bài toán khó nhất trong các kì thi học sinh giỏi các cấp và kỳ thi THPT Quốc Gia hiện nay. Điều quan trọng của các bài toán cực trị là tìm ra được dấu “=” của đẳng thức. Nhưng khi thực hiện bài toán thì bất đẳng thức lại thường ngược chiều, gây khó khăn, bế tắc cho bài toán.

1.2. Một trong những điều mấu chốt của bài toán cực trị là tìm được một bất đẳng thức phụ để biến biểu thức phức tạp thành một biểu thức đơn giản và có từ về còn lại hoặc từ giả thiết. Các bài toán này không những chỉ ở dạng toán chứng minh bất đẳng thức, tìm GTNN, GTLN mà còn ở các bài toán giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình và là các bài toán khó nhất trong các đề thi mà kể cả những em khá, giỏi bài toán này vẫn còn là một ẩn số rất lớn.

1.3. Khi học sinh đã có được kỹ năng tự nghiên cứu, khai thác kiến thức thì các em còn có thể tham khảo được nhiều tài liệu, sách giáo khoa và trên mạng Internet,... để phục vụ cho việc học tốt hơn.

Trong quá trình dạy học, ôn luyện thi học sinh giỏi và Thi THPT Quốc Gia tôi đã dạy và khai thác rất nhiều dạng bài toán về cực trị và một trong những dạng đó tôi mạnh dạn đưa ra sáng kiến kinh nghiệm về một đề tài nhỏ đó là:

” Áp dụng phương pháp tiếp tuyến vào một số bài toán cực trị.”- CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI VÀ THPT QUỐC GIA .

II. Mục đích chọn đề tài:

Thực hiện đề tài ***” Áp dụng phương pháp tiếp tuyến vào một số bài toán cực trị.”***, tôi hướng tới mục đích:

- Khi nắm được dấu “=” của bất đẳng thức, có thể sử dụng so sánh, dồn biến từ một biểu thức phức tạp, nhiều ẩn về một ẩn bậc thấp hơn.
- Đưa ra hàm số xác định trên miền D. Khảo sát hàm số trên D và tìm cực trị.
- Đặc biệt là đối với phương trình, hệ phương trình và bất phương trình, việc so sánh, đánh giá cho một biểu thức dương hoặc âm là rất quan trọng đòi hỏi các em phải có cách nhìn tổng quát, sâu rộng về so sánh bất đẳng thức.
- Do vậy, nếu học sinh có đủ khả năng nhìn nhận, phân tích bài toán thì sẽ tìm ra hướng giải cho mỗi bài toán tốt hơn.

III. Đối tượng, phạm vi nghiên cứu:

1. Sách giáo khoa toán 10,11,12 (Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam)
2. Tạp chí báo toán học và tuổi trẻ (Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam- Bộ giáo dục và đào tạo)
3. Các chuyên đề luyện thi học sinh giỏi và THPT Quốc Gia.

B – GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

I. Cơ sở lí luận của vấn đề

1.1. Xét bài toán tổng quát: “Cho $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in D$ thoả mãn $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n\alpha$, với $\alpha \in D$, cần chứng minh bất đẳng thức $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq nf(\alpha)$, đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = \alpha$ ”.

Bài toán này có tính chất nổi bật với vẻ trái là biểu thức đối xứng của các biến $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ và viết được dưới dạng tổng của một hàm số với các biến số khác nhau. Dẫn đến suy nghĩ một cách tự nhiên để giải quyết bài toán này là ta xét hàm số $y = f(x)$, sau đó chứng minh $f(x) \geq Ax + B$ với mọi $x \in D$, trong đó A, B thoả mãn $A(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + nB = nf(\alpha)$ (hay $A\alpha + B = f(\alpha)$). Dễ thấy $y = Ax + B$ chính là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = \alpha$.

Như vậy qua phân tích, chúng ta có thể đưa ra được lời giải cho bài toán tổng quát trên như sau: Xét hàm số $y = f(x)$, $x \in D$, viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $x = \alpha$ là $y = Ax + B$. Ta chứng minh $f(x) \geq Ax + B$ với mọi $x \in D$, từ đó suy ra: $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq nf(\alpha)$ (đpcm).

1.2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên D . Khi đó tiếp tuyến tại một điểm $x_0 \in D$ có phương trình $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ luôn nằm dưới đồ thị hoặc trên đồ thị.

Nên ta có: $f(x) \geq f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)$.

Hoặc : $f(x) \leq f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)$.

Việc khảo sát về chiều của bất đẳng thức thì có thể dùng đạo hàm cấp hai để xét hoặc đối với hàm số đơn giản thì có thể vẽ đồ thị của hàm số trên D để đối chiếu.

Suy ra: $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq f'(x_0).(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + nf(x_0)$

Hoặc ngược lại: $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq f'(x_0).(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + nf(x_0)$

1.3. Khi học sinh có được kĩ năng tự nghiên cứu, khai thác kiến thức, thì các em còn có thể tham khảo được nhiều tài liệu, sách giáo khoa và trên mạng internet,... để phục vụ cho việc học tập tốt hơn.

Vì thế, tôi đã mạnh dạn đưa ra sáng kiến kinh nghiệm về một đề tài nhỏ, đó là: **“Áp dụng phương pháp tiếp tuyến vào các bài toán cực trị”** – CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI VÀ THPT QUỐC GIA.

II. Thực trạng của vấn đề:

2.1. Sử dụng phương pháp tiếp tuyến vào các bài toán cực trị giúp học sinh có cách giải bài toán gọn hơn nhanh và đơn giản thông qua một bất đẳng thức phụ. Cái hay của phương pháp này ở chỗ:

Có thể đánh giá một biểu thức thông qua một biểu thức bậc nhất.

Có thể chọn vị trí tiếp tuyến tại điểm sao cho bất đẳng thức xảy ra dấu “=”

Chẳng hạn: Xét $f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$, $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$

Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại $x = \frac{1}{3}$. Khi đó ta chứng minh được:

$$f(x) \geq \frac{-80}{\sqrt{82}}x + \frac{162}{3\sqrt{82}}; \quad \forall x \in \left(0; \frac{1}{3}\right].$$

Vậy bài toán: “ Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn: $x + y + z \leq 1$.

Chứng minh : $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$ ” được giải quyết.

2.2. Tuy các dạng toán này rất khó nhưng khi tìm ra chìa khóa của bài toán thì vấn đề được giải quyết rất đơn giản, nhanh gọn. Điều khó khăn nhất là tìm ra chìa khóa đó? Dạng bài nào thì giải được bằng phương pháp này? Câu hỏi đó trả lời được nhờ sự tư duy cao và sáng tạo của mỗi học sinh. Ở các bài toán có thể dồn về một ẩn ở mỗi biểu thức và tìm ra dấu “=” của bất đẳng thức thì ta có thể thử giải quyết bằng phương pháp này.

III. Giải pháp và tổ chức thực hiện:

3.1. Giải pháp

Trước hết ta hãy nhìn vào một số đề bài sau:

Bài 1: Giải phương trình:

$$(x^2 + 3)^2 \sqrt{x^2 + 3} - 3(x^2 + 3)^2 + 2(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3} + 4\sqrt{x^2 + 3} - 6x - 2 = 0$$

Bài 2: Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} 6\sqrt{x^2 + x + 1} = 1 - 2\sqrt{y + 1} \\ 2 = (2 + x)(y + 2 + \sqrt{y + 1}) \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x - 7\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x + 1}} = 3y \\ 16\sqrt{y^2 + 7} - 2\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \ln x \end{cases}$$

Bài 3: Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn : $a + b + c + d \geq 1$.
 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

Bài 4: Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn $x + y + z = 9$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{x^3 + y^3}{xy + 9} + \frac{y^3 + z^3}{yz + 9} + \frac{z^3 + x^3}{xz + 9} \geq 9$$

Bài 5: Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}; n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Bài 6: cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $4(a+b+c) - 9 = 0$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = (a + \sqrt{a^2 + 1})^b (b + \sqrt{b^2 + 1})^c (c + \sqrt{c^2 + 1})^a$$

Bài 7: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3}{a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^3}{b^2 + (a+c)^2} + \frac{c^3}{c^2 + (a+b)^2}$$

Bài 8: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng :

$$10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) \geq 1.$$

Cách định hướng và thực hiện các bài toán:

Bước 1: Hướng dẫn cho học sinh cách nhìn dạng, thử các phương án giải: Đặt ẩn phụ, biến đổi tương đương, đưa về hàm số, so sánh, sử dụng phương pháp tiếp tuyến để đưa về biểu thức bậc nhất...

Bước 2: Nhằm nghiệm của bài toán (đối với phương trình, hệ phương trình) và tìm dấu “=” xảy ra (đối với bất đẳng thức).

Bước 3: Đưa ra các câu hỏi và phương pháp làm từ dễ đến khó để khai thác kiến thức có trong bài toán và cách nhìn dạng của bài toán.

3.2. Tổ chức thực hiện:

Bước 1: Vì đây là dạng toán khó và nhìn ra phương pháp giải cũng khó khăn nên để các em định hướng, nhìn nhận và cùng nhau thảo luận vấn đề. Giáo viên gợi ý về cách nhìn ẩn ở mỗi biểu thức, dồn ẩn và tìm biến phụ.

Bước 2: Phân tích các dạng bài từ vận dụng thấp đến vận dụng cao và biến đổi phức tạp hơn.

Dạng 1: Sử dụng phương pháp tiếp tuyến vào giải phương trình, hệ phương trình:

Bài 1: Giải phương trình:

$$(x^2 + 3)^2 \sqrt{x^2 + 3} - 3(x^2 + 3)^2 + 2(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3} + 4\sqrt{x^2 + 3} - 6x - 2 = 0 \quad (1)$$

Lời giải

Xét $f(t) = t^2 \sqrt{t} - 3t^2 + 2t\sqrt{t} + 4t, t > 1$

Có: $f(t) = t^2 \sqrt{t} - 3t^2 + 2t\sqrt{t} + 4t \geq 3t - 4 \quad \forall t > 1 (*)$

Thật vậy $(*) \Leftrightarrow (\sqrt{t} + 1)(t + 1)(\sqrt{t} - 2)^2 \geq 0$ đúng với $\forall t > 1$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow t = 4$

Áp dụng $(*)$ ta có: $(1) \Leftrightarrow 3(x^2 + 3) - 4 - 6x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 3(x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 1$

Thử lại $x=1$ thỏa mãn phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình: $S = \{1\}$

Nhận xét: Dự đoán nghiệm của phương trình $x=1$ (có thể dùng máy tính bấm nghiệm).

Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $f(t) = t^2 \sqrt{t} - 3t^2 + 2t\sqrt{t} + 4t$ tại $t=1$.

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 6\sqrt{x^2 + x + 1} = 1 - 2\sqrt{y + 1} \\ 2 = (2 + x)(y + 2 + \sqrt{y + 1}) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $y \geq -1$

Hệ pt $\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{x^2 + x + 1} = 1 - 2\sqrt{y + 1} \\ \frac{6}{y + 2 + \sqrt{y + 2}} = 6 + 3x \end{cases}$

Cộng theo vế:

$$6\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{6}{y + 2 + \sqrt{y + 2}} = 7 + 3x - 2\sqrt{y + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{1}{y + 2 + \sqrt{y + 2}} = \frac{1}{2}(x + 1) + \frac{2 - \sqrt{y + 1}}{3}$$

Sử dụng phương pháp tiếp tuyến dự đoán và chứng minh được:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} \geq \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$\frac{1}{y + 2 + \sqrt{y + 2}} \geq \frac{2 - \sqrt{y + 1}}{3}$$

$$\Rightarrow VT \geq VP$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Thử lại $x=1, y=0$ thỏa mãn hệ phương trình.

$$\text{Bài 3: Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{x - 7\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = 3y \\ 16\sqrt{y^2 + 7} - 2\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \ln x \end{cases} \quad (\text{I})$$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x > 0$

$$\text{hpt (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x+1}} = 3y + 7 \\ 4\sqrt{y^2 + 7} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \ln x + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{cộng theo vế ta được: } 4\sqrt{y^2 + 7} + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \ln x + \frac{1}{\sqrt{2}} + 3y + 7$$

Dễ dàng chứng minh:

$$4\sqrt{y^2 + 7} \geq 3y + 7$$

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{8} \ln x + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Vậy: } (x; y) = (1; 3)$$

Nhận xét: Dùng phương pháp tiếp tuyến có thể đánh giá bất đẳng thức và xét nghiệm của phương trình qua dấu “=”.

Phương pháp này còn rất hay khi giải các bài toán cực trị trong bất đẳng thức.

Bài tập đề xuất:

Giải các hệ phương trình:

$$1. \begin{cases} 2\sqrt{x^4 - x^2 + 1} + 4\sqrt{y^2 + 7} = 18 \\ x^4 - 5x^3 + 4\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y + 3} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
2. & \begin{cases} (3x-5)(x^2-1)=y(x^2+3x-y-6) \\ \sqrt[4]{-y^2-2y+1}=y-3x+4 \end{cases} \\
3. & \begin{cases} x(x^2-y^2)+x^2=2\sqrt{(x-y^2)^3} \\ 76x^2-20y^2+2=\sqrt[3]{4x(8x+1)} \end{cases} \\
4. & \begin{cases} \sqrt{-4x^2+26x-42}+\frac{2x^2-13x+17}{2x^2-13x+19}=\frac{(y+3)\sqrt{y+1}}{6} \\ (x-1)^{y+1}=(y+1)^{x-1} \end{cases}
\end{aligned}$$

Dạng 2: Sử dụng phương pháp tiếp tuyến vào các bài toán cực trị:

Bài 1: Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn : $a + b + c + d \geq 1$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $a, b, c, d \in (0; 1)$ và bài toán được viết dưới dạng tìm trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \text{ với } f(x) = 6x^3 - x^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$. Ta xét hàm số $f(x) = 6x^3 - x^2$ trên khoảng $(0; 1)$, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số này tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{1}{4}$ là $y = \frac{5}{8}x - \frac{1}{8}$.

$$\text{Xét } f(x) - \left(\frac{5}{8}x - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8}(4x-1)^2(3x+1) \geq 0, \quad \forall x \in (0; 1), \quad \text{suy ra}$$

$$f(x) \geq \frac{5}{8}x - \frac{1}{8}, \quad \forall x \in (0; 1).$$

$$\text{Từ đó ta có } f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{5}{8}(a+b+c+d) - 4 \cdot \frac{1}{8} \geq \frac{1}{8},$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{1}{8} \Leftrightarrow a = b = c = d = \frac{1}{4}.$$

Nhận xét: Để áp dụng được kỹ thuật tiếp tuyến chúng ta phải đưa bất đẳng thức được về dạng tổng quát của: $P = f(a) + f(b) + f(c) + f(d)$

$$\text{Hay: } P = 6a^3 - a^2 + 6b^3 - b^2 + 6c^3 - c^2 + 6d^3 - d^2$$

Dự đoán GTNN của $P = \frac{1}{8}$ khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

Xét $f(x) = 6x^3 - x^2$, lập phương trình tiếp tuyến tại: $x_0 = \frac{1}{4}$

Bài 2: Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn $x + y + z = 9$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{x^3 + y^3}{xy + 9} + \frac{y^3 + z^3}{yz + 9} + \frac{z^3 + x^3}{xz + 9} \geq 9$$

Lời giải

Để dàng chứng minh bất đẳng thức: với $a > 0, b > 0$: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

Áp dụng ta có:

$$x^3 \left(\frac{1}{xy + 9} + \frac{1}{xz + 9} \right) \geq \frac{4x^3}{xy + xz + 18} = \frac{4x^3}{x(9 - x) + 18}$$

Tương tự cộng lại ta có:

$$P \geq \frac{4x^3}{9x - x^2 + 18} + \frac{4y^3}{9y - y^2 + 18} + \frac{4z^3}{9z - z^2 + 18}$$

Bây giờ ta sẽ đánh giá bằng tiếp tuyến:

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{4t^3}{9t - t^2 + 18}, t \in (0; 9)$$

Ta viết phương trình tiếp tuyến với $f(t)$ tại điểm $t_0 = 3$. Vậy ta có:

$$f(t) \geq \frac{11t}{4} - \frac{21}{4}$$

$$\Leftrightarrow (t - 3)^2(9t + 14) \geq 0$$

Điều này đúng. Vậy nên ta có:

$$P \geq \frac{4x^3}{9x - x^2 + 18} + \frac{4y^3}{9y - y^2 + 18} + \frac{4z^3}{9z - z^2 + 18} \geq \frac{11}{4}(x + y + z) - \frac{63}{4} = 9$$

Vậy ta có điều phải chứng minh và dấu đẳng thức xảy ra tại $x = y = z = 3$.

Nhận xét: Cái hay của bất đẳng thức này là ở chỗ:

- Có thể đánh giá một biểu thức thông qua một biểu thức bậc nhất.

- Có thể chọn vị trí tiếp tuyến tại điểm sao cho bất đẳng thức xảy ra dấu “=”

Bài 3: cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $4(a + b + c) - 9 = 0$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = (a + \sqrt{a^2 + 1})^b (b + \sqrt{b^2 + 1})^c (c + \sqrt{c^2 + 1})^a$$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\ln S = b \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) + c \ln(b + \sqrt{b^2 + 1}) + a \ln(c + \sqrt{c^2 + 1})$

Xét hàm số: $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x > 0$ (1). Do đặc thù của bài toán nên ta có thể dự đoán giá trị lớn nhất của bài toán đạt được khi $a = b = c = \frac{3}{4}$. Vì vậy ta sẽ so sánh vị trí của đồ thị với tiếp tuyến của nó tại điểm $(\frac{3}{4}; \ln 2)$.

Đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow f'(\frac{3}{4}) = \frac{4}{5}$. Tiếp tuyến của đồ thị tại hàm số (1)

tại điểm $(\frac{3}{4}; \ln 2)$ có phương trình $y = \frac{4}{5}x + \ln 2 - \frac{3}{5}$

Đạo hàm cấp hai suy ra đồ thị hàm số (1) lồi trên khoảng $(0; \infty)$. Do đó tại điểm $(\frac{3}{4}; \ln 2)$ tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) nằm phía trên đồ thị hàm số (1). Từ

đó ta có: $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \leq \frac{4}{5}x + \ln 2 - \frac{3}{5}, \forall x > 0$

Áp dụng bất đẳng thức này cho số dương a ta được

$\ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) \leq \frac{4}{5}a + \ln 2 - \frac{3}{5}$. Nhân hai vế với số $b > 0$ ta suy ra:

$$b \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) \leq \frac{4}{5}ab + (\ln 2 - \frac{3}{5})b.$$

Tương tự ta có:

$$\begin{cases} c \ln(b + \sqrt{b^2 + 1}) \leq \frac{4}{5}bc + (\ln 2 - \frac{3}{5})c \\ a \ln(c + \sqrt{c^2 + 1}) \leq \frac{4}{5}ac + (\ln 2 - \frac{3}{5})a \end{cases}$$

Cộng vế ba bất đẳng thức này ta được:

$$\ln S \leq \frac{4}{5}(a + b + c) + (\ln 2 - \frac{3}{5})(a + b + c)$$

Cuối cùng sử dụng bất đẳng thức $(ab + bc + ac) \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$ và giả thiết

$a + b + c = \frac{9}{4}$, rút gọn thu được $\ln S \leq \frac{9}{4} \ln 2$. Từ đó $S \leq 4\sqrt[4]{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{3}{4}$. Vậy giá trị lớn nhất của S là

$$4\sqrt[4]{2}$$

Nhận xét: Đôi khi giả thiết lồi, lõm không được thỏa mãn. Lúc đó ta sẽ so sánh vị trí của tiếp tuyến và đồ thị hàm số bằng chứng minh trực tiếp.

Bài 4: Chứng minh rằng, với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$ ta có:

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3.$$

Hướng dẫn giải:

Xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}, x > 0$. Ta có: $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{2}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ có phương trình là

$$y = -\frac{1}{2}x + 1, f''(x) = \frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3} \text{ suy ra đồ thị hàm số không luôn luôn lõm trên}$$

khoảng $(0; 3)$. Tuy nhiên ta vẫn có BĐT: $\frac{1}{x^2+1} \geq -\frac{1}{2}x + 1, \forall x > 0$ (1)

(vì bất đẳng thức này tương đương với BĐT: $x(x-1)^2 \geq 0$)

Áp dụng BĐT (1) cho số $b > 0$ ta được $\frac{1}{b^2+1} \geq -\frac{1}{2}b + 1$ (2). Vì $a+1 > 0$ nên

$$(2) \Leftrightarrow \frac{a+1}{b^2+1} \geq \left(-\frac{1}{2}b + 1\right) \cdot (a+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+1}{b^2+1} \geq -\frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}b + a + 1$$

Tương tự cộng lại ta được

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq -\frac{1}{2}(ab+bc+ac) - \frac{1}{2}(b+c+a) + (a+b+c) + 3$$

Cuối cùng sử dụng bất đẳng thức $ab+bc+ac \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$ và giả thiết

$a+b+c=3$ ta thu được:

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$$

Nhận xét: Trong chứng minh các BĐT ở trên, giả thiết $a+b+c=k$ ($\geq k; \leq k$)

là quan trọng. Do vậy, đối với các BĐT chưa cho sẵn giả thiết này mà có tính đẳng cấp, ta cũng có thể tự tạo ra các điều kiện của biến (chuẩn hóa) rồi sử dụng phương trên.

Bài 5: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Hướng dẫn giải:

Ta có nhận xét, nếu có một trong ba số a, b, c thuộc khoảng $\left(0; \frac{1}{3}\right)$, chẳng hạn $0 < a < \frac{1}{3}$ thì ta có $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} > 9 = (a+b+c)^2 > a^2 + b^2 + c^2$ nên bài toán được chứng minh, do vậy ta chỉ xét $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right]$. Ta xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$ trên đoạn $\left[\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right]$, phương trình tiếp tuyến của đồ thị $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $y = -4x + 4$. Ta có $f(x) - (-4x + 4) = \frac{(x-1)^2 [2 - (x-1)^2]}{x^2} \geq 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right]$, suy ra $f(x) \geq -4x + 4$, $\forall x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right]$.

Từ đó ta có: $f(a) + f(b) + f(c) \geq -4(a+b+c) + 16 = 0$, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 6: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) \geq 1.$$

Hướng dẫn giải:

Như các bài toán trên, ta xét hàm số $f(x) = 10x^3 - 9x^5$ trên khoảng $(0; 1)$, phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{1}{3}$ là $y = \frac{25}{9}x - \frac{16}{27}$.

Xét $f(x) - \left(\frac{25}{9}x - \frac{16}{27}\right) = \frac{1}{27}(3x-1)^2(-27x^3 - 18x^2 + 21x + 16)$, bây giờ ta chưa thể khẳng định được $f(x) \geq \frac{25}{9}x - \frac{16}{27}$ với mọi $x \in (0; 1)$, nên ta đặt $g(x) = -27x^3 - 18x^2 + 21x + 16$ và xét hàm số $g(x)$ trên khoảng $(0; 1)$, ta thấy $g(x)$ không luôn dương trên $(0; 1)$, nên ta phải tìm cách chia khoảng xác định của x tốt nhất có thể sao cho trên khoảng đó thì $g(x) > 0$. Bằng cách lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên khoảng $(0; 1)$, ta suy ra $g(x) > 0$ với mọi $x \in \left(0; \frac{9}{10}\right)$, từ đó ta có $f(x) \geq \frac{25}{9}x - \frac{16}{27}$ với mọi $x \in \left(0; \frac{9}{10}\right)$. Như vậy bài toán đã chứng minh xong khi $a, b, c \in \left(0; \frac{9}{10}\right)$ và $a + b + c = 1$. Bây giờ ta xét trường

hợp có ít nhất một trong ba số a, b, c thuộc nửa khoảng $\left[\frac{9}{10}; 1\right)$, giả sử $a \in \left[\frac{9}{10}; 1\right)$ do a, b, c đều dương và có tổng bằng 1 nên $b, c \in \left(0; \frac{1}{10}\right]$, dễ thấy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\left[\frac{9}{10}; 1\right]$ và đồng biến trên $\left[0; \frac{1}{10}\right]$, suy ra $f(a) > f(1) = 1$, $f(b) > f(0) = 0$, $f(c) > 0$, $f(a) + f(b) + f(c) > 1$

Vậy $f(a) + f(b) + f(c) \geq 1$ với mọi số thực dương a, b, c thoả mãn $a + b + c = 1$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Thông qua bài toán này, ta có thể thấy được khi nào cần phân khoảng đang xét thành hai hay nhiều khoảng để có những bước đi tiếp theo mà không hề mất tự nhiên!

Bài 7: Cho ba số thực dương a, b, c thoả mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{27}{8}.$$

Hướng dẫn giải:

Nhìn bài toán ta khó có thể thấy được việc sử dụng phương pháp tiếp tuyến, tuy nhiên để ý một chút $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(1-c)^2}{4}$ suy ra

$\frac{1}{1-ab} \leq \frac{4}{3+2c-c^2}$ nên ta đã đưa được bài toán đã cho về bài toán quen thuộc:

Chứng minh rằng $\frac{1}{3+2a-a^2} + \frac{1}{3+2b-b^2} + \frac{1}{3+2c-c^2} \leq \frac{27}{32}$ với điều kiện a, b, c dương và $a + b + c = 1$.

Bây giờ xét hàm số $f(x) = \frac{1}{3+2x-x^2}$ trên khoảng $(0; 1)$, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $\frac{1}{3}$ là $y = -\frac{27}{256}x + \frac{81}{256}$.

Xét $f(x) - \left(-\frac{27}{256}x + \frac{81}{256}\right) = \frac{1}{3+2x-x^2} + \frac{27}{256}x - \frac{81}{256} = \frac{(3x-1)^2(13-3x)}{256(3+2x-x^2)} \leq 0$ với

mọi $x \in (0; 1)$, do đó $f(x) \leq -\frac{27}{256}x + \frac{81}{256}$ với mọi $x \in (0; 1)$. Từ đó ta có

$\frac{1}{3+2a-a^2} + \frac{1}{3+2b-b^2} + \frac{1}{3+2c-c^2} \leq -\frac{27}{256}(a+b+c) + 3 \cdot \frac{81}{256} = \frac{27}{32}$, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 8: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1.$$

Hướng dẫn giải:

Áp dụng bất đẳng thức $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ ta có

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq \frac{2}{8-(a^2+b^2)} + \frac{2}{8-(b^2+c^2)} + \frac{2}{8-(c^2+a^2)}.$$

Đặt $x = (b^2 + c^2)^2$, $y = (c^2 + a^2)^2$, $z = (a^2 + b^2)^2$ khi đó

$$x + y + z \leq 4(a^4 + b^4 + c^4) = 12.$$

Bây giờ bài toán trở thành: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$x + y + z \leq 12. \text{ Chứng minh rằng } \frac{1}{8-\sqrt{x}} + \frac{1}{8-\sqrt{y}} + \frac{1}{8-\sqrt{z}} \leq \frac{1}{2}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{8-\sqrt{x}}$ trên khoảng $(0; 12)$ và phương trình tiếp tuyến của

đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 4$ là $y = \frac{1}{144}(x-4) + \frac{1}{6}$.

Xét:

$$f(x) - \frac{1}{144}(x-4) - \frac{1}{6} = \frac{x-4}{6(\sqrt{x}+2)(8-\sqrt{x})} - \frac{1}{144}(x-4) = \frac{(x-4)^2(\sqrt{x}-4)}{144(\sqrt{x}+2)^2(8-\sqrt{x})}$$

Trên khoảng $(0; 12)$ thì $f(x) - \frac{1}{144}(x-4) - \frac{1}{6} \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{1}{144}(x-4) + \frac{1}{6}$.

$$\text{Do đó } \frac{1}{8-\sqrt{x}} + \frac{1}{8-\sqrt{y}} + \frac{1}{8-\sqrt{z}} \leq \frac{1}{144}(x+y+z-12) + 3 \cdot \frac{1}{6} \leq \frac{1}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 4$ hay $a = b = c = 1$.

Bài 9: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a+b+c) \left(\frac{3a-b}{a^2+ab} + \frac{3b-c}{b^2+bc} + \frac{3c-a}{c^2+ca} \right)$

Hướng dẫn giải:

Giả sử $a+b+c = k > 0$, đặt $a = kx, b = ky, c = kz \Rightarrow x, y, z > 0$ và $x+y+z = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= k \left[\frac{k(3x-y)}{k^2(x^2+xy)} + \frac{k(3y-z)}{k^2(y^2+yz)} + \frac{k(3z-x)}{k^2(z^2+zx)} \right] = \frac{3x-y}{x^2+xy} + \frac{3y-z}{y^2+yz} + \frac{3z-x}{z^2+zx} \\ &= \frac{4x-(x+y)}{x(x+y)} + \frac{4y-(y+z)}{y(y+z)} + \frac{4z-(z+x)}{z(z+x)} = \frac{4}{x+y} - \frac{1}{x} + \frac{4}{y+z} - \frac{1}{y} + \frac{4}{z+x} - \frac{1}{z} \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{1-z} - \frac{1}{x} + \frac{4}{1-x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{1-y} - \frac{1}{z} = \frac{5x-1}{x-x^2} + \frac{5y-1}{y-y^2} + \frac{5z-1}{z-z^2}.$$

Do a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $b+c > a \Rightarrow y+z > x \Rightarrow 1-x > x$

$\Rightarrow x < \frac{1}{2}$, tức là $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Tương tự ta cũng có $y, z \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

Ta sẽ chứng minh $\frac{5t-1}{t-t^2} \leq 18t-3$ (*) đúng với mọi $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

(Dự đoán dấu “=” xảy ra, xét hàm số: $f(t) = \frac{5t-1}{t-t^2}$. Lập phương trình tiếp

tuyến của đồ thị hàm số tại $t = \frac{1}{3}$ khi đó: $f(t) \leq 18t-3$).

Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow \frac{5t-1}{t-t^2} - 18t+3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{18t^3 - 21t^2 + 8t - 1}{t-t^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2t-1)(3t-1)^2}{t(1-t)} \leq 0$ (**)

(**) hiển nhiên đúng với mọi $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Do đó (*) đúng với mọi $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Áp dụng (*) ta được $P \leq 18x-3+18y-3+18z-3 = 18(x+y+z)-9 = 9$

Dấu “=” xảy ra khi $x=y=z = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a=b=c$.

Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng 9 khi $a=b=c$.

Bài tập đề xuất:

Bài 1: Cho $x, y, z \in [0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x).$$

Bài 2: Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \right)$$

Bài 3: Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$(ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3 \leq \frac{1}{64}$$

Bài 4: Cho ba số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng

$$2(x^3 + y^3 + z^3) + 3xyz \geq 3(x^2y + y^2z + z^2x).$$

Bài 5: Cho x, y, z là những số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{xy+x+1} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{z}{zx+z+1} \leq 1.$$

Bài 6: Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} + \frac{9(a+b+c)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)} \geq 33.$$

Bài 7: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b-c)^2}{c^2 + (b+a)^2} + \frac{(a+c-b)^2}{b^2 + (a+c)^2} + \frac{(c+b-a)^2}{a^2 + (b+c)^2} \geq \frac{3}{5}$$

IV. Kiểm nghiệm:

Với chuyên đề này áp dụng vào chuyên đề dạy bồi dưỡng học sinh giỏi và thi THPT Quốc gia cho những em khá giỏi của trường tôi và đặc biệt là cho học sinh trong lớp tôi trực tiếp giảng dạy và bồi dưỡng. Các em đã có thêm một phương pháp giải một số bài toán về cực trị tương đối tích cực. Chuyên hóa được một bài toán đang rất khó về một bài toán dễ hơn nhờ một bất đẳng thức phụ bậc nhất.

Đặc biệt với chương trình và đề thi hiện nay những câu khó được phân hóa rõ hơn yêu cầu các em phải vận dụng tất cả các kỹ năng, mức độ tư duy sâu và khó hơn rất nhiều. Với phương pháp và cách làm trên, tôi thấy có sự chuyển biến tích cực về chất lượng học tập của học sinh trong nhóm đội tuyển trường tôi, nhất là đối với các em thi học sinh giỏi và những em dự thi THPT Quốc gia tự tin hơn về kỹ năng làm bài, nhất là bài bất đẳng thức. Kết quả thực tế là đã góp phần tạo nên chất lượng học sinh trong các kì thi khá cao:

- Kì thi học sinh giỏi Tỉnh bộ môn Toán các năm học của nhà trường những năm tôi đảm nhiệm đều đạt giải cao.
- Thi Đại học, Cao đẳng, THPT Quốc gia có nhiều em đạt điểm 9-10 điểm, góp phần tạo điều kiện cho nhiều em thi đạt tổng điểm 3 môn trên 27 điểm.

C. PHẦN KẾT LUẬN

1. Đề tài ” *Áp dụng phương pháp tiếp tuyến vào một số bài toán cực trị.*”- CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI VÀ THPT QUỐC GIA có

ý nghĩa thực tiễn, đáp ứng được nhu cầu học tập, ôn luyện phần câu hỏi chốt của bài thi.

2. Tôi sẽ tiếp tục phát triển chuyên đề ôn luyện đề tài này ở những vấn đề khác của các bài toán cực trị để hoàn thiện cho học sinh kỹ năng khai thác, giải quyết bài toán cực trị được tốt hơn nữa. Hi vọng đề tài này sẽ nhận được sự góp ý của đồng nghiệp trong Tỉnh để chuyên đề này được áp dụng nhiều hơn.

3. Kiến nghị và đề xuất :

Bộ môn Toán học có vai trò rất quan trọng trong học tập ở Nhà trường cũng như ngoài thực tế của học sinh, nó tạo tư duy kiến thức và mối liên hệ với các môn học khác. Vì thế, tôi kiến nghị và đề xuất:

- Trong xây dựng phân phối chương trình cần có những tiết học dành riêng để giáo viên hướng dẫn học sinh nghiên cứu, khai thác kiến thức sau mỗi phần, mỗi chương học.

- Bộ Giáo dục nên gửi về cho các trường phổ thông các trang ôn luyện chuyên đề cập nhật hàng năm để giáo viên và học sinh thuận lợi hơn trong giảng dạy, học tập và nghiên cứu.

Tài liệu tham khảo

1. Giải tích 12(sách giáo khoa)-Đoàn Quỳnh(Tổng chủ biên) NXB Giáo dục,2008.
2. Đại số sơ cấp-Trần Phương, Lê Hồng Đức, NXB Hà Nội,2004.
3. Tạp chí báo toán học và tuổi trẻ (Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam-Bộ giáo dục và đào tạo)
4. Các website: hoctoancapba.com,toanhoc.edu.vn, 123doc.org, violet.vn, mathvn.com...

**XÁC NHẬN CỦA THỦ
TRƯỞNG ĐƠN VỊ**

Hoàng Hóa, Ngày 01/6/2016

**TÔI CAM KẾT KHÔNG COPPY
Người viết**

Trương Thị Kim